B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XL, II

VORLESUNGEN ÜBER ZAHLEN- UND FUNKTIONENLEHRE

VON

ALFRED PRINGSHEIM
PROFESSOR DER MATHEMATIK
AN DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

ZWEITER BAND

FUNKTIONENLEHRE



1925
LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XL, II. 1

VORLESUNGEN ÜBER FUNKTIONENLEHRE

VON

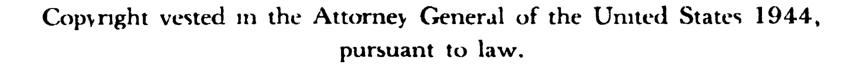
ALFRED PRINGSHEIM
PROFESSOR DER MATHEMATIK
AN DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

ERSTE ABTEILUNG
GRUNDLAGEN DER THEORIE DER ANALYTISCHEN FUNKTIONEN EINER KOMPLEXEN VERÄNDERLICHEN

MIT 25 FIGUREN IM TEXT



1925
LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER



Published by J. W. Edwards
Ann Arbor, Michigan
1948

Lithoprinted by Edwards Brothers, Inc
Ann Arbor, Michigan, U S A

Vorwort.

Die vorliegende, als erste Abteilung meiner Vorlesungen über Funktionenlehre erscheinende Darstellung der „Grundlagen der Theorie der analytischen Funktionen" unterscheidet sich von allen mir bisher bekannt gewordenen wesentlich insofern, als sie, grundsätzlich aufgebaut auf der *Weierstraß*schen Definition einer analytischen Funktion als eines Systems ineinander greifender *Potenzreihen*, nichtsdestoweniger von vornherein eine organische Verschmelzung mit der *Cauchy-Riemann*schen, lediglich auf der Voraussetzung der *Differenzierbarkeit* beruhenden Theorie anstrebt. Dieses Ziel wird erreicht durch Anwendung einer gelegentlich schon von *Cauchy* benutzten und vom Verfasser vervollkommneten, übrigens auch dem *Weierstraß*schen Gedankenkreise keineswegs fernliegenden[1]) *Mittelwertmethode*, welche es ermöglicht, unmittelbar an die Einführung des *Weierstraß*schen Funktionsbegriffes den Nachweis zu knüpfen, daß die *Cauchy*schen *„monogenen"*, d. h. im komplexen Sinne differenzierbaren Funktionen (von *Riemann* schlechthin und ausschließlich als *Funktionen* einer komplexen Veränderlichen bezeichnet) keine anderen sind, als die in Potenzreihen entwickelbaren, im *Weierstraß*schen Sinne *„analytischen"*. Werden auf diese Weise die beiden definitionsgemäß gänzlich verschieden erscheinenden Funktionsbegriffe von vornherein auf eine gemeinsame Basis gestellt, so gewinnt man gegenüber der üblichen, von vornherein die komplexe Integration in Anspruch nehmenden Behandlungsweise der *Cauchy*schen Theorie den nicht zu unterschätzenden Vorteil, daß grundlegende Erkenntnisse, die dort als sensationelle Ergebnisse eines geheimnisvollen, gleichsam Wunder wirkenden Mechanismus erscheinen, hier ihre natürliche Erklärung durch Zurückführung auf die bescheidenere Wirksamkeit der vier Spezies finden. Damit soll jenes glänzende analytische Hilfsmittel keineswegs ein für allemal ausgeschaltet werden, vielmehr wird hier nur die Ansicht verfochten, daß der Aufbau der ganzen Theorie durch den Verzicht auf dessen vorzeitige Anwendung wesentlich an Durchsichtigkeit gewinnt.

1) Vgl. den Schluß der Anmerkung zu § 37, S 606.

Von den sieben Kapiteln, in welche diese Abteilung zerfällt, behandelt das erste die unentbehrlichen der allgemeinen Theorie der *reellen* Funktionen und der Mengenlehre angehörigen Hilfsmittel nebst Begründung gewisser geometrischer Gesichtspunkte bzw. Ausdrucksweisen, einschließlich des *Jordan*schen Kurvensatzes. Den Schluß bildet die Erörterung der überraschenden Möglichkeiten von Funktionscharakteren, welche von arithmetischen Ausdrücken verhältnismäßig einfacher Art dargestellt werden, und die Begründung des Bedürfnisses, aus dieser unbegrenzten Mannigfaltigkeit einen mit besonderen Eigenschaften ausgestatteten Typus als denjenigen der *„analytischen“* Funktionen auszusondern. Dabei erweisen sich schließlich die *Potenzreihen* als diejenige Ausdrucksform, welche *möglicherweise* für den gedachten Zweck in Betracht kommt, vorausgesetzt, daß man eine bei beschränkter Konvergenz auftretende Schwierigkeit durch Ausdehnung des Bereiches der Veränderlichen auf das *komplexe* Zahlengebiet beseitigt.

Für diese beabsichtigte Erweiterung werden im zweiten Kapitel die nötigen Vorbereitungen getroffen durch Einführung der geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen und der vier Spezies in komplexen Zahlen, sowie durch Betrachtung der neuen für den Verlauf von Funktionen einer *komplexen* Veränderlichen erwachsenden Möglichkeiten, insbesondere des Prinzips der konformen Abbildung. Als weitere Vorbereitung für die allgemeine Theorie der analytischen Funktionen bringt das dritte Kapitel die wichtigsten Sätze über deren einfachste Gattung, die ganzen und gebrochenen rationalen Funktionen, das vierte eine ausführliche Theorie der *Potenzreihen*. An eine eingehende Untersuchung über gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen schließt sich die Erörterung der allgemeinen Konvergenzeigenschaften von Potenzreihen (auch solcher mit negativen Exponenten), sodann die Darstellung ihrer Koeffizienten und Summen durch *Mittelwerte*.

Die Einführung dieser letzteren, welche für entscheidende Entwicklungen des folgenden Kapitels sich als grundlegend erweist, nimmt für die dabei benutzten Wurzeln der Gleichung $x^{2^n} = 1$ keineswegs deren transzendente Darstellungsform, ja nicht einmal die Kenntnis des Satzes von der Wurzelexistenz einer algebraischen Gleichung, vielmehr nur diejenige der elementaren Tatsache in Anspruch, daß die Quadratwurzeln aus komplexen Zahlen sich durch solche aus reellen positiven Zahlen darstellen lassen. Im übrigen sind diese Mittelwerte gedanklich weit einfachere arithmetische Konstruktionen, als die komplexen Integrale und stehen zu der erzeugenden Funktion in einem weit durchsichtigeren, ich möchte sagen, sprechenderen Verhältnis, als jene. Hat man z. B. für $|x| < R$: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, so besteht für jedes nicht nega-

tive $r < R$ die Beziehung:

(1) $$a_0 = \mathfrak{M} f(\mathfrak{e} r),$$

wo $\mathfrak{M} f(\mathfrak{e} r)$ jenen „Mittelwert“ von $f(x)$ auf dem Kreise $|x| = r$ bedeutet.[1]) Sie beruht auf der als *selbstverständlich* anzusprechenden Tatsache, daß der Mittelwert der Konstanten a_0 wieder a_0 sein muß, und auf der durch das elementare Hilfsmittel der Summation einer endlichen geometrischen Progression zu erwerbenden Erkenntnis, daß der Mittelwert jeder ganzzahligen Potenz x^ν (für $\nu > 0$, übrigens auch für $\nu < 0$) verschwindet (s. S. 274, Gl. (21)). Wegen $a_0 = f(0)$ enthält die mit so primitiven Mitteln gewonnene Gleichung (1) eine bedeutungsvolle Aussage über den Verlauf der Funktion $f(x)$: die Ausbreitung ihrer Werte erfolgt in so symmetrischer Weise, daß der im Nullpunkt vorhandene Wert immer wieder als Mittelwert (Durchschnittswert) der verschiedenen auf irgendeinem Kreise $|x| = r$ auftretenden Funktionswerte erhalten bleibt.

Wird statt der *Mittelwertbildung* die *Integration* über irgendeinen der Kreise $|x| = r$ angewendet, so kommt zunächst nur das Resultat $\int_{\curvearrowleft 0} f(x)\,dx = 0$ zum Vorschein, da hier (anders wie der Mittelwert $\mathfrak{M}(\mathfrak{e} r)^\nu$) das Integral $\int_{\curvearrowleft 0} x^\nu\,dx$ auch für $\nu = 0$ *verschwindet.* Als Ersatz für die „Selbstverständlichkeit“ $\mathfrak{M}(\mathfrak{e} r)^0 = 1$ muß man daher den unter allen Integralen von der Form $\int_{\curvearrowleft 0} x^{\pm\nu}\,dx$ einzig existierenden, durch die *transzendente* Substitution $x = re^{\vartheta i}$ oder die Eigenschaften der *unendlich vieldeutigen* Funktion Lg x zu ermittelnden *Ausnahmefall* $\int_{\curvearrowleft 0} x^{-1}\,dx = 2\pi i$ heranziehen und erhält auf diese Weise an Stelle der Formeln (1) die folgende:

(2) $$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\curvearrowleft 0} \frac{f(x)}{x}\,dx.$$

Die schöne Einfachheit der Herleitung und des Baues der Formel (1) ist damit verschwunden, ihr charakteristischer, auf die Natur der Funktion $f(x)$ bezüglicher Inhalt bis zur Unkenntlichkeit verdunkelt.

Nach dieser Abschweifung, welche dazu dienen sollte, an einem vorläufigen Beispiele die Vorzüge kenntlich zu machen, welche nach meinem Dafürhalten die Mittelwertmethode für den *Aufbau* der Funktionentheorie vor derjenigen der komplexen Integration besitzt, erwähne ich von dem

1) Näheres darüber s. S. 272.

Inhalte des vierten Kapitels noch die nach *Cauchy*, *Weierstraß* und *Vitali* benannten Doppelreihensätze, die Einführung der Derivierten bzw. Differentialquotienten einer Potenzreihe und der aus einer Potenzreihe „abgeleiteten" Reihen.

Damit sind alle Grundlagen geschaffen für die im fünften Kapitel erfolgende Einführung des Begriffes der im *Weierstraß*schen Sinne monogenen analytischen Funktion einer komplexen Veränderlichen, des regulären Verhaltens einer solchen Funktion und ihrer singulären Stellen. Einen prinzipiell besonders wichtigen Bestandteil dieses Kapitels bildet der Satz von der Konstanz des Mittelwertes einer in einem Kreisringe bzw Kreise regulären Funktion, aus welchem der *Laurent*sche bzw. *Cauchy-Taylor*sche über die Entwickelbarkeit einer solchen Funktion in eine Reihe nach positiven und negativen bzw. lediglich positiven ganzen Potenzen unmittelbar hervorgeht. Da andererseits der aus wenigen ganz elementaren Ungleichungen bestehende Beweis jenes Satzes (s. S. 382/3) offensichtlich seine Gültigkeit behält, wenn die Voraussetzung des regulären Verhaltens durch diejenige der „gleichmäßigen" Differenzierbarkeit ersetzt wird, so ist damit der Anschluß an den *Cauchy-Riemann*schen Ausgangspunkt im wesentlichen erreicht und wird schließlich durch den Nachweis der Äquivalenz von „gleichmäßiger" und „stetiger" Differenzierbarkeit zur Vollendung gebracht [1])

Die beiden letzten Kapitel geben Anwendungen der vorangehenden allgemeinen Betrachtungen auf die Theorie der sogenannten elementaren Transzendenten und enthalten in dieser Hinsicht wohl alles wesentliche, was man sonst in den Lehrbüchern der algebraischen Analysis findet, mit dem Unterschiede, daß hier zielsichere allgemeine Methoden an die Stelle der dort zumeist benutzten verschiedenartigen Kunstgriffe treten. Insbesondere behandelt das sechste die eindeutigen Transzendenten dieser Kategorie, also die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen, das siebente zunächst die Umkehrung einer beliebigen Potenzreihe und daran anschließend die Umkehrungsfunktionen der ebengenannten, also in erster Linie den Logarithmus, sodann die zyklometrischen Funktionen nebst der allgemeinen Potenz.

Die gesamte Darstellung ist so gehalten, daß wohl jeder einigermaßen begabte Mathematikstudierende des dritten oder vierten Semesters im Stande sein dürfte, ihr mit Verständnis zu folgen (etwa einige wenige Paragraphen ausgenommen, deren vollständiges Verständnis späterer Lek-

---

1) Die von *Cauchy* in seinen späteren Arbeiten zwar behauptete, aber niemals bewiesene Überflüssigkeit der Voraussetzung eines *stetigen* Differentialquotienten hat erst durch den zweiten *Goursat*schen Beweis des *Cauchy*schen Integralsatzes (1900) ihre Bestätigung gefunden (Vgl die Anmerkung zu § 53, S. 611/2)

türe vorbehalten bleiben möge). Zur Orientierung über die erforderlichen Vorkenntnisse sei noch bemerkt, daß die verhältnismäßig zahlreichen Hinweise auf Band I dieser Vorlesungen sich zumeist auf recht elementare Dinge beziehen, über die man sich auch durch andere Lehrbücher leicht unterrichten kann, und daß keineswegs ein auch nur annähernd vollständiges Studium des ersten Bandes als Vorbedingung für das Verständnis des vorliegenden anzusehen ist. Bezüglich solcher Gegenstände, die in Band I überhaupt nicht behandelt sind, sei nur erwähnt, daß hier an zwei Stellen in ziemlich beiläufiger Art von der Auflösung eines Systems linearer Gleichungen durch Determinanten Gebrauch gemacht wird. Was schließlich von geometrischen Vorkenntnissen vorausgesetzt wird, beschränkt sich auf die ersten Anfangsgründe der elementaren und der analytischen Geometrie.

Den Schluß dieser Abteilung bildet ein Anhang, der aus Literaturnachweisen, Anmerkungen und Ergänzungen nebst einem ausführlichen alphabetischen Sachregister besteht.

Während diese Abteilung wohl als ein in sich geschlossenes Lehrbuch zur Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen gelten kann, wird die zweite einen mehr monographischen Charakter tragen und sich im wesentlichen mit der Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen beschäftigen

Bei der Korrektur haben mich die Herren Kollegen *Hartogs* und *Perron*, sowie Herr Dr. *von Pidoll*, letzterer auch durch die Vorarbeiten zum Sachregister, in liebenswürdigster Weise unterstützt und mir durch ihre kritischen Bemerkungen mannigfache Anregungen gegeben. Es gereicht mir zur besonderen Freude, ihnen an dieser Stelle meinen aufrichtigen Dank aussprechen zu können.

München, im Juni 1925.

Inhaltsverzeichnis.

Abschnitt I.

Grundlagen der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Kapitel I.

Reelle Veränderliche und Funktionen.

Seite

Kapitel II.

Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Kapitel III

Rationale Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Kapitel IV.

Potenzreihen.

Kapitel V
Begriff und allgemeine Eigenschaften der monogenen analytischen Funktion einer Veränderlichen.

Seite

Kapitel VI.

Die elementaren ganzen und gebrochenen transzendenten Funktionen.

Kapitel VII

Umkehrung von Potenzreihen und elementare Umkehrungsfunktionen.

Abschnitt I.

Grundlagen der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Kapitel I.

Reelle Veränderliche und Funktionen.

§ 1 Oberer und unterer Limes, obere und untere Grenze einer unendlichen Menge reeller Zahlen. — Häufungszahlen, abgeleitete Menge.

1. In den Vorlesungen über *Zahlenlehre*[1]) wurde bereits die *Existenz nicht abzählbarer* Zahlenmengen festgestellt (I_1, § 25, Nr. 7, S. 159), doch erstreckten sich die dort angestellten Untersuchungen im übrigen fast ausschließlich auf *abzählbare* Zahlenmengen Da andererseits die *Funktionenlehre* im wesentlichen von den Eigenschaften *nicht abzählbarer* Zahlenmengen handelt, so erscheint es vor allem erforderlich, gewisse auf die Grundbegriffe *Limes* und *Grenze* sich beziehende Existenzbeweise, die a. a. O. mit bestimmter Absicht (vgl. I_1, § 35, S. 210, Fußn. 1) auf *abzählbare* Zahlenmengen beschränkt wurden, auf *beliebige* unendliche Zahlenmengen auszudehnen.

2. Es werde mit $\{x'\}$ eine unendliche Menge *reeller* Zahlen, mit x' jedes einzelne Element dieser Menge bezeichnet. Dabei soll, sofern nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt wird, zugelassen werden, daß *mehrere, sogar unendlich viele* Elemente *dieselbe* Zahl vorstellen[2]) (wie dies auch bereits in der *Zahlenlehre* I_1, § 36, Nr. 5, S. 220 und insbesondere bei den als *Zahlenfolgen* bezeichneten abzählbaren Mengen angenommen wurde).

---

1) Die drei Abteilungen dieses ersten Bandes des vorliegenden Buches werden im folgenden als I_1—I_3 zitiert.

2) Entgegen der sonst in der „Mengenlehre" zumeist üblichen Terminologie, nach der man unter einer „Menge" eine Vereinigung *verschiedener* Elemente zu verstehen pflegt.

Eine solche Menge $\{x'\}$ soll *beschränkt* heißen, wenn es eine positive Zahl R (und folglich deren unendlich viele) gibt, derart, daß für jedes x' der Menge: $|x'| < R$; oder, was offenbar auf dasselbe hinausläuft, wenn es Zahlenpaare A, B gibt, derart, daß durchweg: $A < x' < B$. Besitzt die Menge nur die Eigenschaft, daß: $x' < B$ bzw. $x' > A$, so heißt sie *nach oben* bzw. *nach unten beschränkt*. Eine schlechthin *beschränkte* Menge ist als gleichzeitig *nach oben* und *nach unten* beschränkt — *vice versa*.

Satz I. *Jede beschränkte Menge $\{x'\}$ besitzt zwei (eventuell auch zusammenfallende) Hauptlimites, einen oberen L und einen unteren l, in Zeichen:*

$$\overline{\lim}\,\{x'\} = L, \qquad \underline{\lim}\,\{x'\} = l,$$

d. h. es existieren zwei (nicht notwendig zu den Zahlen x' gehörige und unter Umständen zusammenfallende) Zahlen L, l von solcher Beschaffenheit, daß bei beliebig kleinem $\delta > 0$ die Beziehungen bestehen:

$$(1)\begin{cases} L - \delta \leqq x' \leqq L + \delta & \textit{für unendlich viele (möglicherweise gleiche) } x', \\ x' > L + \delta & \textit{höchstens für eine endliche Anzahl;} \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} l - \delta \leqq x' \leqq l + \delta & \textit{für unendlich viele (möglicherweise gleiche) } x', \\ x' < l - \delta & \textit{höchstens für eine endliche Anzahl.} \end{cases}$$

Fallen L und l zusammen, so wird der gemeinsame Wert schlechthin als Limes der Menge $\{x'\}$, also: $\lim\{x'\}$, *bezeichnet.*

Beweis. Da alle x' zwischen endlichen Schranken liegen, so gibt es insbesondere zwei *ganze* Zahlen A, B, derart, daß durchweg:

$$A < x' < B.$$

Bildet man sodann aus dem Zahlenintervall $[A, B]$ die Teilintervalle:

$$[A, A+1],\ [A+1, A+2],\ \ldots,\ [B-1, B],$$[1]

so muß mindestens *ein* solches vorhanden sein, das *unendlich viele* (möglicherweise *dieselbe* Zahl vorstellende) x' enthält. Wir bezeichnen das *letzte* (eventuell das *einzige*) derartige Intervall mit:

$$[a, a+1]$$

und bilden daraus durch Halbierung die Teilintervalle:

$$\left[a, a+\frac{1}{2}\right], \quad \left[a+\frac{1}{2}, a+\frac{1+1}{2}\right].$$

---

1) Durch die Schreibweise $[a, b]$ bezeichnen wir allemal ein Zahlenintervall, d. h. die Menge aller reellen Zahlen von a bis b *einschließlich der Grenzen* a und b. Sollen diese letzteren oder eine derselben als ausgeschlossen gelten, so wird dies allemal ausdrücklich erwähnt werden

Eins dieser beiden, welches mit

$$\left[a + \frac{a_1}{2},\ a + \frac{a_1 + 1}{2}\right] \quad (\text{wo } a_1 = 0 \text{ oder } = 1)$$

bezeichnet werden möge, ist dann wieder das *letzte*, welches *unendlich viele* x' enthält. Durch weitere Halbierung ergeben sich daraus die Teilintervalle:

$$\left[a + \frac{a_1}{2},\ a + \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2^2}\right],\quad \left[a + \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2^2},\ a + \frac{a_1}{2} + \frac{1+1}{2^2}\right]$$

und es sei:

$$\left[a + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2},\ a + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2 + 1}{2^2}\right] \quad (\text{wo } a_2 = 0 \text{ oder } = 1)$$

wiederum das *letzte*, welches *unendlich viele* x' enthält. Durch νmalige Wiederholung dieses Verfahrens ergibt sich ein *letztes* unendlich viele x' enthaltendes Intervall von der Form:

$$\left(s_\nu,\ s_\nu + \frac{1}{2^\nu}\right),$$

wo:

$$s_\nu = a + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_\nu}{2^\nu}, \tag{3}$$

und jedes der Zeichen $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ eine bestimmte der beiden Zahlen 0 und 1 vorstellt.[1]) Es gelten dann für jedes noch so große ν die Beziehungen:

$$\begin{cases} s_\nu \leqq x' \leqq s_\nu + \frac{1}{2^\nu} & \text{für } \textit{unendlich viele } x', \\ x' > s_\nu + \frac{1}{2^\nu} & \text{höchstens für eine } \textit{endliche} \text{ Anzahl} \end{cases} \tag{4}$$

Setzt man jetzt:

$$\lim_{\nu \to \infty} s_\nu = L, \tag{5}$$

so läßt sich zeigen, daß die so definierte Zahl L in der Tat den oben unter (1) aufgestellten Behauptungen genügt Man hat zunächst für jedes ν:

$$s_\nu \leqq L \leqq s_\nu + \frac{1}{2^\nu}\ ^{2)} \quad .$$

1) Es ist also s_ν im Falle $a \geqq 0$ schlechthin ein *dyadischer* Bruch (eventuell die *Null*), im Falle $a < 0$ die Summe einer *negativen* ganzen Zahl und eines *positiven echten dyadischen* Bruches (eventuell der *Null*)

Selbstverständlich konnte man statt des Halbierungsprozesses auch eine jedesmalige Zerlegung in eine beliebige feste Anzahl b von Teilintervallen (z B. $b = 10$) vornehmen, was dann auf einen Systembruch mit der Basis b an Stelle des dyadischen führen würde.

2) Das zweite *Gleichheits*zeichen tritt dann und nur dann in Kraft, wenn von einem bestimmten ν ab durchweg $a_\nu = 1$, also der durch unbegrenzte Vergrößerung von ν entstehende unendliche dyadische Bruch die Periode 1 hat

Wird sodann $\delta > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so läßt sich ein n so fixieren, daß: $\delta \geqq \frac{1}{2^\nu}$ für $\nu \geqq n$ und daher:

$$L - \delta \leqq L - \frac{1}{2^\nu} \leqq s_\nu,$$

$$L + \delta \geqq L + \frac{1}{2^\nu} \geqq s_\nu + \frac{1}{2^\nu},$$

zusammengefaßt:

$$L - \delta \leqq s_\nu < s_\nu + \frac{1}{2^\nu} \leqq L + \delta. \tag{6}$$

Folglich bestehen nach (4) die Beziehungen:

$L - \delta \leqq x' \leqq L + \delta$ für *unendlich viele* x',

$x' > L + \delta$ höchstens für eine *endliche* Anzahl,

und es ergibt sich:

$$L = \overline{\lim} \{x'\}$$

im Sinne der Behauptung (1). Im übrigen ist leicht ersichtlich, daß es nur *eine* den Forderungen (1) genügende Zahl L gibt, da die gegenteilige Annahme auf einen Widerspruch führt

In analoger Weise findet sich der *untere* Limes l als Summe einer ganzen Zahl und eines unendlichen dyadischen Bruches, wenn man bei dem beschriebenen Verfahren jedesmal das *erste, unendlich viele* x' enthaltende Intervall für die weitere Fortsetzung des Teilungsprozesses heraushebt. (Oder auch, indem man mit Rücksicht auf die leicht ersichtliche Beziehung: $\underline{\lim} \{x'\} = - \overline{\lim} \{-x'\}$ das zuvor gewonnene Resultat auf die Zahlenmenge $\{-x'\}$ anwendet.)

Kommt bei dem beschriebenen Auswahlverfahren jedesmal nur ein *einziges*, also gleichzeitig *erstes* und *letztes* Intervall zum Vorschein, so fallen offenbar $\overline{\lim} \{x'\}$ und $\underline{\lim} \{x'\}$ in einen einzigen $\lim \{x'\}$ zusammen.

3. Satz 2. *Jede beschränkte Menge* $\{x'\}$, *die nicht aus einer einzigen beständig sich wiederholenden Zahl besteht, besitzt eine bestimmte obere Grenze* G *und untere Grenze* g, *in Zeichen:*

$$\overline{\mathfrak{G}}\{x'\} = G, \quad \underline{\mathfrak{G}}\{x'\} = g,$$

d. h es existieren zwei (allemal verschiedene) Zahlen G *und* g *von solcher Beschaffenheit, daß:*

$$g \leqq x' \leqq G \quad \text{für } alle\ x', \tag{7}$$

und daß entweder:

(8a) *mindestens ein* $x' = G$ (G *reales Maximum*)

(8b) *bzw.* „ „ $x' = g$ (g *reales Minimum*)

oder bei beliebig kleinem $\delta > 0$ *für unendlich viele* x' *eine Beziehung von*

der Form besteht:

(9a) $G - \delta < x' < G$ (*G ideales Maximum*)

(9b) *bzw.* $g < x' < g + \delta$ (*g ideales Minimum*)[1])

Im letzteren Falle fallt G mit dem oberen bzw. g mit dem unteren Limes von $\{x'\}$ *zusammen. Dies findet auch in dem durch Gl.* (8a) *bzw.* (8b) *gekennzeichneten Falle statt, wenn gleichzeitig auch die Ungleichung* (9a) *bzw.* (9b) *besteht.*[2])

In dem zunächst ausgeschlossenen Falle, daß die Menge $\{x'\}$ *aus einer einzigen beständig sich wiederholenden Zahl a besteht, hat man offenbar zu setzen:*

(9c) $$G = g = a.$$

Beweis. Gibt es unter den Zahlen x' eine (bzw mehrere einander gleiche) *größte* $x' = G$, so gilt selbstverständlich für *alle anderen* x' die Ungleichung:

$$x' < G.$$

Andererseits existiert nach Satz I in *jedem* Falle ein *oberer Limes* L, und es gelten die Beziehungen:

(10) $$\begin{cases} L - \delta \leqq x' \leqq L + \delta & \text{für } \textit{unendlich viele } x', \\ x' > L + \delta & \text{höchstens für eine } \textit{endliche} \text{ Anzahl.} \end{cases}$$

Gibt es nun aber unter den Zahlen x' *keine größte* (bzw. keine größten), so läßt sich zeigen, daß dann überhaupt *kein* $x' > L$ existieren kann. Denn wäre ein solches, etwa $x_1' > L$ vorhanden, so hätte man nach Annahme eines *positiven* $\delta < x_1' - L$:

$$x_1' > L + \delta$$

Da aber *höchstens* für eine *endliche* Anzahl von Zahlen x' eine Beziehung von der Form $x' > L + \delta$ bestehen könnte, so gäbe es unter diesen eine *größte*, was der Voraussetzung widerspricht. Da aus dem gleichen Grunde auch die Möglichkeit $x' = L$ in dem vorliegenden Falle ausgeschlossen ist, so treten an die Stelle der Ungleichungen (10) die folgenden:

(11) $$\begin{cases} x' < L & \text{für } \textit{alle } x', \\ L - \delta \leqq x' < L & \text{für } \textit{unendlich viele } x', \end{cases}$$

und man findet somit: $\overline{\mathfrak{G}}\{x'\} = L$ als *ideales* Maximum.

---

1) Wegen dieser Bezeichnung vgl I_1, § 35, Nr 1, S 209

2) Beispiel. Besteht die Zahlenmenge $\{x'\}$ aus allen *rationalen* Zahlen des Intervalls [0, 1], so ist 1 gleichzeitig *reales Maximum* und *oberer Limes*; ebenso 0 *reales Minimum* und *unterer Limes* Besteht dagegen die Menge $\{x'\}$ aus allen *irrationalen* Zahlen des nämlichen Intervalls [0, 1], so gibt es weder ein reales Maximum noch reales Minimum Vielmehr ist alsdann 1 zugleich *oberer Limes* und *ideales Maximum*, 0 *unterer Limes* und *ideales Minimum*

Kommt dagegen L unter den Zahlen x' vor, während *kein* $x' > L$, so ist der *obere Limes* zugleich *reales* Maximum.

Analog läßt sich der entsprechende Beweis für die *untere* Grenze führen (oder auch kürzer durch Anwendung des eben gefundenen Resultats auf die Zahlenmenge $\{-x'\}$ und Benützung der leicht ersichtlichen Beziehung $\mathfrak{G}\{x'\} = -\mathfrak{G}\{-x'\}$).

4. Ist die Menge $\{x'\}$ *nur nach unten beschränkt,* also *nach oben unbeschränkt,* so müssen, *wie groß* man auch eine positive Zahl R annehmen möge, immer Zahlen $x' > R$ vorhanden sein. Wir sagen alsdann, der *obere Limes* der Menge $\{x'\}$ sei *positiv unendlich* und, da in diesem Falle *kein größtes* x' existiert, in Übereinstimmung mit der zuvor geschaffenen Terminologie, auch die *obere Grenze* der Menge $\{x'\}$ sei *positiv unendlich,* in Zeichen:

$$\overline{\lim}\,\{x'\} = +\infty, \quad \overline{\mathfrak{G}}\,\{x'\} = +\infty. \tag{12}$$

Findet man sodann, wie in Nr. 2 beim Beweise von Satz I bei einer ganzzahligen unteren Schranke A beginnend ein *erstes* Intervall $(a, a+1)$, welches unendlich viele x' enthält, so resultiert auf Grund des zuvor beschriebenen Teilungs- und Auswahlverfahrens eine bestimmte Zahl l als *unterer Limes,* so daß also zu den Beziehungen (12) die folgende hinzutritt:

$$\underline{\lim}\,\{x'\} = l. \tag{13}$$

Dieser untere Limes *kann* dann auch zugleich *untere Grenze* sein. Wenn *nicht,* so muß die Menge $\{x'\}$ ein *reales Minimum* besitzen.[1]) Dieser Fall tritt insbesondere auch dann ein, wenn *jedes noch so große* mit einer unteren Schranke der Menge $\{x'\}$ beginnende Intervall nur eine *endliche* Anzahl von Zahlen x' enthält. Alsdann existiert also *kein endlicher unterer Limes,* vielmehr rückt in diesem Falle der *untere* Limes gleichzeitig mit dem *oberen* ins *Unendliche,* so daß also die *beiden Hauptlimites* in den *einen* $\lim\{x'\} = +\infty$ zusammenfallen.

Analoge Beziehungen ergeben sich für den Fall einer *nur nach oben beschränkten* Menge $\{x'\}$, d. h man hat in diesem Falle:

$$\underline{\lim}\,\{x'\} = -\infty, \quad \underline{\mathfrak{G}}\,\{x'\} = -\infty \text{ (negativ unendlich)}, \tag{14}$$

während die *obere Grenze* dann allemal *endlich* ist, der *obere Limes* entweder *endlich* ausfallen oder nach $-\infty$ heruntersinken kann (so daß dann also: $\lim\{x'\} = -\infty$).

Ist schließlich die Menge $\{x'\}$ *nach beiden Seiten unbeschränkt,* so folgt:

$$\overline{\lim}\,\{x'\} = \overline{\mathfrak{G}}\,\{x'\} = +\infty, \quad \underline{\lim}\,\{x'\} = \underline{\mathfrak{G}}\,\{x'\} = -\infty. \tag{15}$$

1) Dasselbe muß dann offenbar *unterhalb* l liegen.

5. Bezeichnet man analog wie bei abzählbaren Mengen (vgl. I_1, § 36, Nr. 5, S. 220) als *Häufungszahl* der Menge $\{x'\}$ jede Zahl a von der Beschaffenheit, daß unendlich viele x' der Bedingung genügen: $|a - x'| < \varepsilon$[1]), und zwar gleichgültig, ob a der Menge $\{x'\}$ angehört oder nicht, so erkennt man zunächst, daß der *obere* und *untere Limes* (bzw. der *Limes* schlechthin) einer *beschränkten* Menge unter diesen Begriff fallen, so daß durch deren Existenz bereits diejenige mindestens einer (endlichen) *Häufungszahl* für jede *beschränkte* unendliche Menge erwiesen ist.[2]) Die Menge $\{x'\}$ kann dann noch beliebig viele andere Häufungszahlen haben, es kann sogar *jede* Zahl des Intervalls $[\underline{\mathfrak{G}}(x'), \overline{\mathfrak{G}}(x')]$ eine Häufungszahl sein. Dies zeigte sich schon bei *abzählbaren* Mengen (vgl. I_1, § 35, Nr 6, S. 221/3), gilt also *a fortiori* für *nicht abzählbare* Mengen (Beispiel: Die Menge aller *irrationalen* oder auch nur aller *transzendenten* Zahlen des Intervalls [0, 1]: vgl. I_1, § 25, Nr. 5—8, S. 157/160).

Ist die Menge *höchstens einseitig beschränkt*, also: $\overline{\lim}\,\{x'\} = +\infty$ bzw. $\underline{\lim}\,\{x'\} = -\infty$ oder auch: $\lim\,\{x'\} = +\infty$ bzw. $= -\infty$, so sagt man nach Analogie der für den Fall *endlicher* Hauptlimites bestehenden Ausdruckweise, die Menge $\{x'\}$ habe die *Häufungszahl* $+\infty$ bzw. $-\infty$.

Die Menge der *Häufungszahlen* einer unendlichen Zahlenmenge $\{x'\}$ heißt deren *abgeleitete Menge* oder *Ableitung*. Die Menge $\{x'\}$ selbst heißt *abgeschlossen*, wenn ihre *Ableitung* in ihr enthalten ist, wenn also jede ihrer *Häufungszahlen* zu den Zahlen x' gehört. Die Menge heißt *in sich dicht*, wenn *jede* der Zahlen x' eine Häufungszahl ist; *perfekt*, wenn sie zugleich *abgeschlossen* ist, also *alle* ihre Häufungszahlen enthält und daher mit ihrer Ableitung identisch ist. (Beispiel: Die Menge *aller Irrationalzahlen* des Intervalls [0, 1] ist *in sich dicht*, aber *nicht abgeschlossen*, also *nicht perfekt*. Sie gewinnt diese Eigenschaft erst, wenn man sie zur Menge *aller Zahlen* des Intervalls [0, 1] ergänzt.) Die Menge heißt in einem Intervall $[a, b]$ *überall dicht*, wenn zwischen irgend zwei Zahlen dieses Intervalls sich allemal Zahlen der Menge befinden. Dagegen heißt eine der Menge angehörige Zahl x_0' *isoliert*, wenn in einem gewissen Intervall $(x_0' - \delta, x_0' + \delta)$

1) Danach gilt also a insbesondere dann als *Häufungszahl*, wenn *unendlich viele* $x' = a$ sind.

2) Man kann auch umgekehrt, wie hier geschehen, den Begriff der *Häufungszahl* zum Ausgangspunkte nehmen und zunächst, falls man sich nicht auf den für *abzählbare* Mengen bereits geführten, also für *nicht abzählbare* Mengen *a fortiori* gültigen Existenzbeweis (s. I_1, a. a. O.) stützen will, die Existenz mindestens *einer* endlichen *Häufungszahl* für jede beschränkte unendliche Menge in ähnlicher Art, wie diejenige des *oberen Limes* beweisen. Der *obere* (bzw. *untere*) *Limes* erscheint in diesem Zusammenhange als *obere* (bzw. *untere*) *Grenze* der *Häufungszahlen*, die dann allemal selbst eine *Häufungszahl*, also ein *reales Maximum* (bzw. *Minimum*) für die Menge der Häufungszahlen sein muß.

keine weitere Zahl x' liegt. Die Menge selbst heißt *isoliert*, wenn sie ausschließlich aus *isolierten* Zahlen besteht. (Beispiel: Die Menge $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{\nu}, \ldots$ ist *isoliert*, da zwischen $\frac{1}{\nu+1}$ und $\frac{1}{\nu}$, ebenso zwischen $\frac{1}{\nu}$ und $\frac{1}{\nu-1}$, also im Intervall $\left[\frac{1}{\nu} - \delta, \frac{1}{\nu} + \delta\right]$, falls $\delta < \frac{1}{\nu+1}$, *keine* weitere Zahl der Menge liegt.)

§ 2. Streckenmessung.

1. Während wir es für zweckmäßig hielten, die *Zahlenlehre* zur Fernhaltung unzulänglich fundierter geometrischer Suggestionen zunächst ohne jede Bezugnahme auf Geometrie zu begründen und auszubauen, so erweist es sich für den Aufbau und das Verständnis der *Funktionenlehre* als außerordentlich förderlich, unter Beibehaltung der *arithmetischen* Grundlage aller Beweise die geometrische *Anschauung* und insbesondere eine daran anknüpfende durch Kürze und Übersichtlichkeit sich auszeichnende *Ausdrucksweise* nach Bedarf auszunützen.

Wir nehmen die geometrischen Grundbegriffe *Punkt*, *Gerade* und *Ebene* als etwas Gegebenes an: als *Idealvorstellungen*, die der räumlichen *Anschauung* entnommen und durch *Axiome* fest umschrieben sind. Die Möglichkeit, *arithmetische* Beziehungen in *geometrische* zu übersetzen und umgekehrt, beruht dann in letzter Linie auf der *Streckenmessung*, d. h. auf der Verwendung der positiven reellen *Zahlen* als *Maßzahlen* von „*Strecken*". Dabei gehen wir von folgenden *Definitionen* aus:

A. Unter einer *Strecke* verstehen wir ein *begrenztes* Stück einer *geraden* Linie. Nennt man A und B die *Endpunkte* der *Strecke*, so soll diese selbst mit $\overline{AB}$ bezeichnet werden.

B. *Zwei Strecken* $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ heißen einander *gleich*, wenn sie *kongruent* sind, d. h. durch Aufeinanderlegen zur Deckung gebracht werden können Wir schreiben in diesem Falle:

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}.$$

Von zwei *ungleichen Strecken* $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ heißt die erstere die *kleinere*, wenn sie einer *Teilstrecke* der anderen *gleich* ist; die letztere heißt dann die *größere*. In Zeichen:

$$\overline{AB} < \overline{A'B'} \quad \text{oder auch:} \quad \overline{A'B'} > \overline{AB}.$$

C. Unter der *Summe zweier Strecken* $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ verstehen wir diejenige Strecke, welche durch Verlängerung der einen Strecke um eine der anderen gleiche entsteht. Aus dieser Definition läßt sich rekursorisch diejenige für die *Summe beliebig vieler Strecken* herleiten. Dabei erscheint

es schon für die Summe *zweier* Strecken wesentlich nachzuweisen, daß das Endresultat von der Anordnung der einzelnen „Summanden" unabhängig, die fragliche Operation also *kommutativ* ist. Dies kann in der Weise geschehen, daß man zunächst die Richtigkeit der Beziehung:

$$\overline{AB} + \overline{A'B'} = \overline{A'B'} + \overline{AB}$$

der Anschauung entnimmt (indem man die eine der beiden etwa horizontal zu denkenden Streckensummen um einen Winkel von 180^0 dreht und mit der anderen zur Deckung bringt), sodann analog wie bei der Addition der natürlichen Zahlen (vgl. I_1, § 3, Nr. 6, S. 22/4) durch vollständige Induktion das betreffende Ergebnis auf eine beliebige Anzahl von Summanden überträgt. Ein anderer Weg wird sich weiter unten noch ergeben (s. Nr. 6 am Ende).

2. Um Strecken *messen* und auf Grund der Messung miteinander *vergleichen* zu können, bedarf es zunächst der Festsetzung einer *Maßeinheit.* Um die Anschauung zu fixieren, denken wir uns einen von irgendeinem Anfangspunkte 0 (dem „Nullpunkt") horizontal sich unbegrenzt nach rechts erstreckenden Halbstrahl und wählen eine Teilstrecke $\mathfrak{E} \equiv \overline{OE}$ als *Einheitsstrecke* beliebig aus. Ihr ordnen wir also die *Maßzahl* 1 zu und gehen sodann darauf aus, *jeder* Strecke eine bestimmte positive Zahl als *Maßzahl* auf Grund der folgenden zwei Festsetzungen zuzuordnen.

I. *Gleichen Strecken kommt dieselbe Maßzahl zu.*

II. *Die Maßzahl einer Streckensumme soll gleich sein der Summe der Maßzahlen für die summierten Strecken.*

Es wird sich zeigen, daß auf Grund dieser Festsetzungen *jeder* Strecke *eine* und *nur* eine positive Zahl als *Maßzahl* zukommt.

Zunächst folgt, sofern die obigen Forderungen überhaupt erfüllbar sind, aus II:

III. Der *größeren zweier Strecken* kommt auch die *größere Maßzahl* zu, der *kleineren* die *kleinere,* und umgekehrt gehört zu der *größeren Maßzahl* auch die *größere Strecke,* zu der *kleineren* die *kleinere,* schließlich also zu *gleichen Maßzahlen* auch *gleiche Strecken.*

Wird jetzt nach Annahme einer natürlichen Zahl m auf jener Geraden vom Punkte O anfangend die Einheitsstrecke $\mathfrak{E}$ $m$mal abgetragen, so entsteht eine etwa mit $\overline{OM}$ zu bezeichnende Strecke, welcher auf Grund der Festsetzung II die *Maßzahl* m zuzuordnen ist, was wir durch die Schreibweise ausdrücken wollen:

(1) $$\overline{OM} = \overset{1}{\mathfrak{E}} + \overset{2}{\mathfrak{E}} + \cdots + \overset{m}{\mathfrak{E}} = m\mathfrak{E}.[1]$$

1) Dabei ist $m\mathfrak{E}$ als eine „benannte Zahl", *nicht* etwa als ein „Produkt" der beiden „Faktoren" m und $\mathfrak{E}$ anzusehen

Zerlegt man andererseits die Einheitsstrecke $\mathfrak{E}$ in eine beliebige Anzahl — etwa n — gleicher Teilstrecken (was bekanntlich mit Hilfe einer einfachen geometrischen Konstruktion ausführbar ist), so müssen die nach I einander *gleich* zu setzenden *Maßzahlen* dieser Teilstrecken nach II die Summe 1 liefern, so daß also jeder *einzelnen* dieser *Maßzahlen* der Wert $\frac{1}{n}$ beizulegen ist und demgemäß jede der betreffenden Teilstrecken mit $\frac{1}{n}\mathfrak{E}$ bezeichnet werden mag.[1])

Faßt man sodann m solche Teilstrecken $\frac{1}{n}\mathfrak{E}$ zu einer einzigen Strecke OA zusammen, so kommt dieser wiederum nach II die Summe der m gleichen Maßzahlen $\frac{1}{n}$, also die Zahl $\frac{m}{n}$ als *Maßzahl* zu, in Zeichen:

$$(2) \qquad \overline{OA} = \frac{m}{n}\mathfrak{E} = \nu\mathfrak{E}, \text{ wo: } \nu = \frac{m}{n} \text{ eine } \textit{rationale} \text{ Zahl.}$$

Man erkennt leicht, daß diese Maßzahl in Wahrheit lediglich von der *rationalen* Zahl ν, nicht aber von den einzelnen zur Darstellung benützten *ganzen* Zahlen m und n abhängt. Denn nimmt man etwa m und n als *relativ prim* an und ersetzt $\nu = \frac{m}{n}$ durch: $\nu = \frac{mq}{nq}$ (wo q eine natürliche Zahl), so würde nach dem Gesagten die Maßzahl $\frac{mq}{nq}$ zu derjenigen Strecke gehören, welche entsteht, wenn man die Einheitsstrecke in nq gleiche Teilstrecken zerlegt und mq solche Teilstrecken zu einer einzigen Strecke vereinigt. Diese letztere muß aber der zuvor gewonnenen gleich sein. Denn, faßt man zunächst q jener Teilstrecken zusammen, so resultiert eine Strecke mit der Maßzahl $q \cdot \frac{1}{nq}$, also $\frac{1}{n}$, so daß durch weitere Zusammenfassung von m Strecken dieser Art wieder eine Strecke mit der Maßzahl $\frac{m}{n}$, also nach III eine der oben genannten *gleiche* zum Vorschein kommt

Da die zuvor mit m, n bezeichneten natürlichen Zahlen ganz beliebig gewählt werden können, so gibt es zu *jeder positiven rationalen Zahl* ν auch eine *Strecke* mit der Maßzahl ν (bzw. deren unendlich viele mit jener einen *kongruente*), die wir, wie bereits oben in Gl. (2) geschehen, mit $\nu\mathfrak{E}$ bezeichnen.

Hat man nun *zwei* solche *rationale* Strecken, etwa:

$$(3) \qquad \overline{OA} = \frac{m}{n}\mathfrak{E}, \quad \overline{OA'} = \frac{m'}{n'}\mathfrak{E}$$

und bringt sie auf die Form:

$$(4) \qquad \overline{OA} = mn'\left(\frac{1}{nn'}\mathfrak{E}\right), \quad \overline{OA'} = m'n\left(\frac{1}{nn'}\mathfrak{E}\right),$$

1) Vgl die vorige Fußnote

so zeigt sich, daß $\overline{OA}$ und $\overline{OA'}$ als gemeinsame Vielfache der Strecke $\frac{1}{nn'}\mathfrak{E}$ darstellbar sind. Sie besitzen also mindestens[1]) *das gemeinsame Maß* $\frac{1}{nn'}\mathfrak{E}$ und heißen deshalb *kommensurabel.*

Rationale Strecken sind also mit der Einheitsstrecke und unter sich kommensurabel.

Definiert man ferner im Anschluß an Gl. (4) das *Verhältnis* der Strecken $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$ durch die Beziehung:

$$\overline{OA} : \overline{OA'} = mn' : m'n$$

$$(5) \qquad = \frac{m}{n} : \frac{m'}{n'},$$

so folgt: *Rationale Strecken verhalten sich wie ihre Maßzahlen.*

Des weiteren ergibt sich aus (4):

$$(nn')\overline{OA} = (mn')\mathfrak{E}, \quad (nn')\overline{OA'} = (m'n)\mathfrak{E}$$

und daher

$$(6) \qquad \overline{OA} + \overline{OA'} = \frac{mn' + m'n}{nn'}\mathfrak{E} = \left(\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}\right)\mathfrak{E},$$

d. h. *die Maßzahl der Summe zweier rationaler Strecken ist* (in Übereinstimmung mit der Forderung II) *gleich der Summe ihrer Maßzahlen.*

3. Es gibt aber auch *Strecken,* denen nachweislich *keine rationale* Maßzahl zukommt. Das einfachste, schon *Euklid* bekannte Beispiel einer solchen Strecke gewinnt man in folgender Weise. Es sei ABC ein bei A rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit den Katheten $\overline{AB} = \overline{AC} = \mathfrak{E}$. Wird von A aus eine Senkrechte AD auf die Hypotenuse gefällt, so entstehen zwei dem ursprünglichen *ähnliche* Dreiecke und man findet daher unter der Annahme, daß $\overline{BC}$, also auch $\overline{BD}$ eine *rationale* Maßzahl besitzt[2]):

$$\overline{AB} : \overline{BD} = \overline{BC} : \overline{AB}.$$

---

1) Dieses „mindestens" soll ausdrücken, daß es eventuell ein *größeres* gemeinsames Maß geben kann, wenn nämlich n und n' einen gemeinsamen Teiler besitzen, in welchem Falle dann nn' durch das kleinste gemeinsame Multiplum von n und n' ersetzt werden kann.

2) Wir vermeiden absichtlich den scheinbar etwas näher liegenden Weg über den *Pythagoräi*schen Lehrsatz:

Quadrat über BC = Zweifaches des Quadrats über AB,

da die Anwendung dieser Aussage auf den vorliegenden Zweck einen Exkurs über *Flächenmessung* erfordern, also in Wahrheit einen *Umweg* bedeuten würde.

Bezeichnet man die eine mit x, also die andere mit $\frac{x}{2}$, so würde aus der obigen Proportion mit Benützung der Beziehung (5) folgen:

$$1 : \frac{x}{2} = x : 1,$$

also:

$$x^2 = 2, \tag{7}$$

eine Gleichung, welche durch *kein rationales* x befriedigt wird.[1])

Die Strecke $\overline{BC}$ (also die Diagonale des Quadrats mit der Seite $\mathfrak{E}$) besitzt somit *keine rationale* Maßzahl. Da sodann auf Grund der Festsetzung II auch *kein aliquoter Teil* und *kein ganzes Vielfaches* von $\overline{BC}$ eine *rationale* Maßzahl haben kann, so zeigt sich, daß schon die Existenz jener *einen* äußerst speziellen *nicht-rationalen* Strecke diejenige *unendlich vieler* gleichgearteter nach sich zieht, darunter insbesondere solche, die sich untereinander beliebig wenig unterscheiden.

Es liegt offenbar nahe, der fraglichen Strecke im Anschluß an die Beziehung (7) die *irrationale* Maßzahl $\sqrt{2}$ beizulegen Es soll nun gezeigt werden, in welcher Weise dies vollkommen zu rechtfertigen bzw. entsprechend zu verallgemeinern ist

4. Es bedeute jetzt $\overline{OP}$ eine Teilstrecke der in Nr. 2 unseren Betrachtungen zugrunde gelegten Geraden, die beliebig weit über die Einheitsstrecke hinausragt. Dann besagt zunächst das sogenannte *Archimedische Axiom*, daß man von O beginnend durch Aneinanderreihung einer hinlänglichen Anzahl von Einheitsstrecken schließlich dazu gelangen muß, die Strecke $\overline{OP}$ zu erreichen bzw. zu übertreffen. Schließt man den ersteren, eine Beziehung von der Form $\overline{OP} = m\mathfrak{E}$ ergebenden Fall als bereits erledigt von der weiteren Betrachtung aus, so muß eine Strecke $\overline{OM} = m\mathfrak{E}$ existieren, derart daß:

$$m\mathfrak{E} < \overline{OP} < (m+1)\mathfrak{E}. \tag{8}$$

1) Vgl. I_1, § 21, Nr. 1 (S 121). Oder auch nach dem Vorgange von *Euklid* folgendermaßen· Angenommen, man hätte

$$x = \frac{p}{q},$$

wo p und q als relativ prim vorausgesetzt werden können, so würde aus Gl. (7) folgen:

$$p^2 = 2q^2,$$

sodaß p jedenfalls *gerade* sein müßte, etwa $p = 2t$ und daher.

$$2t^2 = q^2,$$

d. h q gleichfalls *gerade*, was der Voraussetzung widerspricht.

Die Maßzahl von $\overline{OP}$ setzt sich dann auf Grund der Festsetzung II zusammen aus der natürlichen Zahl m und der noch zu bestimmenden Maßzahl der Strecke $\overline{MP}$ bzw. einer damit *kongruenten* Strecke $\overline{OA} < \overline{OE}$. Es besteht dann zunächst die Möglichkeit, daß für irgendein bestimmtes ganzzahliges n:

$$\overline{OA} = \frac{a_n}{n},$$

wo auch a_n eine (positive) ganze Zahl bedeutet. Wird auch dieser Fall als bereits erledigt ausgeschlossen, so muß zu jedem ganzzahligen $\nu \geqq 2$ eine ganze Zahl $a_\nu < \nu$ existieren[1]) derart, daß:

$$\frac{a_\nu}{\nu}\mathfrak{E} < \overline{OA} < \frac{a_\nu + 1}{\nu}\mathfrak{E} \tag{9}$$

und daher, wenn die der Strecke $\overline{OA}$ zuzuordnende Maßzahl vorläufig mit x bezeichnet wird:

$$\frac{a_\nu}{\nu} < x < \frac{a_\nu + 1}{\nu} \qquad (\nu = 2, 3, 4, \ldots). \tag{10a}$$

Da sodann für jedes $\varrho = 1, 2, 3, \ldots$ auch:

$$\frac{a_{\nu+\varrho}}{\nu+\varrho} < x < \frac{a_{\nu+\varrho} + 1}{\nu+\varrho}, \tag{10b}$$

so ergibt sich, wenn man die äußeren Glieder dieser beiden doppelten Ungleichungen kreuzweise kombiniert:

$$\frac{a_\nu}{\nu} < \frac{a_{\nu+\varrho} + 1}{\nu+\varrho}, \quad \text{also:} \quad \frac{a_{\nu+\varrho}}{\nu+\varrho} - \frac{a_\nu}{\nu} > -\frac{1}{\nu+\varrho}$$

$$\frac{a_{\nu+\varrho}}{\nu+\varrho} < \frac{a_\nu + 1}{\nu}, \quad \text{also:} \quad \frac{a_{\nu+\varrho}}{\nu+\varrho} - \frac{a_\nu}{\nu} < \frac{1}{\nu}$$

und somit (für jedes $\varrho = 1, 2, 3, \ldots$) schließlich:

$$\left| \frac{a_{\nu+\varrho}}{\nu+\varrho} - \frac{a_\nu}{\nu} \right| < \frac{1}{\nu} \tag{11}$$

d. h. die Zahlenfolge $\left(\frac{a_\nu}{\nu}\right)$ ist eine *konvergente*, besitzt also einen bestimmten (positiven) Grenzwert, etwa:

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{a_\nu}{\nu} = a. \tag{12}$$

---

1) Für eine Anzahl von Anfangswerten ν kann $a_\nu = 0$ sein, doch muß von einer gewissen Stelle ab jedenfalls $a_\nu > 0$ ausfallen, da zwischen den Punkten O und A die Endpunkte unendlich vieler *rationaler* Strecken liegen Aus analogem Grunde muß von einer gewissen Stelle ab $\frac{a_\nu + 1}{\nu} < 1$ ausfallen, während für eine gewisse Anzahl von Anfangswerten $\frac{a_\nu + 1}{\nu} = 1$ sein kann.

Es gibt also *eine* und *nur* eine bestimmte Zahl $x = a$, welche für jedes $\nu \geq 2$ der doppelten Ungleichung (10a) genügt. Diese Zahl muß eine *irrationale* sein. Wäre sie nämlich *rational*, etwa $a = \frac{m}{n}$, so müßte ja bei dem zugrunde liegenden Verfahren für $\nu = n$ an Stelle der *Un*gleichung (10a), nämlich:

$$\frac{a_n}{n} < x < \frac{a_n + 1}{n},$$

die *Gleichung*:

$$x = \frac{m}{n}$$

und somit an Stelle von (9) die folgende:

$$OA = \frac{m}{n}\mathfrak{E}$$

erscheinen, was der Voraussetzung widerspricht.

Diese einzige der unbegrenzten Folge der Ungleichungen (10a) genügende, *irrationale* Zahl $x = a$ ordnen wir der Strecke OA als *Maßzahl* zu, bezeichnen sie demgemäß als *irrationale Strecken* und schreiben analog wie in (1) und (2):

$$OA = a\mathfrak{E}. \tag{13}$$

Die Vergleichung der Ungleichungen (9) und (10a) zeigt, daß durch diese Festsetzung der oben mit I bezeichneten Forderung genügt wird

5. Es verdient bemerkt zu werden, daß zwar die Intervalle $\left[\frac{a_\nu}{\nu}, \frac{a_\nu + 1}{\nu}\right]$, welche sämtlich die Zahl $x = a$ im Innern enthalten, mit wachsendem ν *beständig kleiner* $\left(\text{nämlich gleich } \frac{1}{\nu}\right)$ werden, daß aber *keineswegs* das Intervall $\left[\frac{a_{\nu+1}}{\nu+1}, \frac{a_{\nu+1}+1}{\nu+1}\right]$ in das *Innere* von $\left[\frac{a_\nu}{\nu}, \frac{a_\nu + 1}{\nu}\right]$ fällt, vielmehr stets auf der einen oder anderen Seite *darüber hinausragt*; mit anderen Worten, daß *keineswegs* die Folge $\left(\frac{a_\nu}{\nu}\right)$ eine *monoton zunehmende*, die Folge $\left(\frac{a_\nu + 1}{\nu}\right)$ eine *monoton abnehmende* ist. Es läßt sich nämlich zeigen, daß zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab das Intervall $\left[\frac{a_\nu}{\nu}, \frac{a_\nu + 1}{\nu}\right]$ nur einen *einzigen* Bruch mit dem Nenner $\nu + 1$ und zwar den Bruch $\frac{a_\nu + 1}{\nu + 1}$ im *Innern* enthält. Man hat zunächst wegen $\frac{a_\nu}{\nu} < 1$:

$$\frac{a_\nu}{\nu} = \frac{a_\nu\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)}{\nu + 1} < \frac{a_\nu + 1}{\nu + 1} < \frac{a_\nu + 1}{\nu},$$

andererseits, da zum mindesten von einer gewissen Stelle ab auch

$\frac{a_\nu + 1}{\nu} < 1$[1]):

$$\frac{a_\nu + 1}{\nu} = \frac{(a_\nu + 1)\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)}{\nu + 1} = \frac{a_\nu + 1 + \frac{a_\nu + 1}{\nu}}{\nu + 1} < \frac{a_\nu + 2}{\nu + 1},$$

so daß also, wenn man noch den Bruch $\frac{a_\nu}{\nu + 1}$ in die Betrachtung aufnimmt, die folgende Reihenfolge besteht:

$$(14) \qquad \frac{a_\nu}{\nu + 1} < \frac{a_\nu}{\nu} < \frac{a_\nu + 1}{\nu + 1} < \frac{a_\nu + 1}{\nu} < \frac{a_\nu + 2}{\nu + 1}.$$

Man hat daher zu setzen: $a_{\nu+1} = a_\nu$, wenn $x < \frac{a_\nu + 1}{\nu + 1}$,

dagegen: $a_{\nu+1} = a_\nu + 1$, wenn $x > \frac{a_\nu + 1}{\nu + 1}$.

In jedem Falle aber muß, wie oben behauptet wurde, das Intervall $\left[\frac{a_{\nu+1}}{\nu + 1}, \frac{a_{\nu+1} + 1}{\nu + 1}\right]$ auf der einen oder anderen Seite über das Intervall $\left[\frac{a_\nu}{\nu}, \frac{a_\nu + 1}{\nu}\right]$ *hinausragen.*

Es lassen sich aber leicht auch *monotone* Folgen rationaler Zahlen $\left(\frac{a_{m_\nu}}{m_\nu}\right)$, $\left(\frac{a_{m_\nu} + 1}{m_\nu}\right)$ herstellen, welche auf der einen Seite beständig *zunehmend,* auf der anderen beständig *abnehmend* dem zuvor mit $x = a$ bezeichneten Grenzwerte zustreben, so daß also die Intervalle $\left[\frac{a_{m_\nu}}{m_\nu}, \frac{a_{m_\nu} + 1}{m_\nu}\right]$ eine Folge *ineinander geschachtelter* Intervalle von unbegrenzt abnehmender Ausdehnung bilden. Es geschieht dies am einfachsten mit Hilfe von Systembrüchen einer beliebigen Basis $b \geqq 2$. Läßt man auch hier wieder den Fall einer *rationalen* Maßzahl a als belanglos beiseite[2]), so ergibt sich zunächst ein unbegrenztes Ungleichungssystem von der Form:

$$(15) \qquad s_\mu \mathfrak{E} < OA < \left(s_\mu + \frac{1}{b^\mu}\right)\mathfrak{E} \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wenn gesetzt wird:

$$(15\text{a}) \qquad s_\mu = \frac{c_1}{b} + \frac{c_2}{b^2} + \cdots + \frac{c_\mu}{b^\mu}$$

(unter $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ „Ziffern" des b-Systems, d. h. Zahlen des Intervalls $[0, b - 1]$ verstanden), und daraus folgt, wenn die unbekannte Maßzahl

1) Vgl. S 13, Fußn. 3)

2) Man erhält in diesem Falle einen *endlichen* Systembruch nur dann, wenn a als reduzierter Bruch im Nenner keine anderen Primfaktoren enthält, als b. Andernfalls resultiert ein zwar *unendlicher,* aber *periodischer* Systembruch. (Vgl I_1, § 17, S. 98 ff..)

von $\overline{OA}$ vorläufig wieder mit x bezeichnet wird:

$$(16) \qquad s_\mu < x < s_\mu + \frac{1}{b^\mu},$$

anders geschrieben:

$$(17) \qquad \frac{g_\mu}{b^\mu} < x < \frac{g_\mu + 1}{b^\mu}, \quad \text{wo:} \quad g_\mu = c_1 b^{\mu-1} + c_2 b^{\mu-2} + \cdots + c_\mu.$$

Die Vergleichung der Ungleichung (17) mit der zuvor zur Bestimmung von x benutzten Ungleichung (10a) zeigt, daß die Folgen $\left(\frac{g_\mu}{b^\mu}\right)$, $\left(\frac{g_\mu + 1}{b^\mu}\right)$ lediglich aus den zuvor betrachteten $\left(\frac{a_\nu}{\nu}\right)$, $\left(\frac{a_\nu + 1}{\nu}\right)$ *herausgehobene* sind[1]) (nämlich für die Spezialwerte $\nu = b^\mu$), und daraus wird evident, daß sie bei ganz beliebiger Wahl der Basis b immer wieder *denselben* (*irrationalen*) *Grenzwert:*

$$(18) \qquad \lim_{\mu \to \infty} \frac{g_\mu}{b^\mu} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{a_\nu}{\nu} = a$$

liefern müssen.

6. Bezeichnet man mit $\overline{OA_1}$, $\overline{OA_2}$, ..., $\overline{OA_\mu}$, ... die Strecken mit den rationalen Maßzahlen $s_1, s_2, \ldots, s_\mu, \ldots$, so bringt die Beziehung:

$$\overline{OA} = a\mathfrak{E}, \quad \text{wo} \quad a = \lim_{\mu \to \infty}\left(\frac{c_1}{b} + \frac{c_2}{b_2} + \cdots + \frac{c_\mu}{b^\mu}\right)$$

zum Ausdruck, daß auch die Maßzahl der *irrationalen* Strecke OA angesehen werden kann als „*Summe*" (im erweiterten Sinne von „Grenzwert

1) Diese Schlußfolgerung *scheint* zu versagen, wenn man den im Text ausgeschlossenen Fall in Betracht zieht, daß x sich als *rational,* und zwar nicht als endlicher, sondern als *unendlicher periodischer* Systembruch ergeben würde, während andererseits bei dem zuvor eingeschlagenen Verfahren das System der Ungleichungen (10a) mit einer *Gleichung* von der Form

$$\frac{a_n}{n} = x$$

abbrechen müßte. Dasselbe läßt sich aber auch in diesem Falle in der Form eines *unbegrenzt* fortsetzbaren Systems anschreiben, nämlich:

$$\frac{a_\nu}{\nu} \leqq x < \frac{a_\nu + 1}{\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

mit dem Zusatze, daß das *Gleichheits*zeichen *dann* und *nur* dann gilt, wenn $\nu = kn$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, und daß: $a_{kn} = k a_n$. Die geradeso wie früher *konvergente* Folge $\left(\frac{a_\nu}{\nu}\right)$ enthält dann unendlich oft die Zahl $\frac{a_n}{n}$ $\left(\text{nämlich} = \frac{a_{kn}}{kn}\right)$, hat also auch den *Grenzwert* $\frac{a_n}{n}$. Zugleich aber wird, genau wie im Text: $\frac{a_\nu}{\nu} = \frac{g_\mu}{b^\mu}$ für $\nu = b^\mu$, so daß die Folge $\left(\frac{g_\mu}{b^\mu}\right)$ wieder als eine aus der Folge $\left(\frac{a_\nu}{\nu}\right)$ *herausgehobene* erscheint.

der Summe") der Maßzahlen für die unendliche Folge der Teilstrecken $\overline{OA_1}, \overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots$

Da man ferner der *irrationalen* Strecke $\overline{OA}$ vermittels der Folge wachsender *rationaler* Strecken $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \ldots, \overline{OA_\mu}, \ldots$ *beliebig nahe* kommen kann, so kann man auch setzen:

$$\overline{OA} = \lim_{\mu \to \infty} \overline{OA_\mu}, \tag{19}$$

wenn man dem Zeichen $\lim\limits_{\mu \to \infty}$ die analoge Bedeutung beilegt, wie innerhalb der Zahlenlehre, d. h. wenn man den Inhalt der Schreibweise (19) durch die Aussage erklärt, daß der Unterschied von $\overline{OA}$ und $\overline{OA_\mu}$ durch hinlängliche Vergrößerung von μ *beliebig klein* gemacht werden kann. Daraus folgt dann, daß man mit solchen Grenzwerten nach denselben Regeln rechnen kann, wie mit Grenzwerten von Zahlenfolgen.

Ist nun $\overline{OA'}$ eine zweite *irrationale* Strecke mit der Maßzahl $a' = \lim\limits_{\mu \to \infty} s'_\mu$ und legt man den Bezeichnungen $\overline{OA'_\mu}$ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ die entsprechende Bedeutung bei, wie zuvor den $\overline{OA_\mu}$, so hat man analog:

$$\overline{OA'} = \lim_{\mu \to \infty} \overline{OA'_\mu} \tag{20}$$

und daher

$$\overline{OA} + \overline{OA'} = \lim_{\mu \to \infty} \overline{OA_\mu} + \lim_{\mu \to \infty} \overline{OA'_\mu} = \lim_{\mu \to \infty} \left(\overline{OA_\mu} + \overline{OA'_\mu}\right), \tag{21}$$

also, wenn man jetzt die Maßzahl der *Streckensumme* $\overline{OA} + \overline{OA'}$ mit S bezeichnet:

$$\begin{aligned} S\mathfrak{E} &= \lim_{\mu \to \infty} (s_\mu \mathfrak{E} + s'_\mu \mathfrak{E}) \\ &= \lim_{\mu \to \infty} (s_\mu + s'_\mu)\mathfrak{E} \quad \text{(s. Nr. 2 am Ende)} \\ &= (a + a')\mathfrak{E}, \end{aligned} \tag{22}$$

d. h. schließlich:

$$S = a + a', \tag{23}$$

in Worten: *Auch die Maßzahl der Summe zweier irrationaler Strecken ist gleich der Summe der Maßzahlen der beiden Einzelstrecken.*

Das analoge Resultat hätte sich, wie leicht ersichtlich, auch ergeben, wenn man für $\overline{OA'}$ eine *rationale* Strecke genommen hätte. Und da die angewandte Schlußweise sich ohne weiteres auf eine beliebige Anzahl von Strecken übertragen läßt, so gilt allgemein:

> *Die Maßzahl für die Summe beliebig vieler Strecken (gleichgültig ob rational oder irrational) ist gleich der Summe der Maßzahlen für die Einzelstrecken.*

Aus der *Kommutativität* der Maßzahlensumme ergibt sich dann allgemein diejenige der Streckensumme.

Zugleich folgt schließlich, daß durch die Festsetzung (13) auch die Forderungen II und III befriedigt werden.

§ 3. Umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den reellen Zahlen und den Punkten einer Geraden. — Cantor-Dedekindsches Axiom (Stetigkeitsaxiom). — Lineare Punktmengen. — Dedekindscher Schnitt und Irrationalzahltheorie.

1. Auf einer nach beiden Seiten unbegrenzten, etwa horizontal zu denkenden *Geraden* werde ein beliebiger Punkt als *„Nullpunkt"* fixiert. Er werde mit der Ziffer 0 und ein anderer etwa *rechts* davon beliebig ausgewählter Punkt mit 1 bezeichnet: auf diese Weise werde dem *ersten* dieser *Punkte* die *Zahl* 0, dem *zweiten* die *Zahl* 1 *„zugeordnet"*. Wird dann die Strecke $\overline{0\,1}$ zur *Maßeinheitsstrecke* $\mathfrak{E}$ gemacht und ist a die *Maßzahl* irgendeiner vom Anfangspunkte 0 aus nach *rechts* verlaufenden Strecke, so werde dem *Endpunkte* die *Zahl a zugeordnet*, er selbst gewissermaßen mit der Zahl a *belegt* und demgemäß auch mit a *bezeichnet*.

Wird sodann gesetzt:

$$a' = -a \tag{1}$$

und vom *Nullpunkte* aus nach *links* eine der Strecke $\overline{0a}$ *gleiche* Strecke abgetragen, so soll deren *Endpunkt* mit a' *bezeichnet* und ihm auf diese Weise die Zahl a', d. h. nach Gl. (1) die *negative* Zahl $(-a)$, *zugeordnet* werden. Da jeder beliebige *rechts* vom Nullpunkte gelegene *Punkt* der Geraden die Rolle des zuvor mit a bezeichneten, jeder *links* gelegene die Rolle des mit a' bezeichneten übernehmen kann, so läßt sich auf diese Weise *jedem beliebigen Punkte* der Geraden *eine* und *nur* eine bestimmte reelle *Zahl* zuordnen, wobei dann *verschiedenen Punkten* stets auch *verschiedene Zahlen* entsprechen und zwar dem *mehr rechts* gelegenen von zwei Punkten die (algebraisch) *größere* Zahl. Die Belegung der *links* vom Nullpunkte gelegenen Punkte mit den *negativen* Zahlen bildet das genaue Spiegelbild der mit den entsprechenden *positiven* Zahlen belegten Punkte *rechts* vom Nullpunkt.

Unter dem *Abstand* oder der *Entfernung* irgend zweier (nicht notwendig auf unserer Geraden gelegenen) Punkte A und B verstehen wir die *Maßzahl* der sie verbindenden Strecke $\overline{AB}$. Wir wollen diese *Zahl* von jetzt ab mit $\overline{AB}$ bezeichnen, behalten uns indessen vor, geradeso, wie wir für *Punkt* und zugeordnete *Zahl* denselben Buchstaben verwen-

den, nach Bedarf auch die *nach der Maßeinheit gemessene Strecke* gleichfalls mit $\overline{AB}$ zu bezeichnen.[1])

Hiernach ist insbesondere:

$$\overline{0a} = a = |a|, \quad \overline{0a'} = |a'|,$$

also, wenn b einen ganz beliebigen (d. h. rechts oder links von 0 gelegenen) Punkt der Geraden bezeichnet, in jedem Falle:

$$\overline{0b} = |b|. \tag{2}$$

Liegen *zwei Punkte* b und c auf *derselben* Seite des Nullpunktes, haben also die Zahlen b und c gleiches Vorzeichen und ist b der dem Nullpunkte *näher* gelegene Punkt, also $|b| < |c|$, so hat man:

$$\overline{bc} = \overline{0c} - \overline{0b},$$

somit nach Gl. (2):

$$\begin{aligned}\overline{bc} &= |c| - |b| \\ &= |c - b| \qquad \text{(da } b, c \text{ gleiches Vorzeichen haben).}\end{aligned}$$

Liegen dagegen b und c auf *verschiedenen* Seiten des Nullpunktes, etwa b auf der *linken*, so daß also die *Zahl* $b < 0$, $c > 0$, so findet man:

$$\begin{aligned}\overline{bc} = \overline{b0} + \overline{0c} &= |b| + c \\ &= c - b \quad \text{(wegen } b < 0) \\ &= |c - b|,\end{aligned}$$

so daß sich schließlich für den *Abstand* der Punkte b und c in jedem Falle ergibt:

$$\overline{bc} = |c - b| \quad \text{(oder auch: } |b - c|). \tag{3}$$

2. Aus dem Umstande, daß nunmehr jedem *Punkte* der Geraden eine bestimmte *Zahl* zugeordnet werden konnte, erwächst sofort die Frage, ob auch umgekehrt jeder beliebig angenommenen *Zahl* a ein bestimmter *Punkt* der Geraden entspricht. Daß dies in gewissem Umfange wirklich der Fall ist, zeigt sich zunächst, wenn a eine *rationale* Zahl, etwa $\frac{m}{n}$, ist, da ja in diesem Falle die *Strecke* $\frac{m}{n}\mathfrak{E}$ und somit auch der *Punkt* $a = \frac{m}{n}$ *konstruierbar* ist. Etwas Ähnliches gilt z. B. auch, wenn a eine *Irrationalzahl* von der Form $\sqrt{\frac{m}{n}}$ ist. Denn setzt man vorläufig: $\sqrt{\frac{m}{n}} = x$, also:

1) Wir gebrauchen demgemäß den Ausdruck *Strecke* in der doppelten Bedeutung eines bestimmten *Geradenstücks* sowie der *Maßzahl* dieses Geradenstücks. Welche dieser beiden Bedeutungen dem Worte beizulegen ist, geht aus dem Zusammenhange stets deutlich hervor.

$x^2 = \frac{1}{n} \cdot m$, so findet man:

$$\frac{1}{n}\mathfrak{E} : x\mathfrak{E} = x\mathfrak{E} : m\mathfrak{E},$$

so daß also die Strecke $x\mathfrak{E}$, d. h. $\sqrt{\frac{m}{n}}\,\mathfrak{E}$ als geometrisches Mittel zwischen $\frac{1}{n}\,\mathfrak{E}$ und $m\mathfrak{E}$ vermittels einer bekannten geometrischen Konstruktion hergestellt werden kann, der *Punkt* $\sqrt{\frac{m}{n}}$ auf unserer Geraden also wieder konstruierbar ist.

Etwas Analoges gilt zwar auch noch für alle solchen (algebraischen) Zahlen, die sich in letzter Linie auf Quadratwurzeln zurückführen lassen, aber *nicht* mehr für eine *beliebige* (algebraische oder transzendente) *Irrationalzahl* $\left(\text{z. B. } \sqrt[3]{\frac{m}{n}},\ c,\ \pi\right)$. Wird nämlich unter a eine solche „beliebige" Irrationalzahl verstanden, so steht nur so viel fest, daß sie sich in *beliebig enge rationale Grenzen* ($a_\nu < a < b_\nu$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, *statt:* $\lim_{\nu\to\infty}(b_\nu - a_\nu) = 0$) einschließen läßt Den *Zahlenpaaren* (a_ν, b_ν) entsprechen dann Punktepaare (a_ν, b_ν), welche den präsumtiven *„Punkt"* a beliebig eng umschließen müßten, *vorausgesetzt, daß ein solcher überhaupt existiert.* Aber gerade die *Existenz* eines solchen Punktes kann *nicht* als etwas *a priori* feststehendes angesehen, vielmehr, wie wohl zuerst *Georg Cantor* hervorgehoben hat, nur durch eine besondere Festsetzung, ein neu einzuführendes *Axiom*, erzwungen werden, dem man nach dem Vorgange von *Richard Dedekind* die folgende Form geben kann:

a) *Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Klassen von der Art, daß jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkt der zweiten Klasse liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung aller Punkte in zwei Klassen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt.*

Die vermittels dieser Festsetzung scharf und faßlich charakterisierte vollkommene *„Lückenlosigkeit"* der als *Punktreihe* aufgefaßten *geraden Linie* wird als deren *Stetigkeit*, jene Festsetzung infolgedessen auch als *Stetigkeitsaxiom* bezeichnet. Man kann diesem letzteren auch die folgende für gewisse Beweisformen etwas vorteilhaftere Fassung geben, in welcher es neuerdings als *Axiom der Intervallschachtelung* bezeichnet zu werden pflegt:

b) *Hat man eine unbegrenzte Folge von Strecken:* $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}, \ldots, \overline{A_\nu B_\nu}, \ldots$ *von der Beschaffenheit, daß eine jede, abgesehen von der ersten, der vorangehenden als Teilstrecke angehört, und daß die Längen* $\overline{A_\nu B_\nu}$ *für* $\nu \to \infty$ *der Null zustreben, so*

gibt es einen und nur einen Punkt, der allen diesen Strecken angehört.[1])

3. Bei der Formulierung a) des fraglichen Axioms wird möglichster Allgemeinheit zuliebe von irgendwelchen *metrischen* Beziehungen, d. h. von der Möglichkeit, Punkte einer Geraden irgendwie auf Grund einer *Messung* zu charakterisieren, kein Gebrauch gemacht.[2]) Läßt man diesen Gesichtspunkt fallen, so genügt es zur Erreichung des von uns in Aussicht genommenen Zweckes, jeder beliebigen *Zahl* einen bestimmten *Punkt* als geometrisches *Abbild* zu sichern, wenn man die oben unter a) oder b) aufgestellten Forderungen lediglich für die Einteilung aller (begrifflich ja von vornherein auf der Einführung einer *Messung* beruhenden) *rationalen* Punkte bzw. für die von *rationalen* Punkten begrenzten Strecken in Anspruch nimmt, also die Fassung a) dahin abändert, daß man sagt: *„Zerfallen alle rationalen Punkte der Geraden in zwei Klassen usf."* und analog in b) unter A_ν, B_ν ausschließlich *rationale* Punkte versteht. In der Tat läßt sich zeigen, daß auch bei dieser Herabminderung der obigen Forderungen jeder beliebigen *Irrationalzahl* ein bestimmter *Punkt* entspricht.

Ist nämlich a eine ganz beliebige (positive oder negative) *Irrationalzahl*, so läßt sich ganz analog, wie dies in § 2, Nr. 4 durchgeführt wurde, ein unbegrenztes System von Ungleichungen der folgenden Form herstellen:

$$\frac{a_\nu}{\nu} < a < \frac{a_\nu + 1}{\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \tag{4}$$

wo die a_ν eindeutig bestimmte *ganze* Zahlen bedeuten (die nur jetzt nicht mehr, wie a. a. O. Ungl. (10a), dem Intervall $0 \leqq a_\nu < \nu$ anzugehören brauchen). Durch die dem Ungleichungssystem (4) genügende Irrationalzahl a werden dann offenbar *alle möglichen rationalen Zahlen* $\frac{m}{n}$ (wo: $m \lesseqgtr 0$, $n > 0$) in zwei getrennte Klassen zerlegt, derart, daß jede Zahl der *einen* Klasse *kleiner* ist als jede Zahl der *anderen*, da ja entweder $\frac{m}{n} \leqq \frac{a_n}{n}$ oder $\frac{m}{n} \geqq \frac{a_n + 1}{n}$ sein muß. Andererseits zerfallen auch alle *rationalen Punkte* auf diese Weise in zwei Klassen, derart, daß jeder Punkt der *einen* Klasse *links* von jedem Punkt der *anderen* liegt, und es gibt daher auf Grund des modifizierten Stetigkeitsaxioms a) einen bestimmten Punkt a, welcher diese Zerschneidung hervorbringt, der dann als das *geometrische Abbild* der (als Maßzahl der Strecke $\overline{0a}$) mit a bezeichneten *Zahl* anzusehen ist.

1) Man pflegt dies auch so auszusprechen: Die ineinandergeschachtelten Intervalle $\overline{A_\nu B_\nu}$ *konvergieren* gegen einen bestimmten Punkt (*„Grenzpunkt"*).

2) Bei der Fassung b) wird bereits der Begriff der *Länge* benutzt.

Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man im Hinblick auf die modifizierte Fassung b) des Stetigkeitsaxioms von der Darstellung der Zahl a durch einen unendlichen Systembruch $\lim_{\nu \to \infty} s_\nu$ ausgeht. An die Stelle des Ungleichungssystems (4) tritt dann ein solches von der Form:

$$s_\nu < a < s_\nu + \frac{1}{b^\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \tag{5}$$

und der Folge der *Zahlenintervalle* $\left(s_\nu, s_\nu + \frac{1}{b^\nu}\right)$ entspricht alsdann eine Folge *ineinanderliegender Strecken* (Punktintervalle) von der beständig abnehmenden Länge $\frac{1}{b^\nu}$, mit einem bestimmten allen Strecken gemeinsamen *Punkt* („*Grenzpunkt*") als *Bildpunkt* der Zahl a.

4. Nach dem Gesagten besteht jetzt eine *umkehrbar eindeutige* Beziehung zwischen der Menge der *reellen Zahlen* und den *Punkten* einer (nach beiden Seiten unbegrenzten) *Geraden*, die wir hiernach als *Zahlenlinie* bezeichnen. Und zwar zeigt sich, daß die Menge der *reellen Zahlen* auf Grund unserer *Definitionen* diejenige Art von *Stetigkeit* (= *Lückenlosigkeit*) besitzt, wie sie der *Geraden* durch das *Axiom* a) zugeteilt wurde. Wir bezeichnen daher die Menge der *reellen Zahlen* gleichfalls als *stetig*, auch als (*reelles*) *Zahlenkontinuum*.

Infolge der vollkommenen Korrespondenz zwischen den *reellen Zahlen* und den *Punkten einer Geraden* werden wir, analog wie wir bereits in Nr. 1 dieses Paragraphen *Punkte* und zugeordnete *Zahlen* mit dem nämlichen *Buchstaben* bezeichnet haben, die Bezeichnungen *Zahl* und *Punkt*, *Zahlenmenge* und *Punktmenge* (im folgenden *zunächst* ausschließlich im Sinne von *reelle Zahlenmenge* bzw. *lineare Punktmenge*, d. h. Punktmenge auf einer *Geraden*) als *äquivalent* gebrauchen, derart, daß jede Aussage über Beziehungen zwischen *Punkten* ohne weiteres als eine solche über entsprechende *Zahlen*beziehungen gedeutet werden kann und umgekehrt.

Hiernach bedarf es keiner weiteren Erläuterung, was darunter zu verstehen ist, wenn wir im Anschluß an die in § 1 gegebene Terminologie von *Häufungspunkten* und der *abgeleiteten Menge* oder *Ableitung* einer (linearen) *Punktmenge* sprechen, und wenn wir die letztere als *beschränkt*, *abgeschlossen*, *in sich dicht*, *perfekt*, in einem Intervall *überall dicht* oder *isoliert* bezeichnen. Und wenn wir in Zukunft zur Erzielung größerer Anschaulichkeit, meist auch größerer Kürze uns häufig *geometrischer Ausdrucksweise* bedienen werden, so handelt es sich dabei nur um eine äußerliche *Form*, durch welche die *arithmetische Zuverlässigkeit* der in Frage kommenden Schlußfolgerungen keine Einbuße erleidet. Ein einfaches Beispiel möge zunächst den Inhalt dieser Bemerkung verdeutlichen.

5. Angenommen, es solle bewiesen werden, daß jede *beschränkte unendliche Zahlenmenge* $\{x'\}$ mindestens eine bestimmte *Häufungszahl* besitzt, so steht es von vornherein frei, diese Behauptung so auszusprechen, daß jeder *beschränkten unendlichen Punktmenge* $\{x'\}$ mindestens ein (im Endlichen gelegener) *Häufungspunkt* zukomme, was dann folgendermaßen bewiesen werden kann.

Infolge der *Beschränktheit* der Punktmenge gibt es einen Punkt a und *rechts* davon einen Punkt b, derart, daß *alle* x' im Innern der *Strecke* (des Punktintervalls) $\overline{ab}$ liegen. Durch Halbierung zerfällt dieselbe in zwei Teilstrecken, von denen mindestens eine *unendlich viele* x' enthalten muß. Mit dieser *einen* oder, wenn *beide* Teilstrecken unendlich viele x' enthalten sollten, etwa mit der *ersten* der beiden verfahren wir ebenso usf. Jede bei Fortsetzung dieses Verfahrens zur weiteren Behandlung herausgehobene Teilstrecke bildet einen Bestandteil (nämlich die Hälfte) der unmittelbar vorangehenden, es entsteht also auf diese Weise eine unbegrenzt fortsetzbare Folge ineinander geschachtelter Intervalle von unbegrenzt abnehmender Länge, die *auf Grund des Stetigkeitsaxioms* gegen einen bestimmten *Punkt* h konvergieren: dieser ist dann der fragliche *Häufungspunkt*, die *Zahl* h also die entsprechende *Häufungszahl*. Denn wird eine Strecke δ *beliebig klein* angenommen, so müssen in das Intervall $(h-\delta, h+\delta)$ zum mindesten alle diejenigen gegen den Punkt h konvergierenden Teilstrecken hineinfallen, welche bereits den Kleinheitsgrad δ erreicht haben und die andererseits *unendlich viele* x' enthalten.

Dieser Beweis ist nun trotz seiner *geometrischen* Fassung und der hieraus erwachsenen Notwendigkeit, sich auf das *Stetigkeitsaxiom* zu stützen, für die Existenz der *Häufungszahl* h vollständig *bindend*. Denn das dabei benützte *geometrische Stetigkeitsaxiom* scheidet sofort aus, wenn man das beschriebene *geometrische* Einschließungsverfahren folgendermaßen in die Sprache der *Arithmetik* übersetzt.

Jeder *Punkt* bzw. jede *Zahl* des Intervalls $[a, b]$ läßt sich in die Form setzen: $a+(b-a)\vartheta$, wo: $0 \leqq \vartheta \leqq 1$. Die bei dem obigen Halbierungsverfahren sukzessive ausgewählten Intervalle haben daher die Form:

$$\left[a+(b-a)\frac{c_1}{2},\quad a+(b-a)\frac{c_1+1}{2}\right]$$

$$\left[a+(b-a)\left(\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2^2}\right),\quad a+(b-a)\left(\frac{c_1}{2}+\frac{c_2+1}{2^2}\right)\right] \text{ usf.,}$$

wo $c_1, c_2, \ldots$ je eine bestimmte der beiden Zahlen 0 und 1 vorstellen, allgemein:

$$\left[a+(b-a)s_\nu,\quad a+(b-a)\left(s_\nu+\frac{1}{2^\nu}\right)\right],$$

wo s_ν (analog wie bei dem Beweise in § 1, Nr. 2, S. 1/3) einen unbegrenzt fortsetzbaren *dyadischen* Bruch bedeutet. An die Stelle des *axiomatisch* eingeführten *Punktes h* tritt dann die in unserem Zahlenvorrat auf Grund gegebener *Definitionen* sicher *vorhandene Zahl:*

$$h = a + (b - a) \cdot \lim_{\nu \to \infty} s_\nu .$$

Es bedarf hiernach weiterhin keiner besonderen Rechtfertigung, wenn wir uns auch in Zukunft nach Bedarf einer analogen geometrischen Einkleidung der Beweisführung bedienen werden.

6. Wir haben im ersten Bande dieser Vorlesungen (I_1, § 23, 24) die *Irrationalzahlen* nach der *Méray-Cantor*schen Methode vermittels *konvergenter Zahlenfolgen* (mit besonderer Bevorzugung der als *unendliche Systembrüche* bezeichneten Gattung) definiert. Bei der hier durchgeführten Herstellung einer umkehrbar eindeutigen Korrespondenz zwischen den *Punkten einer Geraden* und den *reellen Zahlen* zeigte sich zunächst, daß es auf Grund des Prinzips der *Streckenmessung* möglich ist, jedem *Punkte* der Geraden eine bestimmte *Zahl* zuzuordnen, während die umgekehrte Aufgabe eine an den *Punktvorrat* einer Graden zu stellende *Forderung* erheischte, welche mit Hilfe des *Stetigkeitsaxioms* befriedigt wurde.

Dedekind hat nun bei der Einführung der *Irrationalzahlen* genau den umgekehrten Weg eingeschlagen, indem er das bei seiner Fassung des *Stetigkeitsaxioms* zugrunde liegende Prinzip, die *Punkte* einer Gerade in *zwei* aneinander stoßende *Klassen* zu zerlegen, seines geometrischen Charakters entkleidete und zur *Definition* der *Irrationalzahlen* benützte. Es wird dabei ausgegangen von der Menge aller *rationalen* Zahlen und einer Zerlegung derselben in *zwei Klassen*, die mit $\{a\}$ und $\{b\}$ bezeichnet werden mögen und die dadurch charakterisiert sind, daß jede Zahl der *ersten* Klasse *kleiner* sein soll, als jede Zahl der *zweiten* Klasse, daß also durchweg $a < b$. Eine solche Einteilung wird nach *Dedekinds* Vorgange als *Schnitt* bezeichnet und mag durch das Symbol $(a \mid b)$ dargestellt werden. Letzteres soll dann gleichzeitig zur Bezeichnung derjenigen *Zahl* dienen, welche in einem sogleich näher zu erklärendem Sinne diesen *Schnitt erzeugt*. Es kann nämlich zunächst der Fall eintreten, daß die Klasse $\{a\}$ ein *reales Maximum* $\bar{a}$ (eine *letzte* Zahl) oder die Klasse $\{b\}$ ein *reales Minimum* $\underline{b}$ (eine *erste* Zahl) besitzt. Ein gleichzeitiges Eintreten *beider* Eventualitäten ist offenbar *unmöglich*. Denn da auf Grund der Forderung $a < b$ auch $\bar{a} < \underline{b}$ sein müßte, so würden zwischen $\bar{a}$ und $\underline{b}$ noch *unendlich viele rationale* Zahlen liegen, die dann *keiner* der beiden Klassen angehörten. Im übrigen sind die beiden genannten Möglichkeiten insofern prinzipiell kaum verschieden, als man die eine ohne weiteres auch in die andere überführen kann. Hat z. B. die Klasse $\{a\}$ das *reale Maximum* $\bar{a}$,

so würde durch die Loslösung von $\bar{a}$ und Zuteilung zur Klasse $\{b\}$ die Zahl $\bar{a}$ nunmehr als *reales Minimum* $\underline{b}$ von $\{b\}$ erscheinen — *vice versa.* Wir wollen dann sagen, der *Schnitt* $(a \mid b)$ werde durch die Zahl $\bar{a}$ bzw. (die mit ihr identische) $\underline{b}$ *erzeugt* und bezeichnen $\bar{a}$ bzw. $\underline{b}$ als die zu der vorliegenden Klasseneinteilung zugehörige *Schnittzahl*, also mit Benützung der oben angekündigten Schreibweise:

$$(a \mid b) = \bar{a} \quad \text{bzw.} \quad (a \mid b) = \underline{b}.$$

Da offenbar *jede* rationale Zahl dazu dienen kann, einen *Schnitt* hervorzubringen, so steht es frei, jede beliebige rationale Zahl als *Schnittzahl* aufzufassen, die Menge der *rationalen Zahlen* unter den Begriff *Schnittzahlen* zu subsumieren Nun gibt es aber auch (unendlich viele) *Schnitte*, denen *keine rationale Schnittzahl* entspricht. Versteht man z. B. unter der Klasse $\{a\}$ alle diejenigen rationalen Zahlen, welche der Forderung $a^3 < 2$ genügen, unter $\{b\}$ diejenigen, für welche $b^3 > 2$, so ist $(a \mid b)$ ein *Schnitt* in dem oben definierten Sinne. Denn aus $a^3 < 2 < b^3$ folgt mit Sicherheit, daß $a < b$. Andererseits muß *jede rationale Zahl* x *einer* der beiden Bedingungen $x^3 < 2$ oder $x^3 > 2$ genügen, also entweder der Klasse $\{a\}$ oder der Klasse $\{b\}$ angehören. Dagegen gibt es *keine* rationale Zahl x, für welche $x^3 = 2$ ist, also *keine rationale Schnittzahl* $(a \mid b)$ Wir *schaffen* alsdann in diesem und jedem analogen Falle eine *neue Schnittzahl*, also *„Irrationalzahl“* $(a \mid b)$, deren *Definition* darin besteht, daß sie die *Trennung* der *rationalen* Zahlen in die beiden genau umschriebenen Klassen $\{a\}$ und $\{b\}$ hervorbringt. Damit diese Definition in dem vorliegenden Zusammenhange wirklich brauchbar ist, muß gezeigt werden, daß auf Grund derselben *jeder Schnittzahl* $(a \mid b)$ in deren Gesamtmenge (welche ja, wie oben bemerkt, auch die Menge der *rationalen* Zahlen enthält) ein *bestimmter Platz* zukommt; daß die *Menge der Schnittzahlen* ein *Kontinuum* bildet (*stetig* = *lückenlos* ist), d. h. daß auch zu jedem *Schnitte*, welcher die Menge aller *Schnittzahlen* in zwei Klassen zerlegt, stets *eine ihn erzeugende Schnittzahl* existiert; und daß die *vier Spezies* (bis auf die Division durch *Null*) eindeutig und ohne Widerspruch gegen die im Gebiete der *rationalen* Zahlen geltenden Regeln im Gebiete der *Schnittzahlen* ausführbar sind. Wir glauben indessen davon absehen zu dürfen, auf die fraglichen Beweise an dieser Stelle des weiteren einzugehen, da wir ja die Lehre von den Irrationalzahlen a. a. O. auf einem anderen (wohl etwas umständlicheren, aber nach unserem Dafürhalten für den Anfänger leichter zugänglichen) überdies zu dem gleichen Ziele führenden Wege in ausreichender Weise begründet haben, andererseits aber ausführliche Darstellungen der *Dedekind*schen Theorie um so zahlreicher zur Verfügung stehen, als diese letztere von der Mehrzahl der modernen Lehrbücher entschieden bevorzugt zu werden pflegt.

§ 4. Reelle Veränderliche. — Funktionen einer reellen Veränderlichen und deren geometrische Darstellung. — Obere und untere Grenze, Schwankung einer Funktion.

1. Unter einer *reellen Veränderlichen* (*Variablen*) verstehen wir ein *Zeichen* (gewöhnlich einen der letzten Buchstaben des Alphabets, z. B. x), welches dazu bestimmt ist, jedes beliebige Element *einer vorgeschriebenen Menge verschiedener reeller Zahlen* (*linearen Punktmenge*) vorzustellen. Die *Menge* selbst bezeichnet man als den *Bereich* der Veränderlichen, jedes einzelne *Element* als einen der *Werte*, deren die *Veränderliche* fähig ist, oder als eine *Stelle* (einen *Punkt*) ihres Bereiches. Die als *Bereich* vorgeschriebene *Zahlenmenge* kann, allgemein zu reden, *endlich* oder *unendlich*, dabei entweder *abzählbar* oder *nicht abzählbar* sein: für das folgende kommt im wesentlichen nur der letztere Fall in Betracht. Es gelten dann für solche *Bereiche* ohne weiteres die in § 1 gegebenen Definitionen und Existenzbeweise. Ferner soll im Anschluß an die in Nr. 4 des vorigen Paragraphen als *Stetigkeit* der Menge der reellen Zahlen bezeichnete Eigenschaft der *Bereich* einer reellen Veränderlichen *stetig* heißen, wenn er aus *allen* Zahlen eines Intervalls $[x_0, X]$ besteht.

Unter der *Umgebung* einer im *Innern* des Intervalls $[x_0, X]$ gelegenen Stelle a verstehen wir ein Intervall $[a - \delta, a + \delta]$ (eventuell auch mit *Ausschluß* der Grenzen), wo $\delta > 0$ beliebig klein angenommen werden kann, jedenfalls klein genug, daß $a - \delta \geqq x_0$, $a + \delta \leqq X$.

Wir sagen ferner, die Veränderliche x *konvergiere* gegen einen gewissen Wert a, in Zeichen:

$$x \rightarrow a,$$

wenn man x sukzessive die Zahlenwerte einer beliebigen, dem vorgeschriebenen Bereiche $\{x\}$ angehörigen Zahlenfolge x_ν mit dem Grenzwerte $\lim_{\nu \to \infty} x_\nu = a$ beilegt, *den Wert a selbst ausgeschlossen.*

2. Ist y eine *zweite reelle Veränderliche* von der Beschaffenheit, daß jedem x eines gewissen Bereiches $\{x\}$ eine eindeutig bestimmte Zahl y *zugeordnet* ist, so heißt y eine in jenem Bereiche (dem „*Definitionsbereiche*“) *eindeutige* oder *einwertige Funktion* von x, in Zeichen etwa:

$$y = f(x),$$

(wobei es indessen freisteht, für den Buchstaben f nach Bedarf irgendeinen anderen zu wählen, z. B. $y = F(x)$, $y = g(x)$, $y = \varphi(x)$ usf.).

Gehören zu jedem x *mehrere* (d. h. zwei bis unendlich viele) Werte y, so heißt y eine *mehrdeutige* oder *mehrwertige Funktion* von x.

Die *Veränderliche* x heißt in diesem Zusammenhange die *unabhängige*, während die *Funktion* y auch als *abhängige Veränderliche* bezeichnet wird.

Über die Art und Weise, wie die fragliche *Zuordnung* hergestellt wird, besteht bei dieser *allgemeinsten* („*Dirichlet*schen“) Definition einer *Funktion* keine bestimmte Vorschrift. Sieht man jedoch von dem für unsere Zwecke bedeutungslosen Falle ab, daß der Bereich $\{x\}$ nur aus einer *endlichen* Zahlenmenge besteht, also jene *Zuordnung* vollständig mit Hilfe einer *Tabelle* bewältigt werden könnte, so kann dieselbe nur durch eine *Rechenvorschrift* bzw. durch *Angaben* oder *Forderungen* erfolgen, die in letzter Linie in eine *Rechenvorschrift* überzuführen sind.

Die nächstliegende, ich möchte sagen handlichste Form einer solchen Rechenvorschrift besteht in einem *begrenzten rationalen, d. h. nur die Anwendung der vier Spezies erfordernden Ausdruck* (vgl. I_1, § 22, Nr 8, S. 133), welcher außer der *Veränderlichen* x noch eine Anzahl *bestimmt vorgeschriebener* Zahlen („*Konstanten*“) enthalten kann (z. B. $y = x^n$, $y = ax + b$, $y = \frac{ax+b}{cx+d}$), oder dem *Grenzwerte* einer solchen „*rationalen Funktion*“[1] $\left(\text{z. B. } y = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right.$ — vgl. I_1, § 33, Nr. 3, S. 202 — $\left. y = \lim_{n\to\infty}\sum_0^n \frac{1}{\nu!}x^\nu\right)$. Arithmetische Ausdrücke dieser *letzteren* Gattung spielen in der Funktionenlehre eine geradezu dominierende Rolle, und man darf es als eine *Hauptaufgabe* der *Funktionenlehre* („*Analysis*“) bezeichnen, für Funktionen, die in anderer Weise definiert sind, Rechenvorschriften der gedachten Art (z. B. in Form von unendlichen Reihen, Produkten oder Kettenbrüchen) herzustellen. Dieser Fall tritt z. B. stets ein, wenn die Funktion y nicht „*explizite*“ durch eine unmittelbar auf x anzuwendende Rechenvorschrift, vielmehr nur „*implizite*“ durch eine zwischen x und y bestehende *Gleichung* definiert ist.[2] Er tritt ferner ein, wenn der zwischen x und y bestehende Zusammenhang zunächst durch irgendwelche *nicht-arithmetischen*, etwa *geometrischen* oder *mechanischen* Beziehungen erklärt ist. Dies gilt z. B. für die *trigonometrischen Funktionen*, wie sie in der elementaren Trigonometrie lediglich als durch

---

1) Näheres hierüber siehe in § 13

2) *Einfachstes Beispiel:* $y^2 = x$ für $x > 0$. Diese Gleichung definiert die *zweiwertige* Funktion $\sqrt{x}$, nämlich $|\sqrt{x}|$ und $-|\sqrt{x}|$. Dabei ist aber $|\sqrt{x}|$ nur ein *Zeichen* für die eine Lösung der Gleichung $y^2 = x$, *keine Rechenvorschrift* zur wirklichen Herstellung dieser Lösung. In der Zahlenlehre wird zwar gezeigt, daß hinter diesem *Zeichen* für jedes $x > 0$ eine bestimmte *Zahl* steckt (vgl. I_1, § 29, Nr. 1, S 172), und die elementare Algebra lehrt eine Art Probiermethode, die Theorie der Kettenbrüche eine wirksamere Methode um diese Zahl zu *numerisch* gegebenem x näherungsweise zu berechnen. Eine *Rechenvorschrift* vollkommenster Art in Gestalt einer *expliziten* Darstellungsform der Funktion $\sqrt{x}$ gibt aber erst die Funktionenlehre (mit Hilfe der sogenannten binomischen Reihe) an.

Streckenverhältnisse definiert erscheinen und die in Wahrheit erst dann zu „*Funktionen*" im Sinne der Funktionenlehre werden, wenn es dieser gelungen ist, jene *geometrische* Definition durch geeignete *Rechenvorschriften* zu ersetzen.[1])

Im übrigen lassen sich auch gänzlich anders geartete, relativ einfache *Rechenvorschriften* herstellen, die geeignet sind, eine Funktion für alle Stellen einer unendlichen Punktmenge vollständig zu definieren. Man denke sich z. B. jede Zahl x des Intervalls $[0, 1]$ als *dyadischen* Bruch dargestellt und nach Art eines Dezimalbruches mit Hilfe der Ziffern 0 und 1 angeschrieben; sodann ordne man jedem x diejenige Zahl y zu, welche entsteht, wenn man den dyadischen Bruch von x als *Dezimalbruch* liest. Oder man schreibe jedes x als *Dezimalbruch* und ordne ihm als y denjenigen *Dezimalbruch* zu, welcher entsteht, wenn man *vor* jeder Dezimalstelle eine bestimmte Ziffer, z. B. 0, einschaltet. Oder man ordne jedem als *n-stelligen Dezimalbruch* darstellbaren x den Wert $y = (\frac{1}{10})^n$, jedem *unendlichen* den Wert $y = 0$ zu usf.

Ein klassisch gewordenes, dem letzten verwandtes Beispiel, das von *Dirichlet* herrührt, besteht darin, daß man setzt: $y = a$ für alle *rationalen* x, $y = b$ für alle *irrationalen*, unter a und b zwei beliebige voneinander verschiedene Zahlen verstanden (die man auch durch zwei beliebige *Funktionen* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ersetzen könnte).

Man kann zur Definition einer Funktion auch Rechenvorschriften verwenden, die aus einer *abzählbaren Menge* von *Einzelvorschriften* bestehen. Man setze z. B.:

$$\begin{array}{lll} y = x & \text{für:} & 1 \geqq x > \frac{1}{2} \\ y = \frac{x}{2} & \text{für:} & \frac{1}{2} \geqq x > \frac{1}{3} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y = \frac{x}{n} & \text{für:} & \frac{1}{n} \geqq x > \frac{1}{n+1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y = 0 & \text{für:} & x = 0, \end{array}$$

---

1) Solche Rechenvorschriften liefert vermittels recht gesuchter Kunstgriffe die sogenannte algebraische Analysis, auf mehr methodischer Grundlage die Differentialrechnung Da es sich hier darum handelt, die Funktionenlehre von Grund aus systematisch aufzubauen, so erscheint die Berufung auf diese Ergebnisse für uns ausgeschlossen, und da dies in noch erhöhtem Maße von den lediglich der geometrischen Anschauung entnommenen Ergebnissen der elementaren Trigonometrie gilt, so müssen wir auf den Gebrauch der trigonometrischen Funktionen so lange verzichten, bis sie als natürliches Glied unserer Entwicklungen zum Vorschein kommen werden (s § 62)

so daß wiederum y für *jede* Stelle des Intervalls $[0, 1]$ als eindeutige Funktion von x definiert ist.

3. Im Anschluß an die Darstellung der *reellen Zahlen* durch die *Punkte einer Geraden* läßt sich die Menge der *Zahlenpaare* (x, y), deren Verbindung durch eine Funktion $y = f(x)$ herbeigeführt wird, durch eine *Punktmenge* darstellen, welche in einer *Ebene* passend verteilt ist.

Zunächst lassen sich nämlich nach einer Methode, welche die Grundlage der *„analytischen“ Geometrie* (*„Koordinatengeometrie“*) bildet, *allen möglichen reellen Zahlenpaaren* (x, y) die Punkte einer Ebene *umkehrbar eindeutig* zuordnen. Obschon die Anfangsgründe der genannten Disziplin weiterhin als bekannt vorausgesetzt werden, so mag doch, um über die Bedeutung der einzuführenden Grundbegriffe und Beziehungen keinerlei Unklarheit bestehen zu lassen, auf die fragliche Anschauungsweise hier kurz eingegangen werden.

Durch einen beliebig gewählten *Anfangs-* oder *Nullpunkt* O einer *Ebene* (der *„Koordinatenebene“*) werden zwei sich rechtwinklig schneidende *Gerade*, die *„Koordinatenachsen“* gezogen. Die Punkte der *einen*, etwa *horizontal* anzunehmenden und als x-Achse zu bezeichnenden, dienen auf Grund der im vorigen Paragraphen erörterten Methode als *Abbilder* der reellen Zahlen x (wobei also die Punkte *rechts* von O den Zahlen $x > 0$ entsprechen), die Punkte der *anderen*, also nunmehr *vertikalen* und als y-Achse zu bezeichnenden, dienen in analoger Weise als *Abbilder* der Zahlen y, und zwar mag, um auch hier eine Festsetzung zu treffen, der vom Nullpunkte aus nach *oben* gerichtete Teil den Zahlen $y > 0$ entsprechen.

Wird jetzt ein reelles *Zahlenpaar* (x_0, y_0) beliebig angenommen und durch den *Punkt* x_0 eine *Vertikale*, durch den *Punkt* y_0 eine *Horizontale* gezogen, so schneiden sich diese beiden in einem bestimmten Punkte P_0, welcher als *Bildpunkt* des *Zahlenpaares* (x_0, y_0) angesehen und schlechthin als der *Punkt* (x_0, y_0) bezeichnet wird.[1]) Die *Zahlen* x_0, y_0 heißen dann die *Koordinaten* des Punktes, x_0 insbesondere seine *Abszisse*, y_0 seine *Ordinate*.[2]) Hiernach gehört zu jedem *Zahlenpaar* (x, y) *ein* und *nur* ein bestimmter *Punkt* P der Koordinatenebene. Es entspricht aber auch umgekehrt jedem *Punkte* P ein bestimmtes *Zahlenpaar*, nämlich das aus denjenigen zwei *Zahlen* x und y bestehende, welche den senkrechten *Projektionen* des Punktes P auf die x- und y-Achse zugeordnet sind.

---

1) Die Punkte der x-Achse sind also in diesem Zusammenhange mit $(x, 0)$, diejenigen der y-Achse mit $(0, y)$ zu bezeichnen

2) Dementsprechend wird die x-Achse als *Abszissenachse*, die y-Achse als *Ordinatenachse* bezeichnet.

Hat man irgend zwei Punkte $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ und $P_1 \equiv (x_1, y_1)$, so besitzen die Projektionen ihrer Verbindungslinie $\overline{P_0 P_1}$ auf die Achsen nach § 3, Nr. 1, Gl. (3) (S. 19) die *Längen* $|x_1 - x_0|$, $|y_1 - y_0|$, und man findet daher für die *Länge* dieser Verbindungslinie, also den *Abstand* der beiden Punkte, die Formel:

$$\overline{P_0 P_1} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

4. Ist $y = f(x)$ eine für irgendeinen Bereich $\{x\}$ definierte *Funktion*, so entspricht nunmehr jedem durch die Beziehung $y = f(x)$ charakterisierten *Zahlenpaare* (x, y) ein bestimmter *Punkt* der Koordinatenebene, und zwar liegt, wenn $f(x)$ eine *eindeutige* Funktion ist, auf der durch irgendeinen Abszissenpunkt x des Definitionsbereiches gezogenen Vertikalen nur *ein* solcher Punkt (x, y), im Falle einer *mehrdeutigen* Funktion $f(x)$ *eine entsprechende Anzahl*. Die auf diese Weise für die Gesamtheit der Abszissen x zum Vorschein kommende *Punktmenge* (x, y) gibt als eine Art graphischer Tabelle einen Überblick darüber, wie die Werte von y sich gleichzeitig mit denen von x ändern, in welchem Maße sie z. B. mit zunehmendem x steigen oder fallen, sie kann daher zweckmäßig als ein *geometrisches Bild* der Funktion $y = f(x)$ angesehen werden. Von besonderem Interesse ist dabei der Fall, daß y als Funktion von x diejenige Eigenschaft besitzt, die als *Stetigkeit* der Funktion bezeichnet wird, die hier vorläufig[1]) dadurch charakterisiert werden mag, daß *beliebig* wenig voneinander verschiedene y zu *hinlänglich* nahe gelegenen Werten x (d. h. also Punkten der Abszissenachse) gehören.

Gleichzeitig mit den *Abszissen* x werden dann auch die zugehörigen Punkte (x, y) sich unbegrenzt nähern und bei *stetiger* Variation von x sich *lückenlos*[2]) aneinanderschließen. Als geometrisches Bild der Funktion $y = f(x)$ erscheint dann ein gewisser Linienzug, eine „*Kurve*“[3]), die von jeder durch einen Abszissenpunkt x des Definitionsbereichs gehenden Vertikalen *ein*mal oder *mehr*mals getroffen wird, je nachdem $f(x)$ für das betreffende x *einen* oder *mehrere* reelle Werte besitzt. Die Beziehung $y = f(x)$ heißt alsdann die *Gleichung* dieser Kurve. (*Einfachste Beispiele:* 1) $y = ax + b$ $(-\infty < x < +\infty)$: Gleichung einer Geraden, welche die Abszissenachse im Punkte $x = -\frac{b}{a}$, die Ordinatenachse im Punkte $y = b$ schneidet. — 2) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ $(a > 0, |x| \leqq a)$: Gleichung eines Kreises um den Nullpunkt mit dem Radius a).

---

1) Ausführlicheres darüber s § 6, 7

2) Vgl § 7, Nr. 6.

3) Die Bezeichnung „*Kurve*“ wird hier in einem Sinne gebraucht, der von dem (freilich kaum exakt feststehenden) Begriffe einer „*geometrisch anschaulichen*“ Kurve recht weit entfernt sein kann

5. Die Funktionswerte y, die einem gewissen Bereiche $\{x\}$ entsprechen, bilden einen zweiten Bereich $\{y\}$, der sich indessen von dem ersteren dadurch unterscheidet, daß er *dieselbe* Zahl *beliebig* (d. h. auch *unendlich*) *oft* enthalten kann. Auf Grund der schon mit Einbeziehung dieses Falles entsprechend gefaßten Ergebnisse von § 1 hat die Menge $\{y\}$ eine *obere Grenze* $\overline{\mathfrak{G}}(y)$ und eine *untere Grenze* $\underline{\mathfrak{G}}(y)$, und zwar sind $\overline{\mathfrak{G}}(y)$, $\underline{\mathfrak{G}}(y)$ entweder *bestimmte Zahlen*, etwa:

$$\overline{\mathfrak{G}}(y) = G, \quad \underline{\mathfrak{G}}(y) = g, \tag{1a}$$

in welchem Falle $f(x)$ für den Bereich $\{x\}$ als *beschränkt* bezeichnet wird, oder es ist:

$$\overline{\mathfrak{G}}(y) = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \underline{\mathfrak{G}}(y) = -\infty \tag{1b}$$

Die *niemals negative* Differenz $D = \overline{\mathfrak{G}}(y) - \underline{\mathfrak{G}}(y)$ wird als *Schwankung* der Funktion im Bereiche $\{x\}$ bezeichnet. Dabei ist im Falle (1a):

$$D = G - g, \tag{2a}$$

d. h. D eine im allgemeinen *positive* Zahl (*Null* nur dann, wenn $f(x)$ im Bereiche $\{x\}$ *konstant*). Dagegen schreibt man:

$$D = +\infty, \tag{2b}$$

wenn mindestens einer der durch die Gleichungen (1b) charakterisierten Fälle eintritt.

6. Ein wichtiger, auf das Auftreten der *oberen* und *unteren Grenze* einer eindeutigen Funktion sich beziehender Satz ist der folgende:

Ist $\{x\}$ ein beschränkter Bereich, $y = f(x)$ eine daselbst eindeutig definierte Funktion mit der oberen Grenze $\overline{\mathfrak{G}}(y)$, der unteren Grenze $\underline{\mathfrak{G}}(y)$, so gibt es eine bzw. eine erste (dem Bereiche $\{x\}$ angehörige oder als Häufungsstelle auftretende) Stelle A bzw. a, in deren Umgebung $f(x)$ die obere Grenze $\overline{\mathfrak{G}}(y)$ bzw. die untere Grenze $\underline{\mathfrak{G}}(y)$ besitzt (gleichgültig, ob diese Grenzen endlich oder unendlich ausfallen).

Beweis. Da der Bereich $\{x\}$ beschränkt ist, so gibt es Zahlen x_0 und X, derart, daß für jedes x:

$$x_0 \leqq x \leqq X.$$

Halbiert man das Intervall $[x_0, X]$, so muß mindestens in *einem* der beiden Teilintervalle $f(x)$ die obere Grenze $\overline{\mathfrak{G}}(y)$ besitzen. Mit diesem *einen* oder, wenn in beiden Teilintervallen die obere Grenze $\overline{\mathfrak{G}}(y)$ herrschen sollte, mit dem *ersten* der beiden verfahre man in gleicher Weise und denke sich dieses Verfahren unbegrenzt fortgesetzt. Auf diese Weise entsteht eine unbegrenzte Folge von Intervallen, deren jedes einen Bestand-

teil (nämlich die Hälfte) des unmittelbar vorhergehenden bildet und jedesmal als das *erste* die obere Grenze $\overline{\mathfrak{G}}(y)$ aufweist. Da die Länge der Intervalle, nämlich $(\frac{1}{2})^\nu(X-x_0)$ $(\nu=1,2,3,\ldots)$, mit wachsendem ν unbegrenzt abnimmt, so konvergieren diese gegen einen bestimmten Punkt A, von dem behauptet wird, daß er die ausgesprochene Eigenschaft besitzt. Denn, wird $\delta > 0$ *beliebig klein* angenommen, so muß *zum mindesten* jedes der schließlich gegen die Stelle A konvergierenden Intervalle in die Umgebung $[A-\delta,\ A+\delta]$ hineinfallen, sobald $(\frac{1}{2})^\nu(X-x_0) < \delta$ geworden ist, woraus hervorgeht, daß $f(x)$ im Intervall $[A-\delta,\ A+\delta]$ jedenfalls die obere Grenze $\overline{\mathfrak{G}}(y)$ besitzt. Andererseits ist aber auch A die *erste* (bzw. *einzige*) Stelle dieser Art. Denn gäbe es ein $A' < A$ (also geometrisch gesprochen *links* von A) mit der gleichen Eigenschaft, so würde, wenn $\delta < \frac{1}{2}(A-A')$ angenommen wird, das Intervall $[A'-\delta,\ A'+\delta]$ die obere Grenze $\overline{\mathfrak{G}}(y)$ aufweisen und dabei *weiter links* liegen, als das Intervall $[A-\delta,\ A+\delta]$, was unmöglich ist, da das letztere bei hinlänglicher Fortsetzung des beschriebenen Verfahrens schließlich ja *jedes erste* Intervall von der fraglichen Beschaffenheit in sich aufnimmt.

Die Stelle A *kann* dem Bereiche $\{x\}$ angehören, und zwar ist das offenbar sicher der Fall, wenn derselbe aus *allen* Zahlen des Intervalls $[x_0, X]$ besteht oder wenn A eine isolierte Stelle mit dem realen Maximum $f(A)$ ist. Abgesehen von diesem letzten Falle ist A stets eine *Häufungsstelle* von Stellen x.

Der Beweis der entsprechenden Behauptung für die *untere* Grenze kann analog geführt werden oder kürzer, indem man das soeben gefundene Ergebnis auf die Funktion $(-f(x))$ anwendet und beachtet, daß: $\overline{\mathfrak{G}}(-y) = -\underline{\mathfrak{G}}(y)$.

7. Es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß der vorstehende Satz keinerlei Aussage über den Wert von $f(x)$ *an der Stelle* $x=A$ bzw. $x=a$ enthält. Insbesondere braucht, wenn etwa: $\overline{\mathfrak{G}}(y)=G$ bzw. $\underline{\mathfrak{G}}(y)=g$, *keineswegs* $f(A)=G$ bzw. $f(a)=g$ zu sein.

Beispiele: 1) Es bestehe der Bereich $\{x\}$ aus allen Zahlen des Intervalls $[-1, +1]$ und es werde gesetzt:

$$y = f(x) = x \lim_{n\to\infty}(1-x^{2n}),$$

also:

$$f(\pm 1) = 0, \quad \text{dagegen:} \quad f(x) = x \ \text{ für } |x| < 1.$$

Danach ist durchweg $|f(x)| < 1$, dagegen $\overline{\mathfrak{G}}(y)=1$, $\underline{\mathfrak{G}}(y)=-1$. In der *linken* Nachbarschaft von $x=1$ herrscht die *obere* Grenze 1, während $f(1)=0$ ist, in der *rechten* von $x=-1$ die *untere* Grenze -1, während $f(-1)=0$.

2) Für den nämlichen Bereich $[-1, +1]$ sei:

$$y = f(x) = (1 - x^2) \lim_{n \to \infty} \frac{(1+x)^n - 1}{(1+x)^n + 1}.$$

Dann ist für

$$-1 \leqq x < 0 : \lim_{n \to \infty} (1+x)^n = 0$$

$$x = 0 \quad : \quad \ldots \quad = 1$$

$$0 < x \leqq +1 : \quad \ldots \quad = +\infty$$

und daher:

$$\text{Für } -1 \leqq x < 0 : \lim_{n \to \infty} \frac{(1+x)^n - 1}{(1+x)^n + 1} = -1, \quad \text{also:} \quad f(x) = -(1 - x^2)$$

$$x = 0 \quad : \quad \ldots \quad = 0 \qquad f(0) = 0$$

$$0 < x \leqq 1 : \quad \ldots \quad = +1 \qquad f(x) = (1 - x^2).$$

Man hat also durchweg $|f(x)| < 1$, doch kommt $f(x)$ in der *rechten* Nachbarschaft von $x = 0$ dem Werte $+1$, in der *linken* dem Werte -1 beliebig nahe, so daß also $\overline{\mathfrak{G}}(y) = +1$, $\underline{\mathfrak{G}}(y) = -1$. *Beide* Grenzen herrschen in der Umgebung der Stelle $x = 0$, während $f(0) = 0$ ist.

8. Man beachte auch, daß eine *für jede einzelne Stelle* eines Bereiches $\{x\}$ *endliche* Funktion noch nicht *beschränkt* (nach älterer Ausdrucksweise: *im Bereiche endlich*) zu sein braucht, wie das folgende Beispiel verdeutlichen soll. Es sei:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{nx}{1 + nx^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{x}{x^2 + \frac{1}{n}}$$

und daher:

$$f(0) = 0, \quad \text{dagegen:} \quad f(x) = \frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0.$$

Es nimmt also $|f(x)|$ in der Nähe von $x = 0$ *beliebig große* Werte an, $f(x)$ ist also in jedem die Stelle $x = 0$ enthaltenden Intervall *an jeder einzelnen Stelle endlich*, ohne aber *beschränkt* zu sein.

Hingegen gilt die folgende Aussage:

Ist $f(x)$ in der Umgebung jeder einzelnen Stelle eines beschränkten abgeschlossenen Bereiches $\{x\}$ beschränkt, so ist $f(x)$ im gesamten Bereiche beschränkt.

Denn, wäre das letztere nicht der Fall, so müßte eine zu $\{x\}$ gehörige Stelle A von der Beschaffenheit existieren, daß $|f(x)|$ in der Umgebung die obere Grenze $+\infty$ hätte, was der Voraussetzung widerspricht.

§ 5 Grenzwerte reeller Funktionen einer reellen Veränderlichen. — Monotone Funktionen. — Hauptlimites.

1. Es sei $y = f(x)$ eindeutig definiert für irgendeinen Bereich $\{x\}$. Ist dann a eine (nicht notwendig dem Bereiche $\{x\}$ angehörige) *Häufungsstelle* einer gewissen zu $\{x\}$ gehörigen Menge von Zahlen $x > a$, also deren *unterer Limes*, b irgendeine bestimmte Zahl, so soll die folgende Definition gelten:

$f(x)$ hat für $x \to a$ (d. h. wenn x sich unbegrenzt der Stelle a nähert) den rechtsseitigen (rechten, vorwärts genommenen) Grenzwert b, kürzer: $f(x)$ hat für $x \to a + 0$ den Grenzwert b, in Zeichen:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b \quad \textit{oder auch:} \quad f(a+0) = b, \tag{1}$$

wenn zu jedem (beliebig kleinen) $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gehört, derart, daß:

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \textit{für:} \quad a < x < a + \delta\text{[1]}, \tag{2}$$

wenn also $f(x)$ dem Werte b beliebig nahe kommt für solche dem Bereiche $\{x\}$ angehörige x, welche der Stelle a auf der rechten Seite hinlänglich nahe liegen.

Man kann dieser Definition auch eine andere Form geben, vermöge deren der betreffende Grenzwert der *Funktion* $f(x)$ auf den Grenzwert gewisser *Zahlenfolgen* zurückgeführt wird.

Da a der *untere Limes* der in Betracht kommenden Zahlen x ist, so lassen sich aus der Menge dieser Zahlen x (unendlich viele) *monoton abnehmende* Zahlenfolgen mit dem *Grenzwert* a herausheben. Ist (x_ν) irgendeine dieser Folgen, so hat man wegen $x_\nu > a$ und $\lim_{\nu \to \infty} x_\nu = a$:

$$a < x_\nu < a + \delta \quad \text{etwa für} \quad \nu \geqq n,$$

und daher nach Ungl. (2):

$$|f(x_\nu) - b| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq n,$$

also schließlich:

$$\lim_{\nu \to \infty} f(x_\nu) = b, \tag{1a}$$

in Worten:

Ist im Sinne der oben gegebenen Definition: $\lim_{x \to a+0} f(x) = b$, so besteht die Beziehung (1a) *für jede dem Bereiche $\{x\}$ angehörige monoton abnehmende nach a konvergierende Zahlenfolge (x_ν).*

---

1) Dabei ist also der Wert $x = a$ ausdrücklich auszuschließen, mit andern Worten, über $f(a)$ wird durch die Beziehung (1) keinerlei Aussage gemacht.

Es gilt aber auch das *umgekehrte*. Denn, angenommen es bestehe Gl. (1a) für *jede* der mit (x_ν) bezeichneten Zahlenfolgen, ohne daß Gl. (1) bzw. Ungl. (2) erfüllt wäre. Dann müßte es, *wie klein* auch $\delta > 0$ angenommen wird, Zahlen x' und zwar deren offenbar *unendlich viele*[1]) geben, derart, daß:

$$a < x' < a + \delta \quad \text{und} \quad \text{zugleich:} \quad |f(x) - b| \geqq \varepsilon',$$

wo ε' eine (möglicherweise sehr kleine, aber *bestimmte*) positive Zahl bedeutet. Aus der Menge dieser Zahlen x' ließen sich aber *monoton abnehmend* gegen a konvergierende Folgen (x_ν') herausheben, derart, daß:

$$|f(x_\nu') - b| \geqq \varepsilon' \quad \text{für } \textit{jedes } \nu,$$

was der Voraussetzung (1a) widerspricht. Somit zieht diese letztere auch allemal die Existenz der Beziehung (1) nach sich, so daß man dieses Ergebnis mit dem unmittelbar vorangehenden folgendermaßen zusammenfassen kann:

Für die Existenz der Beziehung:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b \tag{1}$$

ist notwendig und hinreichend, daß für jede dem Bereiche $\{x\}$ *angehörige, monoton abnehmend nach* a *konvergierende Folge* (x_ν) *die Beziehung besteht:*

$$\lim_{\nu \to \infty} f(x_\nu) = b. \tag{1a}$$

2. Zur Ergänzung der in Nr. 1 gegebenen Definition dient die folgende:

Wir sagen, es bestehe die Beziehung:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \equiv f(a+0) = +\infty \quad \text{oder} \quad = -\infty, \tag{3}$$

wenn im Definitionsbereiche $\{x\}$ *zu jedem noch so großen* $B > 0$ *ein* $\delta > 0$ *gehört, derart, daß:*

$$f(x) > B \quad \text{oder} \quad < -B \quad \textit{für:} \quad 0 < x - a < \delta. \tag{4}$$

Ist die Beziehung (3) erfüllt, so hat man, analog wie bei dem in Nr. 1 behandelten Falle, für jede der (unendlich vielen) dem Bereiche $\{x\}$ angehörigen Folgen (x_ν) mit dem Grenzwert a:

$$\lim_{\nu \to \infty} f(x_\nu) = +\infty \quad \text{oder} \quad = -\infty. \tag{3a}$$

Andererseits ist aber auch die Existenz je einer dieser letzteren Bezie-

1) Andernfalls gäbe es ja unter den Zahlen x' eine *kleinste*, und es ließe sich daher δ soweit verkleinern, daß das Intervall $a < x < a + \delta$ keine der Zahlen x' mehr enthalten würde.

hungen für *jede* solche monotone Folge (x_ν) *hinreichend* für das Bestehen der entsprechenden Beziehung (3). Wäre dies nämlich *nicht* der Fall, so müßte es wiederum, *wie klein* auch $\delta > 0$ angenommen wird, (unendlich viele) Zahlen x' des Bereiches $\{x\}$ geben, derart, daß:

$$f(x') \leqq B' \quad \text{oder} \quad \geqq -B' \quad \text{für:} \quad a < x' < a + \delta,$$

wo B' eine möglicherweise sehr groß zu denkende, aber *feste* positive Zahl bedeutet. Dann ließen sich aber aus der Menge der Zahlen x' *monoton abnehmend* gegen a konvergierende Folgen (x_ν') herausheben, derart, daß:

$$f(x_\nu') \leqq B' \quad \text{oder} \quad \geqq -B' \text{ für } jedes\ \nu,$$

was der Voraussetzung (3a) widerspricht. Hiernach ergibt sich:

Für die Existenz der Beziehung:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty \quad \text{oder} \quad = -\infty \tag{3}$$

ist notwendig und hinreichend, daß für jede dem Bereiche $\{x\}$ angehörige monoton abnehmend nach a konvergierende Folge (x_ν) die Beziehung besteht:

$$\lim_{\nu \to \infty} f(x_\nu) = +\infty \quad \text{oder} \quad = -\infty. \tag{3a}$$

3. Ist a eine *Häufungszahl* von Zahlen $x < a$, die dem Definitionsbereiche von $f(x)$ angehören, so gelten für den *„linksseitigen" (linken, rückwärts genommenen)* Grenzwert $f(a-0)$ zunächst die folgenden analogen Definitionen:

Wir sagen, es bestehe die Beziehung:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \equiv f(a-0) = b' \text{ [1]}, \tag{4}$$

wenn zu jedem (beliebig kleinen) $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gehört, derart, daß:

$$|f(x) - b'| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad a - \delta < x < a; \tag{5}$$

und, es bestehe die Beziehung:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \equiv f(a-0) = +\infty \quad \text{oder} \quad = -\infty, \tag{6}$$

wenn zu jedem (beliebig großen) $B > 0$ ein $\delta > 0$ gehört, derart daß:

$$f(x) > B \quad \text{oder} \quad < -B \quad \text{für:} \quad a - \delta < x < a \tag{7}$$

Zugleich findet man analog wie oben:

---

1) Im Falle $a = 0$ schreibt man -0 statt $0-0$, also:

$$\lim_{x \to -0} f(x) \equiv f(-0) = b'.$$

Für die Existenz der Beziehung (4) *bzw.* (6) *ist notwendig und hinreichend, daß für jede dem Bereiche* $\{x\}$ *angehörige, monoton zunehmend nach* a *konvergierende Folge* (x_ν) *die Beziehung besteht:*

$$\text{(4a)} \qquad \lim_{\nu \to \infty} f(x_\nu) = b$$

bzw. eine der beiden folgenden:

$$\text{(6a)} \qquad \lim_{\nu \to \infty} f(x_\nu) = +\infty \quad \text{oder} \quad = -\infty.$$

4. Bezüglich der Beschaffenheit von $f(x)$ *an der Stelle* $x = a$, welche durch die vorstehenden Aussagen in keiner Weise präjudiziert wird, bestehen, falls $f(a+0)$ und $f(a-0)$ *voneinander verschieden* sind, die folgenden *vier* Möglichkeiten:

1) Die Stelle a braucht (wie am Anfang von Nr. 1 ausdrücklich hervorgehoben wurde) nicht zu dem mit $\{x\}$ bezeichneten Bereiche zu gehören, d. h. $f(a)$ braucht gar nicht definiert zu sein.

2) Es ist: $f(a) = f(a+0)$.

3) Es ist: $f(a) = f(a-0)$.

4) $f(a)$ ist sowohl von $f(a+0)$ als von $f(a-0)$ verschieden.

Jede dieser vier Möglichkeiten wird durch eins der folgenden Beispiele belegt.

$$1)\ f(x) = x \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n+1} - 1}{(x^n - 1)^2} = x \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{x - x^{-2n}}{(1 - x^{-n})^2}.$$

Man hat für $0 \leqq x < 1 : f(x) = -x$, also: $f(1-0) = -1$,
$x > 1 \quad : f(x) = x^2 \qquad f(1+0) = 1$,

$$f(1) \equiv 1 \cdot \frac{0}{0} \quad \text{d. h. } \textit{nicht definiert}.$$

$$2)\ f(x) = x \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{n x^n - 1}{n x^n + 1} = x \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1 - n^{-1} x^{-n}}{1 + n^{-1} x^{-n}}.$$

Für $0 \leqq x < 1 : f(x) = -x$, also: $f(1-0) = -1$,
$x > 1 \quad : f(x) = x \qquad f(1+0) = 1$,
$f(1) = 1 = f(1+0)$.

$$3)\ f(x) = x \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{x^n - n}{x^n + n} = x \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1 - n x^{-n}}{1 + n x^{-n}}.$$

Für $0 \leqq x < 1 : f(x) = -x$, also: $f(1-0) = -1$,
$x > 1 \quad : f(x) = x \qquad f(1+0) = 1$,
$f(1) = -1 = f(1-0)$.

$$4)\ f(x) = x \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1} = x \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1 - x^{-n}}{1 + x^{-n}}.$$

$$\begin{array}{llll} \text{Für} \quad 0 \leqq x < 1 : f(x) = -x, & \text{also:} & f(1-0) = -1, \\ \quad\quad x > 1 \quad : f(x) = x & & f(1+0) = 1, \\ & & f(1) = 0 \neq f(1 \pm 0). \text{—} \end{array}$$

Wenn die beiden Grenzwerte $f(a \pm 0)$ *unendlich* sind, so kann $f(a)$ eine *bestimmte Zahl* sein, wie das Beispiel in Nr. 8 des vorigen Paragraphen zeigt, nämlich:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{nx}{1 + nx^2} \begin{cases} = \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ = 0 & \text{„} \quad x = 0. \end{cases}$$

Man hat also:

$$f(-0) = -\infty, \quad f(+0) = +\infty, \quad f(0) = 0.$$

Andernfalls besteht nur die Möglichkeit, daß $f(x)$ für $x = a$ *nicht definiert* ist. Man pflegt in diesem Falle dem Zeichen $f(a)$ den *„uneigentlichen“* Wert ∞ (*ohne* Vorzeichen) beizulegen und zwar unabhängig davon, ob $f(a-0)$ und $f(a+0)$ mit entgegengesetztem oder mit gleichem Vorzeichen behaftet sind.

Man schreibt daher, wenn:

$$f(x) = \frac{1}{x-a}, \quad \text{also:} \quad f(a-0) = -\infty, \quad f(a+0) = +\infty$$

oder auch

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}, \quad \text{„} : \quad f(a-0) = f(a+0) = +\infty,$$

in *beiden* Fällen:

$$f(a) = \infty.$$

5. Bisher wurden (abgesehen von dem letzten Beispiel, bei welchem $f(a+0) = f(a-0) = +\infty$) nur solche Beispiele in Betracht gezogen, bei denen $f(a+0)$ und $f(a-0)$ voneinander *verschieden* ausfielen. Nun ist ja, wie weiter unten noch des näheren ausgeführt wird, schon die *Existenz* von $f(a+0)$ oder $f(a-0)$ im Grunde genommen als ein *Sonderfall* zu betrachten. In der *Funktionenlehre* nimmt aber gerade der noch *speziellere* Fall, daß *beide* Grenzwerte nicht nur (im engeren Sinne) *existieren*, sondern miteinander (übrigens sogar noch mit $f(a)$) *zusammenfallen*, eine so hervorragende Stellung ein, daß er trotz seiner außerordentlichen *Besonderheit* in ausgedehnten und zumal den fruchtbarsten Gebieten dieser Disziplin geradezu die Rolle des *„allgemeinen“* Falles spielt.

Ist nun:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x)$$

(und zwar gleichgültig, ob *endlich* oder mit bestimmtem Vorzeichen *un-*

endlich), so faßt man diese *beiden* Bezeichnungen in die *eine* zusammen:

$$(8) \qquad \lim_{x \to a} f(x) \begin{cases} = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) \\ = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)^{1)}, \end{cases}$$

d. h. man *definiert* als *Grenzwert* von $f(x)$ für $x \to a$ (ohne den Zusatz ± 0) den *gemeinsamen Wert des rechts- und linksseitigen Grenzwertes.* Durch Zusammenfassung der in Nr. 1—3 gemachten Aussagen ergibt sich also:

Wir sagen, $f(x)$ habe für $x \to a$ den Grenzwert b bzw. $+\infty$ oder $-\infty$, in Zeichen:

$$(9) \quad \lim_{x \to a} f(x) = b, \quad \textit{bzw.} \quad \lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \textit{oder} \quad = -\infty,$$

wenn zu jedem (beliebig kleinen) $\varepsilon > 0$ bzw. zu jedem (beliebig großen) $B > 0$ ein $\delta > 0$ gehört, derart, daß:

$$(10) \quad \begin{cases} |f(x) - b| < \varepsilon, \quad \textit{bzw.} \quad f(x) > B \quad \textit{oder} \quad < -B \\ \textit{für:} \qquad 0 < |x - a| < \delta. \end{cases}$$

Hierfür ist notwendig und hinreichend, daß für jede dem Definitionsbereiche $\{x\}$ angehörige, monoton[2]) *gegen a konvergierende Folge (x_ν) die Beziehung besteht:*

$$(9\text{a}) \quad \lim_{\nu \to \infty} f(x_\nu) = b, \quad \textit{bzw.} \quad \lim_{\nu \to \infty} f(x_\nu) = +\infty \quad \textit{oder} \quad = -\infty.$$

Auch hier ist, wie aus (10) unzweideutig hervorgeht, über $f(a)$ selbst keinerlei Aussage gemacht. Zwar *kann* $f(a)$ mit $\lim\limits_{x \to a}$ *zusammenfallen* und dieser Fall, der eine ganz besondere prinzipielle Wichtigkeit besitzt, wird uns in den folgenden beiden Paragraphen noch ausführlich beschäftigen. Andererseits kann aber $f(a)$ auch von $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *verschieden* ausfallen[3]) oder braucht *überhaupt nicht definiert* zu sein.[4])

---

1) Unrichtig wäre es dagegen, nach Analogie von (8) *ohne weiteres* zu schreiben:

$$f(a) \begin{cases} = f(a+0) \\ = f(a-0), \end{cases}$$

da ja das Zeichen $f(a)$ schon seine eigene Bedeutung hat, die auch beim Zusammenfallen von $f(a+0)$ und $f(a-0)$ ein davon *verschiedenes* Ergebnis liefern kann (vgl. die Beispiele am Ende von Nr. 5)

2) D. h. jede monoton *zu*- oder auch *ab*nehmende Folge

3) Beispiel: $f(x) = (1 - x^2) \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n x^2}{n x^2 + 1}$, also:

$$f(x) = 1 - x^2 \quad \text{für} \quad x \neq 0,$$
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1,$$

dagegen
$$f(0) = 0.$$

(Vgl. hierzu § 6, Nr. 2, Beispiel 4.)

4) Beispiel: $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, also: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to} \left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{x^2}} = 0$, während $f(0)$ *nicht definiert ist.* (Vgl. § 6, Nr. 2, Beispiel 5.)

6. Ist $f(x)$ eindeutig definiert für einen Bereich $\{x\}$, der *nach oben unbeschränkt* ist, so bestehen die folgenden, den zuvor gegebenen analoge Definitionen:

Wir sagen, $f(x)$ habe für $x \to +\infty$ den Grenzwert b bzw. $+\infty$ oder $-\infty$, in Zeichen:

$$(11) \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b, \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{oder} \quad = -\infty,$$

wenn zu jedem (beliebig kleinen) $\varepsilon > 0$ bzw. (beliebig großen) $B > 0$ ein $A > 0$ gehört, derart, daß:

$$(12) \quad \begin{cases} |f(x) - b| < \varepsilon, & \textit{bzw.} \quad f(x) > B \quad \text{oder} \quad < -B \\ \textit{für:} & \qquad x > A. \end{cases}$$[1]

Hierfür ist notwendig und hinreichend, daß für jede dem Bereiche $\{x\}$ angehörige, monoton ins Unendliche wachsende Folge (x_ν) die Beziehung besteht:

$$(11\text{a}) \quad \lim_{\nu \to \infty} f(x_\nu) = b, \quad \textit{bzw.} \quad \lim_{\nu \to \infty} f(x_\nu) = +\infty \quad \text{oder} \quad = -\infty.$$

Das analoge gilt für den Grenzwert $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Beispiele:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{(s. I}_1\text{, § 33, Gl. (12, 13), S. 200).}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^{2n+1} = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} x^{2n+1} = -\infty \quad (n \text{ eine natürliche Zahl}).$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{(s. I}_1\text{, § 38, Gl. (1a), S. 239)}, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0.$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^{-m} = 0 \quad (m \text{ eine natürliche Zahl}).$$

7. Die Feststellung, daß jeder Grenzwert einer *Funktion* $f(x)$ auf Grenzwerte von *Zahlenfolgen* $f(x_\nu)$ zurückgeführt werden kann, setzt uns in den Stand, gewisse in der „Zahlenlehre" für Grenzwerte der letzteren Art hergeleitete Ergebnisse unmittelbar auf Grenzwerte der vorliegenden

---

1) Man kann diesen Fall durch Substitution einer neuen Veränderlichen x' an Stelle von x, nämlich:

$$x = \frac{1}{x' - a},$$

auf den in Nr. 1 behandelten eines *rechtsseitigen Grenzwertes* für $x \to a$ zurückführen. Da

$$x' = a + \frac{1}{x},$$

so hat man:

$$x' \to a + 0 \quad \text{für} \quad x \to +\infty,$$

und daher:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x' \to a+0} f\left(\frac{1}{x' - a}\right).$$

Art zu übertragen.[1]) Dies gilt insbesondere von dem auch als *Fundamentalsatz der Analysis* bezeichneten *„allgemeinen Konvergenzprinzip“* (s. I_1, § 28, S. 167), dem man nunmehr die folgende Fassung geben kann:

Für die Existenz eines endlichen Grenzwertes: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ *ist notwendig und hinreichend, daß bei beliebig klein vorgeschriebenem* $\varepsilon > 0$ *und passend gewähltem* $\delta > 0$ *die Beziehung besteht:*

$$(13) \qquad f(x') - f(x'') < \varepsilon \quad \textit{falls:} \quad a < \begin{Bmatrix} x' \\ x'' \end{Bmatrix} < a + \delta$$

(unter x', x'' *Zahlen verstanden, die dem Definitionsbereiche* $\{x\}$ *angehören).*

Die *Notwendigkeit* der obigen Bedingung folgt unmittelbar aus der in Nr. 1 als *Definition* der Beziehung: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$ angegebenen Ungleichung (2). Schreibt man daselbst $\frac{\varepsilon}{2}$ statt ε, so hätte man insbesondere:

$$|f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{falls:} \quad a < x' < a + \delta,$$

$$|f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{,,} \quad a < x'' < a + \delta,$$

woraus dann unmittelbar Ungl. (13) resultiert.

Andererseits müssen die Glieder *jeder* dem Bereiche $\{x\}$ angehörigen, monoton abnehmend gegen a konvergierenden Folge (x_ν) für hinlänglich große ν in das Innere des Intervalls $[a, a + \delta]$ hineinfallen, so daß also nach Ungl. (13):

$$|f(x_{\nu+\varrho}) - f(x_\nu)| < \varepsilon \quad (\text{etwa für } \nu \geqq n)$$

und somit nach dem oben angeführten Konvergenzsatze für Zahlenfolgen ein endlicher $\lim\limits_{\nu \to \infty} f(x_\nu)$ und zwar für alle möglichen Folgen (x_ν) der fraglichen Art *derselbe* Limes[2]), schließlich also damit übereinstimmend auch $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ existiert.

Der analoge Satz gilt für $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ mit dem Unterschiede, daß an die Stelle des Intervalls $[a, a + \delta]$ ein solches von der Form $[a - \delta, a]$ bzw. $[a - \delta, a + \delta]$ tritt, im letzteren Falle *mit Ausschluß von* $x = a$.

---

1) Man könnte sie selbstverständlich auch *direkt* aus den zur Definition der Grenzwertexistenz dienenden *Ungleichungen* herleiten.

2) Es können nicht etwa zwei verschiedene der mit (x_ν) bezeichneten Folgen *verschiedene* Limites liefern, da aus zwei derartigen Folgen eine (gleichfalls monoton abnehmende) mit *divergentem* $f(x_\nu)$ sich zusammensetzen ließe.

Auch die Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten von *Zahlenfolgen* (s. I_1, § 28, Nr. 3, IV, S. 170) lassen sich in analoger Weise auf Grenzwerte von *Funktionen* übertragen. Danach hat man, wenn $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_m(x)$ für irgendeinen der Grenzübergänge $x \to a \pm 0$, $x \to a$ oder $x \to \pm\infty$ die endlichen Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ liefern und $R(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ einen *rationalen Ausdruck* in $y_1, y_2, \ldots, y_m$ bedeutet (a. a. O S. 170, Gl (15)):

$$(14)\quad \begin{cases} \lim R(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)) = R(b_1, b_2, \ldots, b_m) \\ \qquad\qquad = R(\lim f_1(x), \lim f_2(x), \ldots, \lim f_m(x)), \end{cases}$$

unter „lim" irgendeinen bestimmten der oben bezeichneten Grenzübergänge verstanden und vorausgesetzt, daß jeder der in $R(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ vorkommenden Nenner von Null verschieden ist.

Insbesondere ist also, falls die rechts stehenden Grenzwerte existieren:

$$(15)\quad \begin{cases} \lim (f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim f_1(x) \pm \lim f_2(x) \\ \lim (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim f_1(x) \cdot \lim f_2(x) \\ \lim \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)} \quad (\lim f_2(x) \neq 0). \end{cases}$$

8. Ist $x = a$ oder $x = \pm\infty$ eine Häufungsstelle des Definitionsbereiches $\{x\}$ der Funktion $f(x)$, so braucht diese für $x \to a \pm 0$ bzw. $x = \pm\infty$ *keinen Grenzwert* zu haben (wie für den Fall $x = a$ bereits am Anfang von Nr. 5 hervorgehoben wurde). Dies tritt indessen stets ein, wenn $f(x)$ in entsprechendem Umfange *monoton* verläuft. Und zwar sagen wir, $f(x)$ verhalte sich in einem gewissen Bereiche $\{x\}$ *monoton*, wenn für jedes dem Bereiche entnommene Wertepaar $x' < x''$ entweder *stets*: $f(x') \leqq f(x'')$ oder *stets*: $f(x') \geqq f(x'')$.

Ist durchweg: $f(x') < f(x'')$, so heißt $f(x)$ *beständig zunehmend*, dagegen *niemals abnehmend*[1]), wenn nur feststeht, daß beständig: $f(x') \leqq f(x'')$ Entsprechendes gilt bezüglich der Bezeichnungen *beständig abnehmend* und *niemals zunehmend*.

Angenommen, es sei zunächst $f(x)$ *monoton* für einen Bereich $\{x\}$ mit dem *oberen Limes* a und es bedeute (x_ν) eine dem Bereiche $\{x\}$ angehörige, monoton zunehmend nach a konvergierende Folge, so ist auch die Folge $(f(x_\nu))$ eine *monotone*, besitzt also einen *Grenzwert* (der *endlich*

1) Einfaches Beispiel einer (nicht konstanten) *niemals abnehmenden* Funktion: $E(x)$, d h. die größte in $x \geqq 0$ enthaltene ganze Zahl, die sonst auch mit $[x]$ bezeichnet wird (s I_2, § 52, S. 356). Ist $n \geqq 0$ eine ganze Zahl so ist:

$$E(x) = n \quad \text{für:} \quad n \leqq x < n + 1$$
$$E(n + 1) = n + 1.$$

Die Funktion $E(x)$ bleibt also in jedem Intervall $n \leqq x < n + 1$ *konstant*, nämlich $= n$ und geht bei $x = n + 1$ *zunehmend* in $n + 1$ über.

oder mit bestimmtem Vorzeichen *unendlich* sein kann). Das gleiche gilt für eine Folge $(f(x_\nu'))$, wenn (x_ν') irgendeine andere Folge von derselben Art wie (x_ν) bedeutet. Dann müssen aber *die beiden Grenzwerte* $\lim\limits_{\nu \to \infty} f(x_\nu)$ und $\lim\limits_{\nu \to \infty} f(x_\nu')$ *zusammenfallen*, genauer gesagt, *dieselbe endliche Zahl* vorstellen oder *gleichzeitig* und *mit demselben Vorzeichen unendlich* ausfallen. Denn, vereinigt man die beiden monotonen Folgen (x_ν), (x_ν') zu einer einzigen *monoton* nach a konvergierenden (x_ν''), so besitzt auch die wiederum *monotone* Folge $(f(x_\nu''))$ einen *Grenzwert*, und es müssen sodann die Folgen $(f(x_\nu'))$ und $(f(x_\nu''))$ als Teilfolgen von $(f(x_\nu''))$ *denselben Grenzwert* liefern. Der gemeinsame Grenzwert aller möglichen Folgen von der Form $(f(x_\nu))$ ist dann identisch mit dem fraglichen $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$.

Ist a der *untere Limes* eines Bereiches $\{x\}$, in welchem $f(x)$ sich *monoton* verhält, so ergibt sich in analoger Weise die Existenz von $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$

Liegt die gleichzeitig für Zahlen $x < a$ und $x > a$ als Häufungsstelle erscheinende Zahl a im Innern eines Bereiches $\{x\}$, in welchem $f(x)$ *monoton* ist, so existieren also die beiden Grenzwerte $f(a-0)$ und $f(a+0)$. Diese müssen dann aber stets *endlich* ausfallen. Denn, da es auf Grund des Charakters der Stelle a Zahlen $x' < a$ und $x'' > a$ im Bereiche $\{x\}$ gibt, für welche $f(x')$ und $f(x'')$ *definiert* sind, also bestimmte Zahlen vorstellen, so hat man infolge der vorausgesetzten Monotonie von $f(x)$

$$\text{entweder:} \quad f(x') \leqq f(a-0) \leqq f(a+0) \leqq f(x'')$$
$$\text{oder:} \quad f(x') \geqq f(a-0) \geqq f(a+0) \geqq f(x''),$$

woraus die *Endlichkeit* von $f(a-0)$ und $f(a+0)$ unmittelbar hervorgeht Dagegen können $f(a-0)$ und $f(a+0)$ auch in dem vorliegenden Falle voneinander *verschieden* sein.[1])

In analoger Weise, wie die Existenz von $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x)$, ergibt sich auch diejenige von $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ oder $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, falls $f(x)$ in einem *nach oben* bzw. *nach unten* unbeschränkten Bereiche *monoton* verläuft.

9. Es bleibt noch der eigentlich „*allgemeine*" Fall zu erledigen, daß $f(x)$ für $x \to a \pm 0$ oder $x \to \pm\infty$ *keinen* Grenzwert besitzt.

---

1) Beispiel: $f(x) = x + \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$. Man hat:

$$f(x) = x - 1 \quad \text{für:} \quad 0 \leq x < 1$$
$$f(x) = x + 1 \quad \text{für:} \quad x > 1.$$

Die Funktion ist für $x > 0$ *monoton zunehmend* Dabei ist:

$$f(1-0) = 0, \quad f(1+0) = 2$$

(übrigens: $f(1) = 1$).

Es sei zunächst $y = f(x)$ eindeutig definiert für einen Bereich $\{x\}$ mit dem *unteren Limes a.* Wird $\delta > 0$ angenommen und x der Bedingung unterworfen: $a < x < a + \delta$, so besitzen die entsprechenden Funktionswerte eine (endliche oder positiv unendliche) *obere Grenze*, die im allgemeinen von der Wahl der Zahl δ abhängen wird und deshalb mit $\overline{\mathfrak{S}}(y, \delta)$ bezeichnet werden möge. Wird jetzt δ *verkleinert*, so kann $\overline{\mathfrak{S}}(y, \delta)$ *niemals zunehmen.* $\overline{\mathfrak{S}}(y, \delta)$ verhält sich also bei abnehmendem δ *monoton*, und es existiert infolgedessen der Grenzwert $\lim\limits_{\delta \to +0} \overline{\mathfrak{S}}(y, \delta)$ (als endlich oder positiv unendlich). Wir bezeichnen ihn als den *rechtsseitigen* (rechten, vorwärts genommenen) *oberen Limes* von $f(x)$ für $x \to a$ und bedienen uns der Schreibweise:

$$\lim_{\delta \to +0} \overline{\mathfrak{S}}(y, \delta) = \overline{\lim_{x \to a+0}} f(x) = \overline{f(a + 0)}. \tag{16a}$$

Ebenso hat y für $a < x < a + \delta$ eine (endliche oder negativ unendliche) *untere Grenze* $\underline{\mathfrak{S}}(y, \delta)$, welche bei *abnehmendem δ niemals abnehmen* kann. Der infolgedessen allemal existierende $\lim\limits_{\delta \to +0} \underline{\mathfrak{S}}(y, \delta)$ heißt der *rechtsseitige (rechte, vorwärts genommene) untere Limes* von $f(x)$ für $x \to a$, in Zeichen:

$$\lim_{\delta \to +0} \underline{\mathfrak{S}}_\delta(y) = \underline{\lim_{x \to a+0}} f(x) = \underline{f(a + 0)}. \tag{16b}$$

Die beiden Grenzwerte $\underline{f(a + 0)}$ und $\overline{f(a + 0)}$ werden auch als *rechtsseitige* (rechte, vorwärts genommene) *Hauptlimites* von $f(x)$ für $x \to a$ zusammengefaßt.

Wird angenommen, daß $\underline{f(a + 0)}$ und $\overline{f(a + 0)}$ beide *endlich* ausfallen, etwa:

$$\underline{f(a + 0)} = \underline{b}, \quad \overline{f(a + 0)} = \overline{b}, \tag{17}$$

so läßt sich, da $\underline{f(a + 0)}$ für *hinlänglich kleine* $\delta > 0$ zum mindesten[1] *beliebig nahe* an $\underline{\mathfrak{S}}(y, \delta)$, $\overline{f(a + 0)}$ beliebig nahe an $\overline{\mathfrak{S}}(y, \delta)$ liegen muß, die Bedeutung dieser Zahlen auch folgendermaßen aussprechen: Wird $\varepsilon > 0$ *beliebig* klein angenommen, so hat man bei *hinlänglich* kleinem $\delta > 0$ für *alle* dem Definitionsbereiche von $f(x)$ angehörigen x des Intervalls $a < x < a + \delta$:

$$\underline{b} - \varepsilon < f(x) < \overline{b} + \varepsilon; \tag{18a}$$

andererseits gibt es in dem nämlichen Intervall stets (unendlich viele) Stellen x', x'', für welche:

$$\underline{b} - \varepsilon < f(x') < \underline{b} + \varepsilon, \qquad \overline{b} - \varepsilon < f(x'') < \overline{b} + \varepsilon. \tag{18b}$$

Daraus folgt weiter, daß sich aus dem Bereiche $\{x\}$ *monoton abnehmend*

---

1) Es könnte sogar von einem gewissen $\delta > 0$ ab geradezu $\underline{\mathfrak{S}}(y, \delta) = \underline{f(a + 0)}$ bzw. $\overline{\mathfrak{S}}(y, \delta) = \overline{f(a + 0)}$ sein

nach a konvergierende Folgen (x_ν'), (x_ν'') herausheben lassen, derart, daß:

$$(19)\qquad \lim_{\nu \to \infty} f(x_\nu') = \underline{b}, \quad \lim_{\nu \to \infty} f(x_\nu'') = \overline{b}.$$

Es ist leicht ersichtlich, wie diese Aussagen zu modifizieren sind, wenn $-\infty$ an die Stelle von $\underline{b}$ bzw. $+\infty$ an die Stelle von $\overline{b}$ tritt.[1])

Analoge Aussagen gelten auch für die *linksseitigen (linken, rückwärts genommenen) Hauptlimites*, den *unteren:* $\underline{\lim}_{x \to a-0} f(x) = \underline{f(a-0)}$ und den *oberen:* $\overline{\lim}_{x \to a-0} f(x) = \overline{f(a-0)}$.

Werden die beiden Grenzübergänge $x \to a - 0$ und $x \to a + 0$ zu einem einzigen: $x \to a$ zusammengefaßt (d. h. läßt man an die Stelle *je einer* der beiden Bedingungen: $a - \delta < x < a$ und: $a < x < a + \delta$ die folgende treten: $0 < |x - a| < \delta$), so definiert man als *unteren* bzw. *oberen Limes* von $f(x)$ für $x \to a$ diejenige Zahl, die gleich ist der *kleineren* (im Gleichheitsfalle *jeder*) der beiden Zahlen $\underline{f(a-0)}$ und $\underline{f(a+0)}$ bzw. der *größeren* (eventuell *jeder*) der beiden Zahlen $\overline{f(a-0)}$ und $\overline{f(a+0)}$.[2])

10. Ist der Bereich x, für welchen $y = f(x)$ als eindeutige Funktion definiert ist, *nach oben unbeschränkt* und liegt nicht der in Nr. 6 behandelte Fall vor, daß $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ (als endlich oder mit bestimmtem Vorzeichen unendlich) *existiert*, so läßt sich (ähnlich wie zuvor für $x \to a + 0$) ein *oberer* und *unterer Limes* für $x \to \infty$ in folgender Weise definieren. Wird eine positive Zahl A *beliebig groß* angenommen, so haben die Funktionswerte y für $x > A$ eine im allgemeinen von A abhängige *obere* und *untere Grenze:* $\overline{\mathfrak{G}}(y, A)$ bzw. $\underline{\mathfrak{G}}(y, A)$. Da $\overline{\mathfrak{G}}(y, A)$ mit wachsendem A *niemals zunimmt*, $\underline{\mathfrak{G}}(y, A)$ *niemals abnimmt*, so *existieren* die beiden Grenzwerte $\lim_{A \to +\infty} \overline{\mathfrak{G}}(y, A)$ und $\lim_{A \to +\infty} \underline{\mathfrak{G}}(y, A)$, welche alsdann als *oberer* und *unterer Limes* von $f(x)$ für $x \to +\infty$ bezeichnet werden, in Zeichen:

$$(20)\qquad \overline{\lim_{x \to +\infty}} f(x) = \lim_{A \to +\infty} \overline{\mathfrak{G}}(y, A), \quad \underline{\lim_{x \to +\infty}} f(x) = \lim_{A \to +\infty} \underline{\mathfrak{G}}(y, A).^{3)}$$

Analoges gilt für $x \to -\infty$.

1) Der Fall, in welchem *beide* Hauptlimites in den *einen* $-\infty$ oder $+\infty$ zusammenfallen, wurde bereits in Nr 3 erledigt

2) Unter diese Rubrik gehört auch der früher behandelte Fall, daß $f(a-0)$ und $f(a+0)$ beide *existieren*, aber *verschieden* sind. Da in diesem Falle $f(a-0)$ an die Stelle von $\underline{f(a-0)}$ und $\overline{f(a-0)}$ tritt, ebenso $f(a+0)$ an die Stelle von $\underline{f(a+0)}$ und $\overline{f(a+0)}$, so ist auf Grund der im Text gegebenen Definition $\underline{\lim}_{x \to} f(x)$ gleich der *kleineren*, $\overline{\lim}_{x \to a} f(x)$ gleich der größeren der beiden Zahlen $f(a-0)$ und $f(a+0)$.

3) Auch dieser Fall kann (vgl S 40, Fußn. 1) durch die Substitution $x = \frac{1}{x' - a}$ auf den zuvor behandelten $x' \to a + 0$ zurückgeführt werden.

§ 6. Stetige Funktionen: verschiedene Formen der Stetigkeitsbedingung. — Unstetigkeitsstellen. — Stetigkeit des absoluten Betrages einer stetigen Funktion. — Stetigkeit von Funktionen, die aus stetigen Funktionen zusammengesetzt sind.

1. Der Bereich $\{x\}$ sei jetzt in dem Sinne ein *stetiger*, daß er *alle* Zahlen eines abgeschlossenen Intervalls $[x_0, X]$ umfaßt. Die Funktion $f(x)$ sei für jede Stelle dieses Bereiches, allenfalls mit Ausnahme einer endlichen Anzahl, als bestimmte Zahl definiert. Alsdann gilt die folgende *Definition*[1]):

Die Funktion $f(x)$ heißt stetig für $x = a$ oder auch an der Stelle (im Punkte) a, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(I) $f(a)$ *ist eine bestimmte Zahl,*

(II) $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

anders geschrieben: $f(a-0) = f(a) = f(a+0)$.

Besteht die Bedingung von der Form (II) *nur für den linken oder rechten Grenzwert, ist also*

nur: $f(a-0) = f(a)$

oder nur: $f(a+0) = f(a)$,

so heißt $f(x)$ nur nach links (oder rückwärts) bzw. nach rechts (oder vorwärts) stetig.

Eine für $x = a$ *schlechthin stetige* Funktion ist also daselbst sowohl *rückwärts* als *vorwärts stetig.*

Auf Grund der in Nr. 5 des vorigen Paragraphen gegebenen Definition von $\lim_{x \to a} f(x)$ (s. a. a. O. Gl. (9), Ungl. (10)) und mit Berücksichtigung des Umstandes, daß in dem vorliegenden Zusammenhange der Wert $x = a$ nicht mehr ausgeschlossen zu werden braucht, läßt sich die Bedingung (II) durch die folgende ersetzen[2]):

---

1) Es hat keine besondere Schwierigkeit, diese Definition auf den Fall auszudehnen, daß der Definitionsbereich von x *kein stetiger* ist. Das gleiche gilt auch *mutatis mutandis* von den meisten aus jener Definition resultierenden Folgerungen Da aber die fragliche Erweiterung des Stetigkeitsbegriffes nur für Untersuchungen in Betracht kommt, die völlig abseits von den hier vorliegenden Zielen liegen, so wollen wir zur Vermeidung der damit verknüpften Weitläufigkeiten davon absehen.

2) Genau genommen ist in der Fassung der Bedingung (IIa) auch die Bedingung (I) schon enthalten, da deren Schreibweise nur einen Sinn hat, wenn $f(a)$ eine bestimmte Zahl vorstellt.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ *muß ein* $\delta > 0$ *existieren, derart, daß:*

(IIa) $\quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad$ *für:* $\quad 0 \leqq |x - a| < \delta,$

anders geschrieben:

(IIa') $\quad |f(a + \vartheta\delta) - f(a)| < \varepsilon \quad$ *für:* $\quad -1 < \vartheta < 1;$

oder auch (vgl. a. a. O. Gl. (9a)) durch die folgende:

Für jede monoton zu- oder abnehmende Zahlenfolge (x_ν) *mit dem Grenzwert* $\lim_{\nu \to \infty} x_\nu = a$ *muß die Beziehung bestehen:*

(IIb)
$$\lim_{\nu \to \infty} f(x_\nu) = f(\lim_{\nu \to \infty} x_\nu).$$

Eine weitere Form der Stetigkeitsbedingung ergibt sich in folgender Weise. Aus (IIa) folgt, wenn man ε durch $\frac{\varepsilon}{2}$ ersetzt und δ nötigenfalls entsprechend verkleinert:

$$\left.\begin{array}{l} |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |f(x') - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \quad \textit{wenn:} \quad a - \delta \leqq \left\{\begin{matrix} x \\ x' \end{matrix}\right\} \leqq a + \delta,$$

und daher:

(IIc) $\quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon, \quad$ *wenn:* $\quad a - \delta \leqq \left\{\begin{matrix} x \\ x' \end{matrix}\right\} \leqq a + \delta.$

Diese auf Grund ihrer Herleitung zunächst als *notwendig* erscheinende Stetigkeitsbedingung wird aber sofort auch als *hinreichend* erkannt, da es ja freisteht, $x' = a$ zu setzen, wodurch die Bedingung (IIa) wieder zum Vorschein kommt. Übrigens läßt sich die Bedingungsform (IIc) auch ganz direkt aus (II) herleiten, wenn man als notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines endlichen $\lim_{x \to a} f(x)$ das *allgemeine Konvergenzprinzip* (s. § 5, Nr. 7, S. 41) in Anspruch nimmt. Ferner gestattet sie noch die folgende, für gewisse Zwecke wertvolle Umformung.

Die Funktion $f(x)$ ist für die bezeichnete Umgebung der Stelle a sicher *beschränkt* (da aus Ungl. (IIa) folgt: $|f(x)| < |f(a)| + \varepsilon$), sie besitzt daselbst eine bestimmte *obere* und *untere* Grenze G_δ bzw. g_δ. Es gibt dann ein solches $f(x)$ bzw. $f(x')$, welches dem G_δ bzw. g_δ zum mindesten *beliebig nahe* kommt, so daß also die Differenz $f(x) - f(x')$ sich *beliebig wenig* von der *„Schwankung"* $D_\delta \equiv G_\delta - g_\delta > 0$[1]) unterscheidet, man also mit Sicherheit setzen kann:

$$f(x) - f(x') \geqq \tfrac{1}{2} D_\delta.$$

Dann folgt aber aus Ungl. (IIc)

(IId)
$$D_\delta < 2\varepsilon,$$

1) Der Fall $D_\delta = 0$ erledigt sich ohne weiteres

in Worten: *Ist $f(x)$ an der Stelle a stetig, so wird die Schwankung von $f(x)$ für ein hinlänglich kleines Intervall $[a-\delta, a+\delta]$ beliebig klein.*

Die Bedingung (II d), die hiernach zunächst als *notwendig* für die *Stetigkeit* von $f(x)$ an der Stelle a erscheint, erweist sich aber (in Verbindung mit (I)) ohne weiteres auch als *hinreichend*. Denn aus (II d) folgt *a fortiori*, daß:

$$|f(x) - f(x')| < 2\varepsilon, \quad \text{wenn:} \quad a - \delta \leqq \begin{Bmatrix} x \\ x' \end{Bmatrix} \leqq a + \delta,$$

abgesehen von dem sachlich belanglosen Auftreten von 2ε an Stelle von ε, übereinstimmend mit Ungl. (II c).

Unstetig heißt $f(x)$ für $x = a$, die Stelle a selbst eine *Unstetigkeitsstelle* (ein *Unstetigkeits-* oder *Diskontinuitätspunkt*), wenn *mindestens eine* der oben mit (I) und (II) bezeichneten (bzw. mit (II) gleichwertigen) Bedingungen nicht erfüllt ist. Dies findet also insbesondere allemal statt, wenn $f(x)$ für $x = a$ *nicht definiert* ist, wenn $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *unendlich* ausfällt oder *nicht existiert*.[1])

2. **Beispiele.** 1) $f(x) = x^n$. Man hat für jedes ganzzahlige $n \geqq 2$ [2]):

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + a x^{n-2} + \cdots + a^{n-2} x + a^{n-1}.$$

Wird $r > |a|$, im übrigen beliebig groß fixiert und $|x| < r$ angenommen, so folgt:

$$|x^n - a^n| < |x - a| \quad n v^{n-1},$$

also:

$$|x^n - a^n| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad |x - a| < \delta = \frac{\varepsilon}{n v^{n-1}}.$$

Somit ist x^n stetig für jedes endliche $x = a$.

2) $f(x) = \lg x$ $(x > 0)$. Nach I_1, § 34, Ungl. (3) (S. 206) hat man für $x > a > 0$:

$$0 < \lg x - \lg a = \lg \frac{x}{a} = \lg\left(1 + \frac{x-a}{a}\right) < \frac{x-a}{a}$$

und für $0 < x < a$:

$$0 < \lg a - \lg x = \lg \frac{a}{x} = \lg\left(1 + \frac{a-x}{x}\right) < \frac{a-x}{x}.$$

Wird x nach unten so eingeschränkt, daß $x > \frac{a}{2}$, so findet man in *jedem* der beiden Fälle:

$$|\lg x - \lg a| < \frac{2}{a} |x - a|$$

$$< \varepsilon \quad \text{für:} \quad |x - a| < \delta = \frac{a\varepsilon}{2}.$$

---

1) Ein Beispiel dieser letzten Art s. S. 58, Fußn. 1).

2) Für $n = 0$ und $n = 1$ ist die Stetigkeit von vornherein evident.

3) $f(x) = x - E(x)$ $(x \geqq 0)$, wo $E(x)$ die in Fußn. 1), S. 42 angegebene Bedeutung hat. Die Funktion ist schlechthin *stetig* für alle *nicht ganzzahligen* x (dies gilt insbesondere auch dann, wenn x einer ganzzahligen Stelle von links her beliebig nahe kommt). Für *ganzzahlige* $x = a$ ist $f(x)$ nur *vorwärts stetig (rückwärts unstetig)*, also schließlich *ausnahmslos vorwärts stetig*. Die „Kurve" $y = f(x)$ besteht aus periodisch sich wiederholenden geradlinigen Stücken, die bei jedem ganzzahligen Punkte a der Abszissenachse beginnend unter einem Winkel von 45^0 aufsteigen und bei $x = a + 1$ wieder zu diesem Punkte der Abszissenachse zurückspringen, um den gleichen Verlauf von neuem zu beginnen.

4) Für die in Nr. 5 des vorigen Paragraphen (S 39, Fußn. 3) angeführte Funktion:

$$f(x) = (1 - x^2) \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{n x^2}{n x^2 + 1}$$

ergab sich:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1, \quad \text{dagegen:} \quad f(0) = 0$$

Die Funktion ist also an der Stelle $x = 0$ *unstetig*. Sie wird aber daselbst *stetig*, wenn man nur den *einen* Funktionswert $f(0)$ dahin *abändert*, daß man $f(0) = 1$ setzt. Man bezeichnet *Unstetigkeiten* dieser Art, d h. solche, bei denen zwar $f(a - 0) = f(a + 0)$, aber $\neq f(a)$, so daß die Unstetigkeit durch bloße Abänderung von $f(a)$ *beseitigt* werden kann, als *hebbare*.

5) Die gleichfalls schon in Nr. 5 des vorigen Paragraphen S. 39, Fußn. 4) angeführte Funktion:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

liefert ebenfalls für $x \to \pm 0$ den nämlichen Grenzwert: $\lim_{x \to \pm 0} f(x) = 0$, unterscheidet sich aber insofern von dem unmittelbar zuvor angeführten Beispiel, als hier $f(0)$ *überhaupt nicht definiert* ist. Man pflegt in einem solchen Falle, der ja im Gegensatz zu dem vorigen bezüglich der Definition von $f(0)$ von vornherein volle Freiheit läßt, *ein für allemal* $f(0)$ durch den Wert $\lim_{x \to 0} f(x)$ zu *definieren* und auf diese Weise die Funktion an der betreffenden Stelle zu einer *stetigen* zu machen. Im Grunde genommen handelt es sich auch hier um eine *hebbare Unstetigkeit*, die aber gewöhnlich von vornherein beseitigt und demgemäß gänzlich ignoriert zu werden pflegt. Hierher gehören namentlich die Fälle, in denen $f(a)$ eine der Formen $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$ u. a. annimmt, z B.

$$f(x) = \frac{x^\varrho - 1}{x - 1}, \quad \text{also:} \quad f(1) \equiv \frac{0}{0}, \lim_{x \to 1} f(x) = \varrho \text{ (s. I}_1\text{, § 37, Gl. (38), S. 236).}$$

$f(x) = \frac{x^2}{x-a} - \frac{a^2}{x-a}$, also: $f(a) \equiv \infty - \infty$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a) = 2a.$$

6) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$, $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 0$, $f(0)$ *nicht definiert.*

3. Gleichzeitig mit der Funktion $f(x)$ ist auch deren absoluter Betrag $|f(x)|$ für $x = a$ *stetig.* Dies folgt unmittelbar aus der Ungleichung:

(1) $$\big||f(x)| - |f(a)|\big| \leq |f(x) - f(a)|$$

oder auch aus der Beziehung:

(2) $$\lim_{x \to a} |f(x)| = |\lim_{x \to a} f(x)| = |f(a)|.$$

Dagegen darf selbstverständlich aus der Stetigkeit von $|f(x)|$ nicht umgekehrt auf diejenige von $f(x)$ geschlossen werden. Ist z. B. $f(x) = x$ für alle *rationalen,* dagegen $f(x) = -x$ für alle *irrationalen* x, so ist $f(x)$ an *keiner* von 0 verschiedenen Stelle[1]) *stetig,* während $|f(x)| \equiv |x|$ *ausnahmslos stetig* ist.

4. Die in Nr. 7 des vorigen Paragraphen angegebenen Regeln für das Rechnen mit *Grenzwerten* setzen uns in den Stand, im Anschluß an die Stetigkeitsbedingung (II) aus der *Stetigkeit* einer Anzahl von Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ für $x = a$ die entsprechende *Stetigkeit* einer aus diesen *rational* zusammengesetzten Funktion zu erschließen. Es sei etwa $R(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ein *rationaler Ausdruck* in $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und:

$$F(x) = R(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)),$$

also speziell: $$F(a) = R(f_1(a), f_2(a), \ldots, f_n(a)),$$

mit dem Zusatze, daß die *Null* nicht als Nenner vorkommt, also $F(a)$ eine bestimmte Zahl vorstellt. Nach Gl. (14) des vorigen Paragraphen (S. 42) ergibt sich sodann:

(3) $$\begin{aligned}\lim_{x \to a} F(x) &= R(\lim_{x \to a} f_1(x), \lim_{x \to a} f_2(x), \ldots, \lim_{x \to a} f_n(x)) \\ &= R(f_1(a), f_2(a), \ldots, f_n(a)) \\ &= F(a),\end{aligned}$$

d. h. $F(x)$ ist an der Stelle a *stetig.*

---

1) Es verdient bemerkt zu werden, daß $f(x)$ für $x = 0$ als *stetig* zu gelten hat, denn man hat neben:

$$f(0) = 0$$

auch:

$$\lim_{x \to \pm 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (\pm x) = 0.$$

Es existiert also hier ein *einziger*, somit völlig *isolierter Stetigkeitspunkt* (was mit den „populären" Stetigkeitsvorstellungen in völligem Widerspruch stehen dürfte).

Daraus folgt insbesondere, daß für $x = a$ gleichzeitig mit $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ auch die *Summen* und *Produkte:*

$$f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)$$
$$f_1(x) \cdot f_2(x) \ldots f_n(x)$$

und die *reziproken Werte:*

$$\frac{1}{f_1(x)}, \frac{1}{f_2(x)}, \ldots, \frac{1}{f_n(x)} \quad (\text{soweit } f_\nu(a) \neq 0),$$

also auch beliebige *Quotienten*bildungen *stetig* sind.

Hiernach ist jede *ganze rationale Funktion:*

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

für jedes endliche x stetig, ebenso jede *gebrochene rationale Funktion:*

$$f(x) = \frac{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}{c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m}$$

mit Ausnahme derjenigen Stellen x, für welche der *Nenner Null ist.*

5. Ein anderer häufig nützlicher Satz zur Feststellung der *Stetigkeit* einer aus *stetigen* Funktionen zusammengesetzten Funktion ist folgende:

Ist $y = \varphi(x)$ stetig für $x = a$ und zwar: $\varphi(a) = b$, ist sodann $z = f(y)$ stetig für $y = b$, so ist $f(\varphi(x))$ eine für $x = a$ stetige Funktion von x, so daß also:

$$\lim_{x \to a} f(\varphi(x)) = f(\varphi(a)). \tag{4}$$

Beweis: Infolge der Stetigkeit von $f(y)$ für $y = b$ hat man nach (IIa′) bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ und passend gewähltem $\delta' > 0$:

$$|f(b + \vartheta'\delta') - f(b)| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad -1 < \vartheta' < 1. \tag{5}$$

Andererseits muß infolge der Stetigkeit von $\varphi(x)$ für $x = a$ ein $\delta > 0$ sich so fixieren lassen, daß:

$$|\varphi(a + \vartheta\delta) - \varphi(a)| < \delta' \quad \text{für:} \quad -1 < \vartheta < 1. \tag{6}$$

Hieraus folgt wegen $\varphi(a) = b$:

$$b - \delta' < \varphi(a + \vartheta\delta) < b + \delta'.$$

Setzt man also für *beliebige* ϑ des Intervalls $-1 < \vartheta < 1$:

$$\varphi(a + \vartheta\delta) = b + \vartheta'\delta', \tag{7}$$

so gehört ϑ' sicher dem Intervall: $-1 < \vartheta' < 1$ an. Alsdann läßt sich aber die Ungleichung (5) durch die folgende ersetzen:

$$|f(\varphi(a + \vartheta\delta)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad -1 < \vartheta < 1, \tag{8}$$

welche in der Tat aussagt, daß $f(\varphi(x))$ eine für $x = a$ *stetige* Funktion

von x, so daß also schließlich, wie behauptet:

$$\lim_{x \to a} f(\varphi(x)) = \lim_{\delta \to 0} f(\varphi(a + \vartheta\delta)) = f(\varphi(a)).$$

(Beispiel: Ist $g(x)$ eine ganze rationale Funktion, so ist $\lg g(x)$ eine stetige Funktion für jedes der Bedingung $g(x) > 0$ genügende endliche x.)

§ 7. Haupteigenschaften der in einem Intervall stetigen Funktionen: Existenz eines realen Maximums und Minimums, gleichmäßige Stetigkeit, Lückenlosigkeit, vollständige Bestimmtheit einer stetigen Funktion durch eine Teilmenge ihrer Werte.

1. Es sei $f(x)$ eindeutig definiert und *stetig „im Intervall“* $[x_0, X]$ (d. h. *schlechthin* stetig für jeden Innenpunkt, für x_0 *vorwärts*, für X *rückwärts stetig*). Dann hat zwar $f(x)$ für jedes einzelne x des Intervalls einen bestimmten *endlichen* Wert Daraus allein würde aber noch nicht folgen, daß $f(x)$ im Intervall $[x_0, X]$ *beschränkt* ist (vgl § 4, Nr. 8, S. 33). Dies geht indessen auf Grund der a. a O. gemachten Aussage aus dem Umstande hervor, daß $f(x)$, wie die Stetigkeitsbedingung (IIa) des vorigen Paragraphen (S. 47) unmittelbar erkennen ließ, *in der Umgebung*[1]) jeder einzelnen Stelle beschränkt sein muß.

Hiernach besitzt also zunächst eine im *Intervall* $[x_0, X]$ *stetige* Funktion $f(x)$ daselbst eine *endliche obere Grenze* G und eine *endliche untere Grenze* g. Darüber hinaus gilt aber noch der folgende Satz:

> *Es gibt stets eine bzw. eine erste Stelle A, für welche $f(A) = G$, ebenso eine bzw. eine erste Stelle a, für welche $f(a) = g$. Eine im Intervall $[x_0, X]$ stetige Funktion besitzt also daselbst mindestens ein reales Maximum und ein reales Minimum.*

Beweis. Nach dem Satze von § 4, Nr. 6 (S. 31) gibt es *eine* bzw. *eine erste* Stelle A von der Beschaffenheit, daß $f(x)$ für eine beliebig kleine Umgebung von A die *obere Grenze* G besitzt. Infolge der Stetigkeit von $f(x)$ hat man nach Annahme eines beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ und passender Wahl von $\delta > 0$:

(1) $$|f(x) - f(A)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |x - A| < \delta.$$[2])

---

1) Dabei kommt als *„Umgebung“* für die Stelle x_0 nur die *rechtsseitige*, für die Stelle X nur die *linksseitige Nachbarschaft*, also ein Intervall von der Form: $x_0 \leq x < x_0 + \delta$ bzw $X - \delta < x < X$ in Betracht.

2) Im Falle $A = x_0$ oder $A = X$ ist die Bedingung $|x - A| < \delta$ im Sinne der vorigen Fußnote zu modifizieren.

Andererseits müssen unter den der Bedingung $|x - A| < \delta$ genügenden Stellen x solche vorhanden sein, für welche:

(2) $$|G - f(x)| < \varepsilon.$$

Durch Kombination von Ungl. (1) und (2) ergibt sich daher:

(3) $$|G - f(A)| < 2\varepsilon.$$

Da aber $f(A)$ eine *bestimmte* Zahl vorstellt und es andererseits freisteht, ε unbegrenzt zu verkleinern, so muß geradezu sein:

(4) $$|G - f(A)| = 0, \quad \text{also:} \quad f(A) = G.$$

Die Funktion $f(x)$ hat also an der Stelle $x = A$ das *reale Maximum* G (und zwar eventuell das *erste* dieser Art).

Ganz analog ergibt sich die Existenz eines (bzw. eines *ersten*) *realen Minimums* $f(a) = g$.

2. Ist $f(x)$ *stetig* für $x = a$, so läßt sich (nach § 6, Nr. 1, Ungl. (IId) S. 47) jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so zuordnen, daß die *Schwankung* von $f(x)$ im Intervall $[a - \delta, a + \delta]$ *kleiner* als ε ausfällt.

Nun sei $f(x)$ *stetig* im *Intervall* $[x_0, X]$ (d. h. bezüglich der Stellen x_0 und X in dem Sinne, wie am Anfang von Nr. 1 festgesetzt wurde). Dann läßt sich zunächst analog nach Annahme eines $\varepsilon > 0$ von x_0 aus ein Intervall $[x_0, x_0']$ nach *rechts*, von X aus ein Intervall $[X, X']$ nach *links* derart abgrenzen, daß in jedem derselben die *Schwankung* von $f(x)$ kleiner als ε ausfällt. Für jede Stelle x des nunmehr aus lauter *Innen*punkten von $[x_0, X]$ bestehenden Intervalls $[x_0', X']$ existiert alsdann eine (zweiseitige) Umgebung $\left[x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}\right]$ (also von der Länge δ), für welche die *Schwankung* von $f(x)$ unter ε herabsinkt. Dieses δ, oder genauer gesagt, die jedesmalige *obere Grenze* $\bar{\delta}$ (von δ), wird im allgemeinen gleichzeitig mit x *veränderlich* sein (wie ja insbesondere für $x = x_0'$ und $x = X'$ unmittelbar einleuchtet, je näher man x_0' an x_0, X' an X heranrücken läßt). Und es wäre *denkbar*, daß jenes $\bar{\delta}$ bei der Annäherung von x an irgendwelche *Innen*punkte x' *unbegrenzt abnehmen* könnte (ohne deshalb für $x = x'$ die untere Grenze 0 zu *erreichen*, was ja auf Grund der für $f(x)$ bestehenden Stetigkeitsvoraussetzung ausgeschlossen ist). Es ist nun für gewisse Schlußfolgerungen wichtig festzustellen, daß dieser Fall *nicht* eintreten kann, daß vielmehr stets Intervallängen δ vorhanden sind, die für jedes beliebig herausgegriffene Intervall von der Länge δ die Sicherheit bieten, daß die *Schwankung* daselbst unter das vorgeschriebene ε herabsinkt

Wir schicken dem Beweise dieser Behauptung die folgenden Bemerkungen voraus. Ist $D \equiv G - g$ die *Schwankung* von $f(x)$ in irgend-

einem Intervall $[x_1, x_2]$ und wird dieses in zwei Teilintervalle zerlegt, so kann in *keinem* der Teilintervalle die *obere Grenze* von $f(x)$ *größer* als G, die *untere Grenze kleiner* als g ausfallen. Somit ist die *Schwankung* in jedem der Teilintervalle *höchstens* gleich D.

Werden umgekehrt zwei aufeinanderstoßende Intervalle $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, in denen die Schwankungen $D_1 \equiv G_1 - g_1$ und $D_2 \equiv G_2 - g_2$ auftreten, zu einem einzigen vereinigt und bezeichnet man sodann mit x', x'' zwei ganz beliebige Stellen des Gesamtintervalls, so hat man, falls *beide* Stellen x', x'' *einem* der beiden Teilintervalle angehören:

$$|f(x') - f(x'')| \leqq D_1 \text{ oder } D_2. \tag{5a}$$

Gehören sie dagegen *verschiedenen* Teilintervallen an, etwa x' dem ersten, x'' dem zweiten, so kann man setzen:

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &= |(f(x') - f(x_2)) + (f(x_2) - f(x''))| \\ &\leqq |f(x') - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x'')|, \end{aligned}$$

also, da x_2 jedem der beiden Teilintervalle angehört:

$$|f(x') - f(x'')| \leqq D_1 + D_2, \tag{5b}$$

eine Ungleichung, die in den durch Ungl. (5a) charakterisierten Fällen *a fortiori* erfüllt ist. Hiernach ergibt sich, daß die *Schwankung* von $f(x)$ in dem zusammengesetzten Intervalle *höchstens* gleich $D_1 + D_2$ sein kann, wenn die Schwankungen in den Teilintervallen mit D_1, D_2 bezeichnet werden.

3. Mit Benützung dieser Bemerkungen beweisen wir jetzt den folgenden Satz:

> *Ist $f(x)$ stetig im Intervall $[x_0, X]$, so gehört zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, derart daß für jedes beliebige aus $[x_0, X]$ herausgegriffene Intervall von der Länge $\leqq \delta$ die Schwankung von $f(x)$ kleiner als ε ist. Man bezeichnet diese Eigenschaft damit, daß man sagt, jede in einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion sei darin gleichmäßig stetig.*

Beweis. Die Länge des Intervalls $[x_0, X]$ (also die Strecke $\overline{x_0 X} = X - x_0$) werde mit Δ bezeichnet, während das Zeichen D generell für Schwankung gebraucht werden soll. Nach Vorgabe eines bestimmten $\varepsilon > 0$ wird zunächst das Intervall $[x_0, X]$ durch Halbieren in zwei Teilintervalle von der Länge $\frac{1}{2}\Delta$ zerlegt. Jedes dieser letzteren wird wiederum halbiert, soweit es nicht bereits der Bedingung $D < \frac{\varepsilon}{2}$ genügt, und jedenfalls zunächst in dieser Weise solange fortgefahren, bis ein oder mehrere Teilintervalle auftreten, welche die obige Bedingung erfüllen: wegen der

Stetigkeit von $f(x)$ muß dieser Fall ja schließlich einmal eintreten[1]), zum *erstenmal* etwa bei dem m^{ten} Halbierungsprozeß, also bei der Intervalllänge $\left(\frac{1}{2}\right)^m \Delta$. Diejenigen Intervalle, in denen jetzt $D < \frac{\varepsilon}{2}$, werden von der weiteren Unterteilung ausgeschlossen, die übrigen in analoger Weise weiter behandelt. Wir behaupten nun: man muß nach einer *begrenzten* Anzahl solcher Halbierungsprozesse zu einer Zerlegung in Teilintervalle gelangen, derart, daß in jedem die Bedingung $D < \frac{\varepsilon}{2}$ erfüllt ist.

Denn angenommen, dies wäre nicht der Fall, so müßte wenigstens *ein* Teilintervall $[x_1, x_1']$ mit einer Schwankung $D \geqq \frac{\varepsilon}{2}$ und im übrigen von folgender Beschaffenheit existieren. Wird $[x_1, x_1']$ wieder halbiert, so ist wenigstens in einer der beiden Hälften, möglicherweise in beiden, wieder $D \geqq \frac{\varepsilon}{2}$, und auch bei weiterer Fortsetzung des Halbierungsprozesses (wobei allemal diejenigen Teilintervalle, für welche das gewünschte Ziel $D < \frac{\varepsilon}{2}$ erreicht ist, von der weiteren Teilung ausgeschlossen werden) bleibt immer wieder mindestens ein Teilintervall übrig, in welchem $D \geqq \frac{\varepsilon}{2}$. Es würde sich auf diese Weise mindestens *eine* unbegrenzte Folge ineinandergeschachtelter Intervalle $[x_1, x_1'], [x_2, x_2'], \ldots, [x_\nu, x_\nu'], \ldots$ von unbegrenzt abnehmenden Längen ergeben, derart, daß in jedem derselben $D \geqq \frac{\varepsilon}{2}$ bliebe, und diese Intervallfolge würde gegen einen bestimmten Punkt x' konvergieren. Jede *noch so kleine Umgebung* von x' würde aber alle Intervalle $[x_\nu, x_\nu']$ von einem *hinlänglich großen* ν an *in sich enthalten*, also eine Schwankung $D \geqq \frac{\varepsilon}{2}$ aufweisen, was der vorausgesetzten *Stetigkeit* widerspricht. Somit war die gemachte Annahme *unzulässig*.

Man gelangt also bei einer begrenzten Anwendung des angegebenen Verfahrens, etwa bei dem n^{ten} Halbierungsprozeß zu einer Zerlegung des Intervalls $[x_0, X]$ in eine *endliche* Anzahl von Teilintervallen verschiedener Länge: $(\frac{1}{2})^m \Delta, \ldots, (\frac{1}{2})^n \Delta$, derart, daß in jedem derselben $D < \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Setzt man jetzt die *kleinste* vorkommende Intervallänge $(\frac{1}{2})^n \Delta = \delta$ und

1) Da $f(x)$ an der Stelle x_0 *vorwärts stetig* ist, so gibt es ein $\delta_0 > 0$, derart, daß im Intervall $[x_0, x_0 + \delta_0]$ die Bedingung $D < \frac{\varepsilon}{2}$ erfüllt ist. Sie gilt somit für das Intervall $[x_0, x_0 + (\frac{1}{2})^m \Delta]$, sobald $(\frac{1}{2})^m \Delta \leqq \delta_0$. Eine analoge Schlußweise gilt auch für die *zweiseitige* Nachbarschaft eines jeden bei dem Halbierungsprozesse auftretenden *Teilpunktes*.

greift aus dem Intervall $[x_0, X]$ irgendein Teilintervall von der Länge $\leqq \delta$ heraus, so fällt dasselbe entweder *ganz in eins* jener früheren Teilintervalle, dann wird aber daselbst $D < \frac{\varepsilon}{2}$. Oder es fällt *in zwei benachbarte* jener Teilintervalle, dann wird: $D \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Man kann dieses Ergebnis auch so aussprechen: Das Intervall $[x_0, X]$ läßt sich in eine *endliche* Anzahl von Teilintervallen (nämlich solchen, die keiner anderen Bedingung zu genügen brauchen, als von einer Länge $\leqq \delta$ zu sein) zerlegen, derart, daß in jedem die Schwankung $< \varepsilon$ ausfällt.

4. Bedeutet x_1 irgendeine bestimmte Stelle des Intervalls $[x_0, X]$, in welchem wiederum $f(x)$ als *stetig* vorausgesetzt wird, so geht aus der daselbst *gleichmäßig* erfüllten Stetigkeitsbedingung:

$$|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad |x - x_1| \leqq \delta, \tag{6}$$

zunächst nur soviel hervor, daß gleichzeitig mit $|x - x_1|$ auch $|f(x) - f(x_1)|$ *unbegrenzt verkleinert* werden kann. Ist sodann x_2 eine andere Stelle des Intervalls $[x_0, X]$, etwa $x_2 > x_1$ und zugleich $f(x_2) \neq f(x_1)$, so kann man auf Grund von Ungl. (6) zwar schließen, daß zu allen möglichen Zahlen x, die das Intervall $[x_1, x_2]$ *vollständig erfüllen,* solche Zahlen $f(x)$ gehören, die im Intervall $[f(x_1), f(x_2)]$ *überall dicht* liegen. Dagegen würde noch keineswegs ohne weiteres folgen, daß die Werte von $f(x)$ sich auf *alle* Zahlen des Intervalls $[f(x_1), f(x_2)]$ erstrecken müßten, daß insbesondere, wenn x *monoton zunehmend* alle Zahlen von x_1 bis x_2 durchläuft, nun auch $f(x)$ mit $f(x_1)$ beginnend und mit $f(x_2)$ endigend auch *alle* zwischen diesen beiden Zahlen liegenden *Zwischenwerte* annehmen müßte. Es wäre z. B. sehr wohl denkbar, daß $f(x)$ bei diesem Vorgange, abgesehen von den Werten $f(x_1), f(x_2)$, nur alle *irrationalen* Werte des Intervalls $[f(x_1), f(x_2)]$ anzunehmen brauchte (deren Menge ja dieselbe *Mächtigkeit* besitzt, wie das Zahlenkontinuum $[x_1, x_2]$[1])). Es soll nun aber gezeigt werden, daß derartige Fälle *nicht* eintreten können, daß vielmehr $f(x)$ wirklich *jeden Zwischenwert* annehmen muß. Hierzu beweisen wir zunächst den folgenden Spezialfall des fraglichen Satzes:

Nimmt die im Intervall $[x_0, X]$ stetige Funktion sowohl positive als negative Werte an, so gibt es im Intervall mindestens eine bzw. eine erste Stelle a, für welche $f(a) = 0$ ist.

Beweis. Infolge der *gleichmäßigen* Stetigkeit von $f(x)$ läßt sich jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so zuordnen, daß für Zahlen x', x'', welche dem Intervall $[x_0, X]$ angehören:

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \text{falls:} \quad |x' - x''| \leqq \delta. \tag{7}$$

---

1) Vgl. I_3, § 103, S 779.

Bestimmt man jetzt eine natürliche Zahl n so, daß $\frac{1}{n}(X - x_0) \leqq \delta$, und zerlegt das Intervall $[x_0, X]$ in n gleiche Teilintervalle, so muß *entweder* mindestens *ein* Intervall vorhanden sein, in welchem $f(x)$ sowohl positive als negative Werte annimmt; *oder* es gibt *zwei aneinanderstoßende* Intervalle von der Beschaffenheit, daß $f(x)$ in dem einen Intervall durchweg $\geqq 0$, in dem andern $\leqq 0$ ist.[1]) Es gibt also *positive* Werte $f(x')$ und *negative* $f(x'')$, für welche im *ersten* Falle Ungl. (7) besteht, während in *zweiten* Falle an deren Stelle die folgende tritt (s. Ungl. (5b) S. 54):

$$(8) \qquad |f(x') - f(x'')| < 2\varepsilon .$$

Da aber $f(x')$ und $f(x'')$ entgegengesetztes Vorzeichen haben, so folgt aus (7) und (8) *a fortiori:*

$$(9) \qquad |f(x')| < \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad |f(x')| < 2\varepsilon .$$

Hiernach nimmt also $|f(x)|$ unter anderen Werten *beliebig kleine* an, hat also die *untere Grenze Null.* Alsdann gibt es aber infolge der Stetigkeit von $|f(x)|$ im Intervall $[x_0, X]$ nach dem Satze von Nr. 1 mindestens *eine* bzw. eine *erste* Stelle a, für welche $|f(a)| = 0$, also auch $f(a) = 0$ wird.

5. Sind jetzt x_1, x_2 zwei beliebige, insbesondere *beliebig nahe* gelegene Stellen des Stetigkeitsintervalls $[x_0, X]$, ist ferner $f(x_1) \neq f(x_2)$ und b eine *beliebige zwischen* $f(x_1)$ und $f(x_2)$ gelegene Zahl, so wird die Funktion:

$$F(x) \equiv f(x) - b$$

für $x = x_1$ und $x = x_2$ Werte *entgegengesetzten* Vorzeichens annehmen, es gibt also *eine* bzw. eine *erste* Stelle a *zwischen* x_1 und x_2, für welche $F(a) = 0$, d. h. $f(a) = b$ wird

Hieraus ergibt sich der folgende Satz (sog. *Zwischenwertsatz*):

Ist $f(x_1) \neq f(x_2)$, so muß die im Intervall $[x_1, x_2]$ stetige Funktion $f(x)$ daselbst auch jeden Zwischenwert des Intervalls $[f(x_1), f(x_2)]$ annehmen.

---

1) Die Stelle a', an welcher die beiden Intervalle aneinanderstoßen, ist dann offenbar eine *Null*stelle für $f(x)$. Denn wäre $f(a') > 0$, so hätte man nach Annahme eines positiven $\varepsilon < f(a')$ für eine gewisse *Umgebung* der Stelle a':

$$-\varepsilon < f(x) - f(a') < \varepsilon, \quad \text{also:} \quad f(x) > f(a') - \varepsilon > 0,$$

was der Voraussetzung widerspricht. Ebenso würde aus der Annahme $f(a') < 0$ sich ergeben, daß dann auch für eine gewisse *Umgebung* der Stelle a' sein müßte: $f(x) < 0$ Somit bleibt nur die Möglichkeit: $f(a') = 0$. Doch ließe sich auf diesem Wege nicht die Existenz einer *ersten* Nullstelle beweisen Denn abgesehen davon, daß ja der vorliegende Fall überhaupt nicht einzutreten braucht (statt dessen nur der im Text als *erster* Fall bezeichnete), so kann ja $f(x)$ auch $= 0$ werden, *ohne* beim Durchgang durch 0 das *Vorzeichen* zu ändern.

Zugleich führt die Verbindung mit dem Satze von Nr. 1 zu folgender Fassung:

Eine in einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion erreicht außer ihrer oberen und unteren Grenze auch jeden Zwischenwert an mindestens einer bzw. einer bestimmten ersten Stelle.

6. Auf Grund des vorletzten Satzes besitzt also eine von der *stetigen* Veränderlichen abhängige, *im Sinne der in Nr. 1 des vorigen Paragraphen gegebenen Definition stetige* Funktion, dieselbe Art von „*Lückenlosigkeit*“, wie die unabhängige Veränderliche x, also diejenige Eigenschaft, welche in § 3, Nr. 4 (S. 22) geradezu als *Stetigkeit* der Menge der reellen Zahlen *bezeichnet* wurde. Es verdient aber hervorgehoben zu werden, daß, entgegen einer naheliegenden, aber unzureichenden Vorstellung jene *Lückenlosigkeit* einer Funktion, keineswegs allemal ihre (von uns in anderer Weise wohldefinierte) *Stetigkeit* nach sich zieht.[1]) Dies ist allerdings für eine Stelle x_1 sicher dann der Fall, wenn $f(x)$ für eine beliebig kleine Umgebung von x_1 sich *monoton* verhält (dabei nicht notwendig links und rechts von x_1 in *demselben* Sinne). Wird z. B. angenommen, daß $f(x)$ *rechts* von x_1 gleichzeitig mit x monoton *zunimmt* zum mindesten bis zu einem gewissen Werte $f(x_1) + \alpha$ (wo $\alpha > 0$), wird sodann $\varepsilon > 0$ beliebig klein, jedenfalls $\leqq \alpha$ vorgeschrieben, so existiert unter Voraussetzung der *Lückenlosigkeit* von $f(x)$ ein bestimmtes $\delta > 0$, derart, daß

$$f(x_1 + \delta) = f(x_1) + \varepsilon, \tag{10}$$

also:

$$0 < f(x_1 + \delta) - f(x_1) = \varepsilon$$

und daher für $0 < \vartheta < 1$, mit Rücksicht auf die Monotonie von $f(x)$:

$$0 \leqq f(x_1 + \vartheta\delta) - f(x_1) \leqq \varepsilon, \tag{11}$$

d. h. $f(x)$ ist an der Stelle x_1 *vorwärts stetig.*

---

1) Ein einfaches Beispiel in geometrischer Form ist das folgende. Man teile die Strecke $\overline{01}$ der x-Achse durch Einschaltung der Teilpunkte $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^\nu}, \ldots$ in eine unendliche Folge von Teilstrecken, welche also (von rechts beginnend) die Längen $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^\nu}, \ldots$ haben, und errichte über jeder ein gleichschenkliges Dreieck von der Höhe 1. Durch die Ordinaten y des so entstehenden Streckenzuges ist eine Funktion $y = f(x)$ für jede Stelle des Intervalls $0 \leqq x \leqq 1$ definiert, wenn man noch hinzufügt, daß für $x = 0$ auch $y = 0$ sein soll. Die für $x > 0$ durchweg *stetige* Funktion wird für $x = 0$ (nach rechts) *unstetig,* da $\lim\limits_{x \to +0}$ *nicht existiert,* vielmehr $\underline{\lim}_{x \to +0} f(x) = 0$, $\overline{\lim}_{x \to +0} f(x) = 1$ ist. Nichtsdestoweniger verläuft sie in der rechten Nachbarschaft von $x = 0$ durchaus *lückenlos,* da sie in jedem noch so kleinen Intervall $0 \leqq x \leqq \delta$ *jeden* Wert von 0 bis 1 (unendlich oft) *annimmt.* Über die Möglichkeit, eine derartige Funktion durch einen arithmetischen Ausdruck darzustellen s § 13, S. 125, Fußn. 2); daselbst auch ein anderes Beispiel dieser Art S. 128, Gl. (17)

Würde $f(x)$ *rechts* von x_1 monoton *abnehmen*, so braucht man nur zu beachten, daß dann die Funktion $(-f(x))$ daselbst monoton *zunimmt* und daß andererseits gleichzeitig mit $(-f(x))$ auch $f(x)$ *stetig* ist.

Das analoge Resultat ergibt sich bezüglich der *Rückwärtsstetigkeit*, falls $f(x)$ *links* von x_1 *monoton* verläuft.

Daraus folgt, daß die Funktion $f(x)$ für $x = x_1$ *schlechthin stetig* ist, falls sie auf *beiden* Seiten *monoton* nnd zugleich *lückenlos* verläuft.

Wir bezeichnen ferner eine Funktion $f(x)$ als abteilungsweise *monoton* in einem Intervall $[x_0, X]$, wenn das letztere sich in eine endliche Anzahl von Teilintervallen zerlegen läßt, derart, daß $f(x)$ in jedem einzelnen *monoton* ist. Dabei soll ausdrücklich zugelassen werden, daß $f(x)$ auch streckenweise weder zu- noch abnimmt. Da aber die *Stetigkeit* einer Funktion $f(x)$ für jede Stelle x_1, in deren Umgebung sie *konstant* ist, von vornherein feststeht, so ergibt sich schließlich der folgende Satz:

> *Eine in einem Intervall $[x_0, X]$ zum mindesten abteilungsweise monotone und lückenlose Funktion ist daselbst ausnahmslos stetig.*

Die zur Herleitung dieses Resultats benützte Schlußweise (s. Gl. (10), Ungl. (11)) wird hinfällig, wenn die Funktion $f(x)$ in irgendeinem Intervall *nicht mehr abteilungsweise monoton* ist, wenn sie daselbst also *unendlich oft* vom Zunehmen zum Abnehmen übergeht und umgekehrt, was dann auf Grund bekannter Schlußweise mindestens in einem Teilintervall *von beliebiger Kleinheit*, also schließlich in der Umgebung mindestens eines bestimmten *Punktes* x_1 stattfinden muß. Zwar *kann* auch in diesem Falle die *Stetigkeit* von $f(x)$ noch erhalten bleiben.[1]) Doch *braucht* dies, wie bereits bemerkt, *nicht* mehr der Fall zu sein, selbst wenn $f(x)$ in der Umgebung der Stelle x_1 durchaus *lückenlos* verläuft.

7. Eine bemerkenswerte Eigenschaft stetiger Funktionen ist schließlich noch in dem folgenden Satze enthalten:

> *Stimmen die Werte zweier im Intervall $[x_0, X]$ stetiger Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ für irgendeine daselbst überall dichte Punktmenge $\{x'\}$[2]) überein, so sind die Funktionen identisch.*

Beweis. Setzt man $f_1(x) - f_2(x) = \varphi(x)$, so ist $\varphi(x)$ eine im Intervall $[x_0, X]$ *stetige* Funktion, welche für alle Stellen der Menge $\{x'\}$ den Wert 0 hat. Bedeutet dann x_1 eine ganz beliebige, der Menge $\{x'\}$ *nicht* angehörige Zahl des Intervalls $[x_0, X]$, so muß diese eine *Häufungsstelle*

1) Um hierfür ein Beispiel zu gewinnen, braucht man das in der vorigen Fußnote angegebene nur dahin abzuändern, daß man über den einzelnen Teilstrecken *gleichseitige* Dreiecke errichtet.

2) Z. B. die Menge aller rationalen Zahlen oder auch nur aller *endlichen* Dezimalbrüche des betreffenden Intervalls.

der (ja *überall dicht* liegenden) Zahlen x' sein. Es lassen sich daher aus der Menge $\{x'\}$ monotone Folgen $\{x_\nu'\}$ von der Beschaffenheit herausheben, daß $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu' = x_1$. Infolge der Stetigkeit von $\varphi(x)$ hat man sodann (s. § 6, Gl. (IIb), S. 47):

$$\varphi(x_1) \equiv \varphi(\lim_{\nu\to\infty} x_\nu') = \lim_{\nu\to\infty} \varphi(x_\nu) = 0,$$

d. h.:

$$f_1(x_1) = f_2(x_1)$$

für *jede* Stelle x, die *nicht* der Menge $\{x'\}$ angehört. Die beiden Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ erweisen sich also für das ganze Intervall $[x_0, x]$ als *identisch*.

Der Inhalt des vorstehenden Satzes läßt sich auch in folgender Form aussprechen:

Eine im Intervall $[x_0, X]$ stetige Funktion ist vollständig bestimmt, wenn ihre Werte für alle Stellen x irgendeiner im Intervall überall dicht liegenden Punktmenge feststehen.

§ 8. Ebene Punktmengen. — Häufungspunkte und abgeleitete Mengen. — Abstand zweier Punktmengen. — Innen-, Außen- und Randpunkte. — Ein- und zweidimensionale Kontinua.

1. Jedes *Zahlenpaar* (x, y) kann auf Grund der in § 4, Nr. 3 (S. 29) getroffenen Festsetzungen als bestimmter *Punkt P in einer Ebene* gedeutet werden. Wir gebrauchen daher für eine irgendwie vorgeschriebene (endliche oder unendliche) *Menge verschiedener Zahlenpaare*, in Zeichen: $\{x', y'\}$, als vollständig *äquivalent* den Ausdruck *ebene Punktmenge* bzw. das Zeichen $\{P\}$. Die an diese *geometrische Ausdrucksweise* anknüpfende *räumliche Vorstellung* ist wiederum für die bequeme Übersicht über die weiterhin zu machenden Aussagen äußerst förderlich, ohne aber deren *arithmetische Zuverlässigkeit* zu beeinträchtigen (vgl. § 3, Nr. 4 am Ende, S. 22 und weiter unten Nr. 2).

Eine *unendliche ebene*[1]) *Punktmenge* $\{x', y'\}$ heißt *beschränkt* oder *im Endlichen gelegen*, wenn *jede der Koordinaten* x', y' oder, was offenbar in der Wirkung dasselbe besagt, wenn $\sqrt{x'^2 + y'^2}$ *beschränkt* ist (geometrisch gesprochen: wenn die Gesamtheit der Punkte (x', y') in ein zu den Achsen parallel gestelltes *Rechteck* bzw. in einen *Kreis* um den *Nullpunkt* sich einschließen läßt).

Die *Punktmenge* heißt *unbeschränkt* oder *ins Unendliche sich er-*

1) Im folgenden sollen dann unter Punktmengen schlechthin immer *ebene* Punktmengen verstanden werden.

streckend, wenn mindestens eine der beiden Koordinatenmengen $\{x'\}$, $\{y'\}$ *unbeschränkt* ist.

Ein Punkt (a, b) heißt *Häufungspunkt* oder *Häufungsstelle* der Menge $\{x', y'\}$, mag er selbst der Menge angehören oder auch nicht, wenn in beliebig kleinem *Abstande* (s. § 4, Nr. 3 am Ende, S. 30), anders ausgesprochen, in jeder noch so kleinen „*Umgebung*" (ϱ) Punkte (x', y') liegen. Dabei versteht man unter der *Umgebung* (ϱ) eines Punktes (a, b) zunächst die Gesamtheit aller Punkte (x, y), welche einer Bedingung von der Form:

$$(1)\quad 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varrho \text{ (nach Bedarf auch: } 0 \leqq \text{ sowie: } \leqq \varrho)$$

genügen, unter ϱ eine *positive*, übrigens *beliebig klein* zu denkende Zahl verstanden, also die Gesamtheit aller Punkte, welche im *Innern* (eventuell auch auf der *Peripherie*) eines um den Punkt (a, b) mit dem Radius ϱ beschriebenen Kreises liegen und zwar, je nach Bedarf, mit Ausschluß oder mit Einschluß von (a, b). Da die Beziehung (1) stets die beiden folgenden nach sich zieht:

$$(2)\qquad |x-a| < \varrho, \quad |y-b| < \varrho \text{ (bzw. } \leqq \varrho),$$

und da andererseits aus diesen folgen würde:

$$(3)\qquad \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \sqrt{2}\cdot\varrho \text{ (bzw.} \leqq \sqrt{2}\cdot\varrho),$$

also eine Bedingung, welche (infolge der Willkürlichkeit von ϱ) *dem Sinne nach* mit (1) äquivalent ist, so erkennt man, daß es freisteht, die „*Umgebung*" eines Punktes (a, b) statt durch einen Kreis, durch ein den Punkt (a, b) als Mittelpunkt umschließendes *Quadrat* zu begrenzen (übrigens, wie leicht ersichtlich, auch durch irgendeine andere geschlossene Figur, z. B. ein Rechteck, ein Dreieck, eine Ellipse usf).

2. Für jede *beschränkte unendliche ebene Punktmenge* gilt nun zunächst analog wie für *lineare* Punktmengen (vgl. § 1, Nr. 5, S. 7 und § 3, Nr. 5, S. 23) der folgende grundlegende Satz:

> *Jede Menge der fraglichen Art besitzt mindestens eine Häufungsstelle* (die aber nicht zur Menge zu gehören braucht).

Der arithmetische Beweis dieses Satzes ist bereits in demjenigen enthalten, welcher in I_3, § 73, Nr. 4 (S. 565/6) für die Existenz einer *Häufungszahl* jeder *abzählbaren Zahlenmenge* von der Form $x_\nu + y_\nu i$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ gegeben wurde, da ja *erstens* jede *komplexe Zahl* $x_\nu + y_\nu i$ ohne weiteres auch ein *Zahlenpaar* (x_ν, y_ν) bzw. einen *Punkt* (x_ν, y_ν) bestimmt — *vice versa*; und da *zweitens* jede *nicht abzählbare* Punktmenge unendlich viele *abzählbare* als *Teilmengen* enthält.[1])

---

1) Vgl. die analoge Schlußweise für reelle Zahlenmengen (lineare Punktmengen) S. 7, Fußn. 2.

Indessen soll hier noch eine andere, in geometrische Form gekleidete Beweisanordnung mitgeteilt werden, da dieselbe ein typisches Vorbild für mancherlei andere auf *ebene Punktmengen* bzw. *Funktionen* solcher Punktmengen (Funktionen zweier reellen oder einer komplexen Veränderlichen) sich beziehende Beweise liefert. Sie verläuft durchaus analog, wie bei dem in § 3, Nr. 5 (S. 23) gegebenen Beweise für die Existenz eines *Häufungspunktes* jeder *linearen* unendlichen Punktmenge, mit dem einzigen Unterschiede, daß an die Stelle des dort benützten *linearen* Teilungsprozesses jetzt ein *quadratischer* tritt.

Da die betreffende Menge $\{x', y'\}$ *beschränkt* sein soll, so läßt sie sich in ein zu den Achsen parallel gestelltes *Quadrat*, etwa von der Seitenlänge λ, einschließen. Verbindet man die Mittelpunkte je zweier Gegenseiten durch gerade Linien, so zerfällt das Quadrat in *vier* kongruente Teilquadrate von der Seitenlänge $\frac{1}{2}\lambda$. Mindestens *eins* dieser letzteren *einschließlich seiner Begrenzung* (so daß also die eingeführten Teilungslinien *doppelt* zählen) muß unendlich viele (x', y') enthalten. Dieses *eine* Quadrat bzw. wenn *mehrere* von der fraglichen Beschaffenheit vorhanden sein sollten, ein beliebig unter diesen *ausgewähltes* wird analog behandelt und dieses Verfahren unbegrenzt fortgesetzt. Man erhält auf diese Weise eine unbegrenzte Folge *ineinander geschachtelter Quadrate* mit den unbegrenzt abnehmenden Seitenlängen $(\frac{1}{2})^{\nu}\lambda$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$, deren *jedes* noch *unendlich viele* (x', y') enthält. Dehnt man die Wirkung des *Axioms der Intervallschachtelung* (s. § 3, Nr. 2, S. 20) auf eine *Quadratschachtelung* aus (indem man das Endergebnis der letzteren durch Projektion der ineinandergeschachtelten Quadrate auf die Koordinatenachsen aus dem ersteren herleitet), so ist allen jenen Quadraten *ein* und *nur* ein *Punkt* (a, b) gemeinsam (anders ausgesprochen: sie *konvergieren* gegen einen bestimmten *Grenzpunkt* (a, b)): dieser ist dann, wie aus seiner Entstehungsweise unmittelbar hervorgeht, der fragliche *Häufungspunkt*.

Es hat keine Schwierigkeit, diesem Beweise wiederum unter *Ausschaltung* des *Stetigkeitsaxioms* in der oben benützten Fassung eine streng *arithmetische* Form zu geben, indem man die Koordinatenpaare der vier Eckpunkte[1]) der sukzessive auszuwählenden Quadrate vermittelst *dyadischer Brüche* darstellt, welche dann gegen ein bestimmtes gemeinsames *Zahlenpaar* konvergieren (vgl. das Analogon § 3, Nr. 5, S. 23).[2])

---

1) Es genügt übrigens den linken unteren und den rechten oberen Eckpunkt der Quadrate in Rechnung zu ziehen.

2) Wir verzichten an dieser Stelle darauf, den Begriff des *Häufungspunktes* (analog wie in § 1, Nr. 5, S. 7) auf das *Unendliche* auszudehnen. Davon soll erst die Rede sein, wenn wir *ebene Punktmengen* statt als Mengen *beliebiger Zahlenpaare*, als solche von *komplexen Zahlen* auffassen werden.

Die Menge der *Häufungspunkte* einer *Punktmenge* $\{x', y'\}$ wird wiederum als deren *abgeleitete Menge* oder *Ableitung* bezeichnet. Die *Punktmenge* selbst heißt *abgeschlossen*, wenn sie alle ihre *Häufungspunkte* (also ihre *Ableitung*) enthält. Sie heißt *in sich dicht*, wenn sie aus lauter *Häufungspunkten* besteht; *perfekt*, wenn sie *in sich dicht* und *abgeschlossen*, also mit ihrer *Ableitung* identisch ist; *isoliert*, wenn sie ausschließlich aus *isolierten Punkten* besteht, d. h. aus Punkten, deren jeder eine von sonstigen Mengenpunkten freie Umgebung besitzt. Eine solche Menge hat also *keinen* Punkt mit ihrer *Ableitung* gemein.

3. Unter dem *Abstande* zweier *Punktmengen* $\{P\}$ und $\{Q\}$ versteht man die *untere Grenze* aller möglichen Abstände $\overline{PQ}$, also eine bestimmte Zahl $\delta \geqq 0$. Es ist nützlich festzustellen, daß diese *untere Grenze* δ ein *reales Minimum* ist, wenn die Mengen $\{P\}$, $\{Q\}$ *abgeschlossen* sind, mit anderen Worten, daß es dann wirklich zwei diesen beiden Mengen angehörige Punkte P', Q' gibt, für welche $\overline{P'Q'} = \delta$ ist.

Um dies nachzuweisen, bemerke man zunächst, daß auf Grund der Bedeutung von δ als *untere Grenze* aller möglichen $\overline{PQ}$ aus den Mengen $\{P\}$, $\{Q\}$ sich zwei Folgen $(P_\nu), (Q_\nu)$ so herausheben lassen[1]), daß:

$$\lim_{\nu \to \infty} \overline{P_\nu Q_\nu} = \delta. \tag{4}$$

Die Punkte P_ν haben mindestens einen *Häufungspunkt* P', die Folge (P_ν) enthält also eine *Teilfolge* (P_{m_ν}), derart, daß:

$$\lim_{\nu \to \infty} \overline{P'P_{m_\nu}} = 0. \tag{5}$$

Auch die Punkte Q_{m_ν} $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ haben mindestens einen *Häufungspunkt* Q', die Folge (Q_{m_ν}) enthält also eine weitere *Teilfolge* (Q_{n_ν}), derart, daß:

$$\lim_{\nu \to \infty} \overline{Q'Q_{n_\nu}} = 0, \tag{6}$$

und zwar ist dann auch:

$$\lim_{\nu \to \infty} \overline{P'P_{n_\nu}} = 0, \qquad \lim_{\nu \to \infty} \overline{P_{n_\nu} Q_{n_\nu}} = \delta. \tag{7}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} |\overline{P'Q'} - \overline{P_{n_\nu} Q_{n_\nu}}| &= |(\overline{P'Q'} - \overline{P_{n_\nu} Q'}) + (\overline{P_{n_\nu} Q'} - \overline{P_{n_\nu} Q_{n_\nu}})| \\ &\leqq \overline{P'P_{n_\nu}} + \overline{Q'Q_{n_\nu}}, \end{aligned}$$

und daher für $\nu \to \infty$ mit Benutzung von Gl. (6) und (7):

$$\overline{P'Q'} = \lim_{\nu \to \infty} \overline{P_{n_\nu} Q_{n_\nu}} = \delta.$$

---

1) Die Elemente der Folgen (P_ν), (Q_ν), wie auch der weiterhin mit (P_{m_ν}), (Q_{m_ν}), (Q_{n_ν}) bezeichneten brauchen nicht alle voneinander verschieden zu sein, können auch teilweise oder durchweg die Bedeutung von P' bzw. Q' haben.

Dabei ist offenbar stets $\delta > 0$, solange $P' \neq Q'$, d. h. falls die beiden Punktmengen *keinen gemeinsamen* Punkt haben, also:

Zwei abgeschlossene Punktmengen ohne gemeinsamen Punkt haben stets einen bestimmten von Null verschiedenen Minimalabstand.

4. Zu den Definitionen von Absatz I der vorigen Nummer, welche mit den in § 1, Nr. 5 (S. 7) für reelle Zahlenmengen (bzw. § 3, Nr. 4, S 22, für *lineare Punktmengen*) gegebenen vollkommen übereinstimmen, treten jetzt noch die folgenden hinzu:

I. Jeder *Mengenpunkt*, d. h. zur Menge $\{x', y'\}$ gehörige Punkt heißt *innerer Punkt* oder *Innenpunkt der Menge*, wenn er eine aus *lauter Mengenpunkten* bestehende *Umgebung* besitzt.

II. Jeder *Nichtmengenpunkt*, d. h. *nicht* zur Menge $\{x', y'\}$ gehörige Punkt (x, y) heißt *äußerer Punkt* oder *Außenpunkt der Menge*, wenn er eine von *Mengenpunkten* vollständig *freie Umgebung* besitzt.

III Jeder *Punkt*, der *weder Innen-, noch Außenpunkt* der Menge ist, heißt *Randpunkt* der Menge (gleichgültig, ob er selbst zur Menge gehört oder nicht). Unter diese Definition fallen folgende drei Kategorien von Punkten[1]):

a) Jeder *Punkt*, dessen Umgebung sowohl *unendlich viele Mengenpunkte* als *Nichtmengenpunkte* enthält (mag er selbst zur Menge gehören oder nicht)

b) Jeder *isolierte Mengenpunkt*, d h jeder *Mengenpunkt*, dessen Umgebung *ausschließlich* aus *Nichtmengenpunkten* besteht.

c) Jeder *Nichtmengenpunkt*, dessen Umgebung *ausschließlich* aus *Mengenpunkten* besteht.[2])

Die *Menge der Randpunkte* bezeichnen wir als den *Rand*, die *Berandung* oder *Begrenzung* der Menge.

IV. Eine *ebene Punktmenge* heißt *zusammenhängend*, wenn nach Annahme jedes (beliebig klein zu denkenden) $\varepsilon > 0$ zu jedem beliebigen Paare von Mengenpunkten P und P' eine endliche Anzahl von Mengenpunkten $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ vorhanden ist, derart, daß jeder der Abstände $\overline{PP_1}, \overline{P_1P_2}, \ldots, \overline{P_\nu P'}$ kleiner als ε ausfällt. Da eine solche Menge keine

---

1) Man kann der Definition auch die folgende, alle drei Kategorien umfassende Form geben. *Randpunkt* heißt jeder Punkt, für den jede *Umgebung* (NB den fraglichen Punkt mit eingerechnet) mindestens *je einen Mengen- und Nichtmengenpunkt* enthält.

2) Besteht z. B. die Menge $\{x', y'\}$ aus den Punkten einer Kreisfläche *mit Ausschluß* des *Mittelpunktes*, so ist dieser ein *Randpunkt* der Kategorie c). Die *Peripheriepunkte* sind in jedem Falle *Randpunkte* der Kategorie a), mögen sie zur Menge gehören oder nicht

isolierten Punkte enthalten kann, so ist sie allemal *in sich dicht* und daher, wenn sie überdies *abgeschlossen* ist, *perfekt.*

V. Eine *zusammenhängende abgeschlossene Menge ohne innere Punkte* bezeichnen wir als ein *linienhaftes Kontinuum.*[1])

VI Eine *Menge,* die *nur* aus *Innenpunkten* besteht (also ihre *Randpunkte nicht* enthält), soll *innerlich zusammenhängend* heißen, wenn je zwei ihrer Punkte sich durch eine gebrochene Linie verbinden lassen. die ganz aus *Innenpunkten* besteht. Wir bezeichnen eine solche Menge als *flächenhaftes* oder *zweidimensionales Kontinuum* oder als *zusammenhängenden* (sc. zweidimensionalen, stetigen) *Bereich* $\mathfrak{B}$, auch schlechthin als ein *Gebiet.* Wird einem solchen *Bereiche* die *Berandung* der *Innenpunkte* hinzugefügt, so heißt er *abgeschlossen,* dagegen *offen* in dem zuerst betrachteten Falle [2])

5. Der *Rand* eines (offenen oder abgeschlossenen, im Endlichen gelegenen) *Bereiches* $\mathfrak{B}$ bildet stets eine *abgeschlossene* Menge; denn jeder *Häufungspunkt* von *Randpunkten* kann *weder Innen-, noch Außenpunkt* sein, ist also ein *Randpunkt*

Ist der Bereich *abgeschlossen,* so besitzt er nur solche *Randpunkte* (vgl. Fußn. 2), in deren (beliebig kleiner) Umgebung sowohl *Innen-* als *Außenpunkte* in unendlicher Menge, also auch *Randpunkte* liegen müssen; denn, ist A ein *Außen-,* I ein *Innenpunkt,* so muß die Strecke AI mindestens einen *Randpunkt* enthalten. Da nämlich zu A eine nur aus *Außenpunkten,* zu I eine nur aus *Innenpunkten* bestehende *Umgebung* gehört, so besteht das *Anfangsstück* der Strecke $\overline{AI}$ aus lauter *Außen-,*

---

1) Unter diese Definition fällt offenbar jede *Strecke,* auch jede endliche Anzahl sich schneidender Strecken, jede im Endlichen verlaufende *Kurve,* wie sie die analytische Geometrie zu behandeln pflegt (Ellipse, Lemniskate, Astroide), jeder begrenzte *Bogen* einer analog gearteten, ins Unendliche sich erstreckenden *Kurve* (Parabel, Hyperbel, Zykloide) sowie jede in einzelnen Punkten zusammenhängende Verbindung solcher *Kurven* miteinander und mit *Strecken*

Doch reicht jene Definition sehr viel weiter und umfaßt auch Punktmengen, die von der landläufigen Vorstellung einer *Kurve* sehr weit entfernt sind. Als einfaches Beispiel dieser Art sei an das in Fußn 1), S 58 beschriebene Gebilde erinnert, welches zu einem *linienhaften Kontinuum* im Sinne der Definition V. wird, wenn man (statt, wie a. a. O., für $x = 0$ nur $y = 0$ zu setzen) noch die ganze Strecke $\overline{01}$ der positiven y-Achse (als Menge der *Häufungspunkte,* nämlich aller Stellen mit den Koordinaten $x = 0$ und $0 < y \leq 1$) hinzufügt.

2) Besitzt der *offene* Bereich einen *Randpunkt* der Kategorie c) (vgl. das Beispiel in Fußn. 2 der vorigen Seite), so wird dieser für den entsprechenden *abgeschlossenen* Bereich zum *Innenpunkt,* scheidet also aus der *Berandung* vollständig aus. Auch kann ein (offener oder abgeschlossener) *zusammenhangender* Bereich niemals einen *isolierten Randpunkt* der Kategorie b) besitzen, also, wenn er *abgeschlossen* ist, überhaupt *keinen isolierten Punkt* zum *Randpunkt* haben.

das *Endstück* aus lauter *Innenpunkten*. Das *erstere* muß dann einen bestimmten *Endpunkt* besitzen, der weder *Innen-* noch *Außenpunkt* sein kann, also ein *Randpunkt* ist. Da hiernach jeder *Randpunkt* sich als *Häufungspunkt* von *Randpunkten* erweist, so ist die Menge der letzteren stets *in sich dicht*. Darüber hinaus läßt sich aber zeigen — und zwar gilt dies auch für *offene Gebiete* — daß die Menge der *Randpunkte* eines im Endlichen liegenden *Gebietes* stets ein *linienhaftes Kontinuum* enthält, welches ein ins *Unendliche* sich erstreckendes *Außengebiet* von den *übrigen* Punkten der Ebene, denen auch das fragliche *Gebiet* angehört, vollständig *trennt*, derart, daß jede gerade oder gebrochene Linie, welche einen Punkt jenes *Außengebietes* mit einem solchen der *übrigen Menge* verbindet, mindestens einen Punkt jenes *linienhaften Kontinuums* enthält.

Besondere Wichtigkeit für die Funktionenlehre besitzt hierbei der Fall, daß das letztere die gesamte Ebene in *genau zwei* getrennte Gebiete zerlegt, und somit die Feststellung von Bedingungen, unter welchen dieser Fall mit Sicherheit eintritt. Um eine zweckmäßige Grundlage für die Behandlung dieser Frage und den Beweis der zuvor angeführten Tatsache zu gewinnen, beschäftigen wir uns zunächst mit einer besonders einfachen Gattung *linienhafter Kontinua*, die wir als *Treppenpolygone* bezeichnen.

§ 9. Treppenwege und Treppenpolygone. — Zweiteilung der Ebene durch jedes einfache Treppenpolygon.

1. Ein *Rechteck* hat die zuvor bezeichnete Eigenschaft, die ganze Ebene in genau zwei getrennte Gebiete zu zerlegen: ein im *Endlichen* gelegenes *inneres* und ein sich ins *Unendliche* erstreckendes *äußeres*. Dies läßt sich, falls man sich nicht auf die bloße Anschauung berufen will, in folgender Weise begründen.

Wir denken uns die Seiten des Rechtecks etwa horizontal und vertikal gestellt und machen den linken unteren Eckpunkt zum Koordinatenanfangspunkt. Ist a die Länge der horizontalen, b diejenige der vertikalen Seiten, so lassen sich die Punkte (x, y) der Ebene in folgende drei Klassen zerlegen, die wir als J-, A- und R-Punkte bezeichnen, nämlich:

$$(1)\qquad J\text{-Punkte für:}\quad 0 < x < a,\quad 0 < y < b,$$

$$(2)\qquad A\text{-Punkte für:}\begin{cases} 0 \leqq x \leqq a, & y < 0 \text{ oder } y > b, \\ x < 0 \text{ oder } x > a, & y \text{ beliebig}, \end{cases}$$

$$(3)\qquad R\text{-Punkte für:}\begin{cases} x = 0 \text{ oder } x = a, & 0 \leqq y \leqq b, \\ 0 < x < a, & y = 0 \text{ oder } y = b. \end{cases}$$

Sind $J_0 \equiv (x_0, y_0)$ und $J_1 \equiv (x_1, y_1)$ zwei beliebige J-Punkte, etwa

$x_0 < x_1$ und daher:

$$0 < x_0 < x_1 < a, \quad 0 < \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{Bmatrix} < b,$$

so sind die Punkte (x, y) der Verbindungslinie von J_0 und J_1 charakterisiert durch die Beziehung:

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0),$$

welche zeigt, daß die Ordinaten der Strecke $\overline{J_0 J_1}$ monoton zu- oder abnehmen, je nachdem $y_1 > y_0$ oder $y_1 < y_0$.[1]) Ihre Werte liegen daher stets *zwischen* y_0 und y_1, die Strecke $\overline{J_0 J_1}$ besteht also ausschließlich aus J-Punkten. Daraus folgt, da ja zu jedem J-Punkte eine aus lauter J-Punkten bestehende Umgebung gehört, daß die J-Punkte ein (zusammenhängendes) *Gebiet* bilden, das überdies auf Grund der Bedingung (1) *im Endlichen* liegt.

Analog, mit dem einzigen Unterschiede, daß nach Bedarf an die Stelle der *geraden* Verbindungslinie eine *gebrochene* tritt, läßt sich zeigen, daß auch die A-Punkte ein *Gebiet* bilden, das sich aber auf Grund der Bedingungen (2) *ins Unendliche* erstreckt.

Um schließlich noch festzustellen, daß diese beiden Gebiete durch die Menge der R-Punkte (d. h. die Rechteckseiten) vollständig *getrennt* werden, ist zu zeigen, daß die Verbindungslinie jedes beliebigen J- und A-Punktes einen R-Punkt enthält. Hierzu bemerken wir zunächst, daß jede vom Nullpunkt durch einen beliebigen J-Punkt gezogene Gerade noch eine der beiden nicht im Nullpunkt zusammenstoßenden Rechteckseiten schneidet. Die Punkte (x, y) einer solchen Geraden werden durch eine Gleichung von der Form bestimmt:

$$y = px, \quad \text{wo } p > 0.$$

Ist nun $p < \frac{b}{a}$, so wird für $x > 0$:

$$y < \frac{b}{a} \cdot x, \quad \text{also: } y < b \quad \text{für } x = a,$$

der auf der Geraden $y = px$ liegende Punkt (a, y) ist somit ein R-Punkt.

Ist dagegen $p > \frac{b}{a}$, so hat man:

$$x = \frac{1}{p} \cdot y < \frac{a}{b} \cdot y, \quad \text{also: } x < a \quad \text{für } y = b,$$

so daß jetzt der auf der Geraden liegende Punkt (x, b) ein R-Punkt ist. Im Falle $p = \frac{b}{a}$ geht die fragliche Gerade durch den Eckpunkt (a, b).

---

1) Der Fall $y_1 = y_0$, $x_1 \neq 0$ erledigt sich ohne weiteres, ebenso der Fall $x_1 = x_0$, $y_1 \neq y_0$.

Da dieses Ergebnis von dem Nullpunkt auf jeden beliebigen anderen Eckpunkt übertragen werden kann, so folgt zunächst, daß jede von einem *Eckpunkt* durch einen J-Punkt gezogene Gerade noch einen weiteren R-Punkt enthält

Zieht man jetzt durch einen beliebigen J-Punkt (x_0, y_0) die Horizontale $y = y_0$ und die Vertikale $x = x_0$, so liegen auf der ersteren die beiden R-Punkte $(0, y_0)$ und (a, y_0), auf der letzteren die beiden R-Punkte $(x_0, 0)$ und (x_0, b). Zugleich wird das Rechteck durch diese beiden Geraden in vier Teilrechtecke mit dem gemeinsamen Eckpunkte (x_0, y_0) zerlegt. Eine jede von dort aus etwa in der Richtung der wachsenden x gezogene Gerade muß also einen R-Punkt enthalten. Das gleiche gilt von deren Verlängerung über den Punkt (x_0, y_0) hinaus. Somit enthält jede durch einen J-Punkt (x_0, y_0) gezogene Gerade *zwei* zu verschiedenen Seiten von (x_0, y_0) liegende R-Punkte.

Wird jetzt irgendein A-Punkt (x_1, y_1) mit einem beliebigen J-Punkt (x_0, y_0) geradlinig verbunden, so folgt aus dem Gesagten, daß die Verbindungsstrecke einen R-Punkt enthalten muß.

Damit ist die zu Anfang dieser Nummer ausgesprochene Behauptung nunmehr vollständig bewiesen.

2 Wird an ein Rechteck ein zweites so angesetzt, daß es mit dem ersten längs einer Seite ganz[1]) oder teilweise zusammenhängt, so entsteht nach Entfernung des gemeinsamen Seitenstücks eine treppenförmige Begrenzung, welche geradeso wie jedes der einfachen Rechtecke die Ebene in zwei getrennte Gebiete zerlegt (s. Fig. 1) Denn bei dem angegebenen Verfahren wird lediglich ein gewisser Gebietsteil, das Innere des zweiten Rechtecks, dem Außengebiete des ersten entzogen und mit dessen Innengebiete vereinigt. Das analoge findet statt, wenn man an

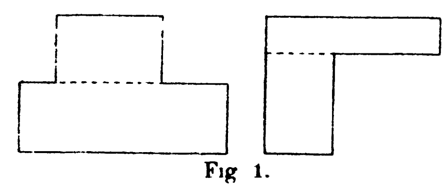


Fig 1.

das erste oder zweite der beiden vereinigten Rechtecke ein drittes, an eins von diesen ein viertes ansetzt usf., immer in der Weise, daß jedes neu angesetzte nur mit einem *einzigen* der bereits vorhandenen, nicht gleichzeitig mit einem der anderen zusammenhängt (s. Fig. 2). Wir bezeichnen die auf diese Weise entstehende, aus *abwechselnd horizontalen* und *vertikalen* Strecken zusammengesetzte geschlossene Figur als ein *einfach geschlossenes* (kürzer *einfaches*) *Treppenpolygon*. Die bei dem ersten dieser Schritte angewendete Schlußweise zeigt dann, daß ein auf die beschriebene

1) In diesem Falle werden die beiden aneinander stoßenden Seiten ausdrücklich verschieden lang angenommen.

Art hergestelltes *Treppenpolygon* die Ebene in zwei getrennte Gebiete, ein *inneres* und ein *äußeres* zerlegt. Nun kann man aber ein (einfach geschlossenes) *Treppenpolygon* auch in der Weise herstellen, daß man eine im übrigen völlig willkürlich zu denkende, aus lauter rechten Winkeln bestehende Zickzacklinie konstruiert, die von irgendeinem Punkte anfangend schließlich zu diesem zurückführt, ohne jemals zuvor einen ihrer Punkte wieder erreicht zu haben.

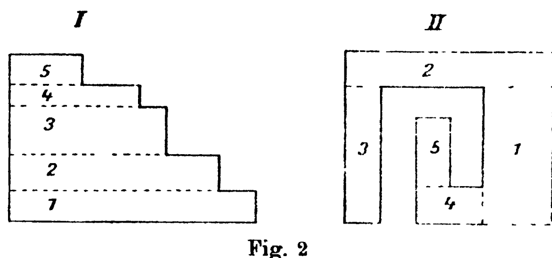


Fig. 2

Es entsteht die Frage, ob auch ein solches „beliebiges" *Treppenpolygon* stets die oben bezeichnete Eigenschaft besitzt. Diese Frage mag auf den ersten Blick trivial und ihre Bejahung selbstverständlich erscheinen Daß dies aber keineswegs der Fall ist, wird sofort ersichtlich, wenn man bedenkt, welch außerordentlich verwickelte Gestaltungen hier möglich sind. Ein solches *Treppenpolygon* kann einen so irrgartenähnlichen Anblick darbieten, daß die *Anschauung*, selbst wenn man sie als ausreichendes Beweismittel gelten lassen wollte, bezüglich der Unterscheidung eines „*Inneren*" und „*Äußeren*", abgesehen von den in einer gewissen Nähe der äußersten Begrenzungen liegenden Gebieten, völlig *versagt*. Man wird also, will man sich nicht mit einem gänzlich in der Luft schwebenden Analogieschlusse begnügen, etwa darauf ausgehen müssen, nachzuweisen, daß *jedes* beliebig vorgelegte *Treppenpolygon* auch in der zuerst beschriebenen Weise *aufgebaut* werden kann, und dieses Ziel wäre im wesentlichen erreicht, wenn gezeigt werden kann, daß umgekehrt jedes *Treppenpolygon* durch sukzessives *Abschneiden* von Rechtecken, deren jedes mit dem übrigen Komplex nur längs einer Seite zusammenhängt, sich schließlich auf *ein einzelnes Rechteck* reduzieren läßt. Hierbei stößt man aber sofort auf die folgende Schwierigkeit. Beachtet man zunächst, daß die *Seiten* eines *Treppenpolygons* durchweg *paarweise* vorhanden sind, und daß somit ihre *Anzahl*, wie auch die damit übereinstimmende der vorhandenen *Ecken* stets eine *gerade* sein muß, so handelt es sich vor allem um die Feststellung, ob sich bei jedem *Treppenpolygon* mit $2m$ Ecken wirklich stets mindestens *ein* Rechteck findet, durch dessen Abschneiden das erstere auf ein solches mit $2(m-1)$ Ecken reduziert wird. Dies ist nämlich keineswegs selbstverständlich. In der Figur 3 z. B. wäre es allerdings möglich, die fragliche Reduktion durch Abschneiden des Rechtecks 1 oder 5 (s. die punktierten Linien) zu erzielen, wogegen ein Abschneiden der Rechtecke 2, 3, 4 (s. die gestrichelten Linien) das Treppenpolygon *zerstückeln* würde.

Es wäre nun sehr wohl denkbar, daß es *Treppenpolygone* geben könnte, bei denen der letztgenannte Sachverhalt *durchweg* vorliegt: das Gegenteil bedarf jedenfalls eines ausdrücklichen Beweises. Dieser soll (behufs Herleitung eines wichtigen funktionentheoretischen Satzes) *an späterer Stelle* (s. § 56, Nr. 4) wirklich durchgeführt und daran anknüpfend auch gezeigt werden (a. a. O. Nr. 5), daß *jedes beliebige Treppenpolygon* sich in der beschriebenen Weise *aufbauen* läßt. *Hier* sollen zunächst nur gewisse vorbereitende Betrachtungen Platz finden, da sie zugleich ohne Benützung des soeben angekündigten Ergebnisses den fraglichen Beweis dafür liefern werden, daß jedes *Treppenpolygon* die Ebene in zwei getrennte Gebiete zerlegt.

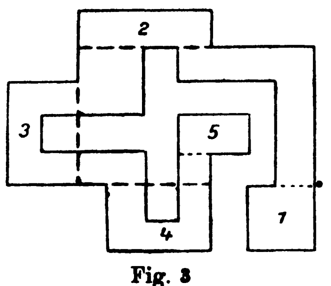


Fig. 3

3. Unter einem (offenen) *Treppenwege* verstehen wir eine gebrochene Linie, die aus paarweise rechtwinklig aneinander stoßenden, jedoch keinen weiteren Punkt gemein habenden Strecken besteht. Diese letzteren, die man ohne Beschränkung der Allgemeinheit als abwechselnd *horizontal und vertikal* annehmen kann, sollen als *Seiten*, die Punkte, in denen zwei Seiten zusammenstoßen, als *Ecken* des Treppenweges bezeichnet werden.

Bezieht man die Punkte des Treppenweges auf ein rechtwinkliges, zu den Seiten parallel gestelltes Koordinatensystem und bedient sich der Schreibweise $(x_\nu \cdots x \cdots x_{\nu+1})$ bzw. $(y_\nu \cdots y \cdots y_{\nu+1})$, um auszudrücken, daß x bzw. y *beständig wachsend oder abnehmend* das Intervall $[x_\nu, x_{\nu+1}]$ bzw. $[y_\nu, y_{\nu+1}]$ durchläuft, so läßt sich, falls man etwa einen Treppenweg betrachtet, der mit einer *Horizontalen* beginnt und mit einer *Vertikalen* endigt, die Gesamtheit seiner Punkte in folgender Weise anschreiben:

$$\begin{array}{ll}
x_0 \cdots x \cdots x_1 & y = y_0 \\
x = x_1 & y_0 \cdots y \cdots y_1 \\
x_1 \cdots x \cdots x_2 & y = y_1 \\
x = x_2 & y_1 \cdots y \cdots y_2 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
x_{n-1} \cdots x \cdots x_n & y = y_{n-1} \\
x = x_n & y_{n-1} \cdots y \cdots y_n .
\end{array}$$

Bedeutet (x', y') einen beliebigen Punkt des Treppenweges, so kann für die übrigen Punkte zwar noch beliebig oft x den Wert x', ebenso y den Wert y' annehmen, dagegen kann das Wert*epaar* (x', y') kein zweites Mal vorkommen.

4. Die *Ecken*, welche bei Treppenwegen auftreten, lassen sich zunächst nach dem folgenden rein geometrischen Gesichtspunkte in zwei verschiedene Gruppen teilen. Durchläuft man einen Treppenweg von einem beliebig gewählten der beiden äußersten Punkte anfangend, also in einem nach getroffener Wahl nunmehr eindeutig bestimmten Fortschreitungssinne, so sollen die einzelnen Ecken als solche *erster* oder *zweiter Art* bezeichnet werden, je nachdem man bei der Umlaufung den Winkel von 90° (s. Fig. 4, I) oder denjenigen von 270° (s. Fig 4, II) *zur Linken* hat.

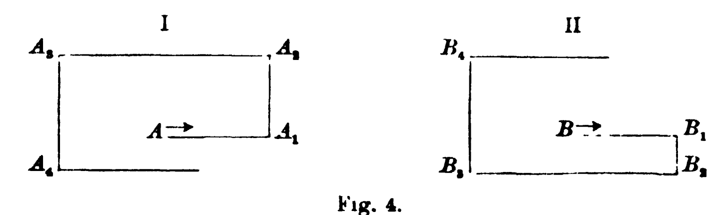


Fig. 4.

Diese Bezeichnungen sind offenbar lediglich *relative*: jede derselben geht in die andere über, wenn man die Durchlaufung des Treppenweges in entgegengesetztem Sinne vornimmt.

Um die vorstehende rein *geometrisch* definierte Einteilung auch *arithmetisch* zu charakterisieren, bemerken wir folgendes: Eine *Ecke* entsteht beim Übergange von der *horizontalen*, also *x-Richtung*, in die *vertikale*, also *y-Richtung*, oder *umgekehrt*. Hiernach wollen wir die Ecken im *ersten* Falle als *xy-Übergänge*, im *zweiten* als *yx-Übergänge* bezeichnen. Andererseits können in der Nachbarschaft eines solchen Überganges x und y in *gleichem* oder in *entgegengesetztem* Sinne sich ändern, und es soll, je nachdem das erstere oder das letztere der Fall ist, der betreffende Übergang als *gleichstimmig* oder *ungleichstimmig* bezeichnet werden. Alsdann ergibt sich, daß die zuvor gegebenen Begriffsbestimmungen auch durch die folgenden ersetzt werden können:

Ecken *erster Art*	Gleichstimmige	xy-Übergänge	(s. Fig. 4, I: A_1, A_3)
	Ungleichstimmige	yx-Übergänge	(dgl. : A_2, A_4)
Ecken *zweiter Art*	Ungleichstimmige	xy-Übergänge	(s. Fig 4, II: B_1, B_2)
	Gleichstimmige	yx-Übergänge	(dgl : B_3, B_4)

Ecken *derselben* bzw. *verschiedener* Art sollen als *gleichartig* bzw. *ungleichartig* bezeichnet werden.

5 Ändern sich x und y bei Durchlaufung des Treppenweges durchweg *monoton* (und zwar gleichgültig, ob in demselben oder in entgegengesetztem Sinne), so soll auch der *Treppenweg monoton* heißen. Er hat dann entweder lauter *gleichstimmige* oder lauter *ungleichstimmige* Ecken,

also in beständiger Abwechselung solche *erster* und *zweiter Art*: er verläuft „treppenförmig" im gewöhnlichen Sinne.

Ist der Treppenweg *kein monotoner*, so muß wenigstens eine der beiden Veränderlichen x, y mindestens *ein*mal vom Zunehmen zum Abnehmen übergehen oder umgekehrt, also mindestens ein (relatives) *Maximum* oder *Minimum* aufweisen. Es muß also mindestens *ein*mal eine unmittelbare Aufeinanderfolge einer *gleichstimmigen* xy- und einer *ungleichstimmigen* yx-Ecke (bzw. yx- und xy-Ecke), also *zweier gleichartiger* Ecken auftreten. Eine solche *Folge* zweier *gleichartiger* Ecken soll schlechthin als *Eckenfolge*, ihre Verbindungslinie als *Rückkehrseite* bezeichnet werden.

Es seien nun C, C' die Ecken einer solchen *Eckenfolge* und es werde zunächst vorausgesetzt, daß die zu einer dieser beiden Ecken, etwa C', *benachbarte* Ecke *näher* an C' liegt, als die zu C benachbarte Ecke[1]) an C. Die zu C' benachbarte Ecke ist entweder mit C *ungleichartig* oder *gleichartig*, und zwar soll im letzteren Falle angenommen werden, daß dann wenigstens die nächstfolgende Ecke mit C *ungleichartig* ist[2]) In jedem dieser beiden Fälle wird eine von der mit C *ungleichartigen* Ecke D zur Rückkehrseite $\overline{CC'}$ gezogene Parallele die bei C anstoßende Seite in einem Punkte B treffen (s. Fig. 5, I und II). Alsdann soll der Linienzug $\overline{BCC'D}$ bzw. $\overline{BCC'C''D}$ ein *einfaches Endstück* und, falls keine andere Seite des Treppenweges in das Innere des Rechtecks $BCC'D$ bzw. $BCC'C''$ eintritt oder mit der Strecke $\overline{BD}$ ein Stück gemein hat, ein *freies* (einfaches) *Endstück* des Treppenweges heißen. Man kann, wenn einer dieser Fälle eintritt, bei Durchlaufung des Treppenweges, ohne diesen im übrigen abzuändern, das Wegstück $\overline{BCC'D}$ bzw. $\overline{BCC'C''D}$ dadurch *ausschalten*, daß man es durch den kürzeren Weg $\overline{BD}$ *ersetzt*. Für diese Operation wollen wir die Bezeichnung einführen: man könne das *freie Endstück* $\overline{BCC'D}$ bzw. $\overline{BCC'C''D}$ mit Hilfe des „*Querschnittes*" $\overline{BD}$ von dem Treppenwege *abschneiden*. Hierbei kommen in dem durch Fig. 5, I dargestellten Falle die *gleichartigen* Ecken C, C' und die mit diesen *ungleichartige* Ecke D in Wegfall, während eine mit den beiden erstgenannten *gleichartige* Ecke bei B neu hinzutritt: der Treppenweg *verliert* also im ganzen *ein Paar ungleichartiger Ecken*. Im Falle der Figur 5, II *verschwinden* die *drei gleichartigen Ecken* C, C', C'' und die damit *ungleichartige* D, während andererseits zwei mit jenen ersteren *gleichartige* Ecken

---

1) An die Stelle dieser Ecke kann eventuell auch ein *Endpunkt* des Treppenweges treten

2) Diese Annahme ist *notwendig*, wenn anschließend an die Rückkehrseite $\overline{CC'}$ ein „*freies* Endstück" (s. die folgenden zwei Sätze des Textes) zum Vorschein kommen soll.

bei B und D neu hinzukommen: auch hier geht also genau *ein Paar ungleichartiger Ecken verloren.*

Wir betrachten jetzt die zweite einzig noch zu erledigende Möglichkeit, daß C und C' von ihren *benachbarten* Ecken (deren *eine* sich auch auf einen *Endpunkt* des Treppenweges reduzieren könnte) *gleich weit* entfernt sind. Dabei unterscheiden wir, ob diese *benachbarten* Ecken mit C und C' beide *ungleichartig* (s. Fig. 5, III) oder beide *gleichartig* (Fig. 5, V) sind, oder ob die *eine* mit C, C' *gleichartig*, die *andere ungleichartig* ist (Fig. 5, IV). Zugleich sollen in den *beiden letzten* Fällen die nächstbenachbarten (bzw. die nächstbenachbarte, wenn an die Stelle der einen ein Endpunkt tritt) mit C, C' *ungleichartig* sein.[1]) Wir bezeichnen alsdann die Linienzüge $\overline{DCC'D'}$, $\overline{DCC'C''D'}$ $\overline{DC_1CC'C''D'}$ gleichfalls als *Endstücke*, und zwar, falls eine besondere Unterscheidung gegenüber dem zuvor betrachteten

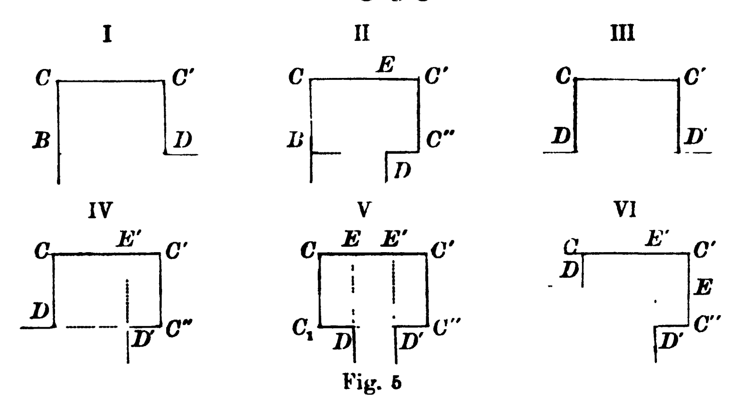


Fig. 5

einfachen Endstücke erforderlich sein sollte, die beiden letzten als *Doppelendstücke* (aus einem sogleich verständlich werdenden Grunde). Jedes der genannten drei Endstücke läßt sich, wenn es ein in dem zuvor gegebenen Sinne *freies* ist, durch den Querschnitt $\overline{DD'}$ *abschneiden.* Dabei gehen im Falle der Figur 5, III die *beiden* Ecken C, C' und die damit *ungleichartigen* Ecken D, D' ohne jeden Ersatz *verloren.* Im Falle der Figur 5, IV *verschwinden* die *drei gleichartigen* Ecken C, C', C'' und die *zwei* damit *ungleichartigen* D, D', während bei D' *eine* mit den erstgenannten *gleichartige* neu entsteht. Endlich im Falle der Figur 5, V *verschwinden* die *vier* Ecken C_1, C, C', C'' und die *zwei* damit *ungleichartigen* D, D', während *zwei* jener ersteren durch solche *gleicher* Art bei D und D' ersetzt werden

In jedem der vorstehenden drei Fälle gehen also *zwei Paare ungleichartiger Ecken verloren,* und es ergibt sich somit:

---

1) Vgl. die vorige Fußnote.

Satz I. *Wird von einem Treppenwege ein freies Endstück abgeschnitten, so verliert er* e i n *Paar oder* z w e i *Paare ungleichartiger Ecken.*

6. Im Anschluß an die Figuren 5 möge noch darauf hingewiesen werden, daß in dem durch Figur 5, II charakterisierten Falle auch bei der Rückkehrseite $C\overline{C'}$ ein freies Endstück vorhanden ist, welches an Stelle des zuvor *horizontal* abgeschnittenen durch einen *vertikalen* Schnitt (s. die *punktierte* Linie) abgetrennt werden kann. Das gleiche findet bei Fig. 5, IV statt, während man im Falle von Fig. 5, V, statt das *Doppel*endstück durch einen *horizontalen* Schnitt abzutrennen, auch die beiden *einfachen*, an die Rückkehrseiten CC_1 und $\overline{C'}\overline{C''}$ sich anschließenden Endstücke durch vertikale Querschnitte abschneiden kann. An dem Bestehen des Satzes I wird durch diese Modifikationen nichts geändert.

Bei den eben betrachteten Beispielen sind die *vertikal* abzuschneidenden Endstücke so gelegen, daß sie vollständig in die *horizontal* abzuschneidenden hineinfallen und daher gleichzeitig mit diesen auch beseitigt werden. Andererseits kann aber auch der Fall eintreten, daß solche Endstücke sich nur *teilweise* decken, und daß man daher lediglich die Wahl hat, zunächst das eine *oder* das andere abzuschneiden (s. Fig. 5, VI).

7. Satz II *Ein horizontal beginnender und ebenso endigender,* n i c h t m o n o t o n e r *Treppenweg, der zwei beliebige Punkte* (x_0, y_0) *und* (X, Y) *verbindend ganz im* I n n e r n *des von den Vertikalen* $x = x_0$ *und* $x = X$ *begrenzten Parallelstreifens verläuft, läßt sich durch sukzessives Abschneiden freier Endstücke in einen jene beiden Punkte verbindenden* m o n o t o n e n *Treppenweg verwandeln, der sich im Falle* $y_0 = Y$ *auf eine horizontale Gerade reduziert*

Beweis. Da der Treppenweg *nicht monoton* sein soll und somit mindestens *eine Rückkehrseite* enthält, so läßt sich zunächst die Existenz mindestens *eines freien Endstückes* erweisen. Ist nur *eine einzige* Rückkehrseite vorhanden, so muß die sie begrenzende *Eckenfolge* zwei mit ihr *ungleichartige* benachbarte Ecken[1]) haben: andernfalls würde ja eine weitere *Eckenfolge,* also auch eine weitere *Rückkehrseite* zum Vorschein kommen. Jene *eine* Rückkehrseite liefert daher jedenfalls ein *Endstück,* und zwar ein *freies,* also durch einen *Querschnitt* abtrennbares. Zunächst kann jedenfalls keiner der beiden Endpunkte (x_0, y_0) und (X, Y) im Innern dieses Endstücks oder auf dem Querschnitt liegen Denn da der Treppen-

1) Ist eine *Rückkehrseite* vorhanden, bei welcher ein *Endpunkt* des Treppenweges die Stelle einer benachbarten Ecke vertritt, so müßte das die erste oder letzte *Vertikale* des Treppenweges sein Man überzeugt sich leicht, daß eine solche *Rückkehrseite* niemals als *einzige* auftreten kann

weg ganz *im Innern* des Parallelstreifens $x = x_0$, $x = X$ verläuft, so genügen die Abszissen *aller* Punkte des Treppenweges außer den Endpunkten, wenn etwa $x_0 < X$ angenommen wird, der Bedingung $x_0 < x < X$. Träte nun irgendein Teil des Treppenweges in das Innere des Endstücks, so kann er dort keinesfalls *aufhören*, er müßte also sicher einmal *umkehren*, was die Existenz *einer weiteren* Rückkehrseite nach sich ziehen würde.

Enthält der Treppenweg *mehrere Rückkehrseiten*, so muß es unter diesen eine oder auch mehrere einander gleiche *kürzeste* geben Dann liefert jede solche *kürzeste* Rückkehrseite $\overline{CC'}$ ein *freies Endstück*. Gehören nämlich zu den Punkten C und C' *nicht gleichweit* von ihnen entfernte Nachbarecken, so muß, wenn etwa die zu C' benachbarte Ecke die *näher* gelegene ist, einer der beiden durch die Figuren 5, I und II charakterisierten Fälle eintreten[1]), und das hierbei sich ergebende *Endstück* muß ein *freies* bleiben, da ja bezüglich eines etwaigen Eindringens eines der *Endpunkte* des Treppenweges die zuvor bereits erörterte Unmöglichkeit bestehen bleibt, andererseits auch kein anderer Teil des Treppenweges in das Innere jenes Endstücks eintreten oder mit dem abschließenden Querschnitt ein Stück gemein haben kann, ohne die Existenz einer noch *kürzeren* Rückkehrseite (d. h. $< CC'$) nach sich zu ziehen. Liegen dagegen C und C' von ihren Nachbarecken *gleichweit* entfernt, so muß ein Endstück von einer der Formen Fig. 5, III—V resultieren[2]), das dann auch wieder aus den unmittelbar zuvor angeführten Gründen ein *freies* bleiben muß.

Somit ist zunächst gezeigt, daß jeder *nicht monotone* Treppenweg ein oder mehrere *freie Endstücke* enthält. Werden diese abgeschnitten, so ist der übrigbleibende Treppenweg (d. h derjenige, der aus dem ursprünglichen dadurch entstanden ist, daß die abgeschnittenen Wegstücke durch die entsprechenden Querschnitte ersetzt sind) entweder *monoton*, oder er besitzt noch ein oder mehrere freie Endstücke, die dann wieder wie zuvor abgeschnitten werden können. Fährt man in dieser Weise fort, so muß, da ja der ursprüngliche Treppenweg nur eine endliche Anzahl von Ecken besaß und durch das Abschneiden eines freien Endstücks jedesmal ein Eckenpaar verloren geht, nach einer endlichen Anzahl von Operationen der Fall eintreten, daß es unmöglich ist, weitere Ecken zu beseitigen, daß also auch *keine Rückkehrseite* mehr vorhanden sein kann, der Treppen-

1) Es kann nicht etwa an Stelle des in Fig. 5, II dargestellten Verlaufs der Treppenweg beim Punkte D nach *oben* abbiegen, da ja auf diese Weise eine *Rückkehrseite* $DC'' < CC'$ entstehen würde.

2) Bezüglich der in Fig. 5, IV und V dargestellten Fälle gilt eine analoge Bemerkung, wie die in der vorigen Fußnote enthaltene

weg somit ein *monotoner* geworden ist. Dabei bleiben die Endpunkte (x_0, y_0), (X, Y) als solche unverändert, der Treppenweg reduziert sich also auf ihre horizontale Verbindungslinie, falls $y_0 = Y$

8. **Satz III.** *Der im vorigen Lehrsatz charakterisierte Treppenweg zerlegt den von den Vertikalen $x = x_0$ und $x = X$ begrenzten Parallelstreifen in zwei getrennte Gebicte, ein „oberes" und ein „unteres".*

Beweis Der ausgesprochene Satz gilt zunächst, falls der Treppenweg ein *monotoner* ist, wie man unmittelbar erkennt, wenn man den letzteren aus einer *Horizontalen*, welche den Parallelstreifen in ein „oberes" und ein „unteres" Stück (charakterisiert durch die beiden sich ausschließenden Bedingungen $y > y_0$ und $y < y_0$) zerlegen würde, durch sukzessives *Ansetzen* treppenförmig gelagerter Rechtecke entstehen läßt (vgl. Nr. 2 und insbesondere Fig. 2, I, S. 69).

Nun kann nach Satz II jeder Treppenweg der vorliegenden Art durch *Abschneiden* freier Endstücke auf einen *monotonen* reduziert werden. Er läßt sich daher auch umgekehrt aus diesem letzteren durch *Ansetzen* jener Endstücke wieder herstellen. Wird also angenommen, daß der fragliche Satz für irgendeinen Treppenweg t der bezeichneten Art gilt, und sodann gezeigt, daß aus dieser Voraussetzung seine Gültigkeit für jeden aus t durch *Ansetzen* eines *freien Endstückes* entstehenden Treppenweg resultiert, so ergibt sich durch vollständige Induktion seine Allgemeingültigkeit.

Sei also t ein Treppenweg, welcher den Parallelstreifen in zwei getrennte Gebiete zerlegt Sind dann P und P_1 zwei innere Punkte des einen Gebietes, etwa des *oberen*, so lassen sie sich möglicherweise durch eine gerade, jedenfalls aber auf unendlich viele Arten durch gebrochene, ganz aus Innenpunkten bestehende Linien verbinden. Mit Rücksicht auf das folgende wollen wir von allen diesen möglichen Verbindungen *eine* ganz besonders hervorheben. Wir denken uns von P aus die nach abwärts gerichtete Vertikale gezogen, so muß diese den Treppenweg t in *einem* bzw in *einem ersten* Punkte P' treffen Sollte P_1 auf $\overline{PP'}$ oder auf der *nach oben* gerichteten Verlängerung von $\overline{PP'}$ liegen, so mag die Strecke $\overline{PP_1}$ als die in Frage stehende Verbindung gelten. Wenn nicht, so wird die von P_1 aus abwärts gerichtete Vertikale den Treppenweg gleichfalls in *einem* bzw. in *einem ersten* Punkte P_1' treffen, der von P_1 verschieden ist Wird dann das zwischen den Punkten P' und P_1' liegende Stück von t mit (t) bezeichnet, so bildet der Linienzug $\overline{PP'}(\text{t})\overline{P_1'P_1}$ einen die Punkte P und P_1 verbindenden Treppenweg, der sich folgendermaßen in einen ganz aus *Innenpunkten* des oberen Gebietes bestehenden umformen läßt. Es sei δ eine positive Zahl, die höchstens so groß ist wie die kleinste Seite und

der kleinste Abstand zweier parallelen Seiten von t, auch höchstens so groß wie jede der Strecken $\overline{PP'}$, $\overline{P_1 P_1'}$ und ihre kleinsten Abstände von etwa zwischen ihnen liegenden Vertikalseiten von t. Wird jetzt $\delta' < \frac{\delta}{2}$ angenommen, so läßt sich dem Treppenwege (t) ein aus *Innenpunkten* des oberen Gebietes bestehender, im Abstande δ' parallel zu den Seiten von (t) verlaufender Treppenweg $(\bar{t})$ zuordnen, der die Strecke $\overline{PP'}$ im Punkte P'', die Strecke $\overline{P_1 P_1'}$ im Punkte P_1'' treffen mag. Alsdann bildet der durchweg aus *Innenpunkten* bestehende Treppenweg $\overline{PP''}(\bar{t})\overline{P_1'' P_1}$ die fragliche Verbindung der Punkte P und P_1

Nun werde der Treppenweg t durch *Ansetzen* eines *freien Entstückes* in einen (gleichfalls im Innern der vertikalen Grenzlinien $x = x_0$ und $x = X$ verlaufenden) Treppenweg t′ übergeführt, also in der Weise abgeändert, daß man entweder *ein Stück einer Seite* (s. Fig. 6, Ia, IIIa, IVa) oder *eine ganze Seite* (s. Fig. 6, IIa, Va)[1]) durch einen mit dem Treppenwege t sonst nirgends zusammenstoßenden, auch die Grenzvertikalen nicht berührenden gebrochenen Linienzug ersetzt, der mit der ausgeschalteten (nötigenfalls verlängerten) Strecke zusammen ein *Rechteck* bildet. Dann

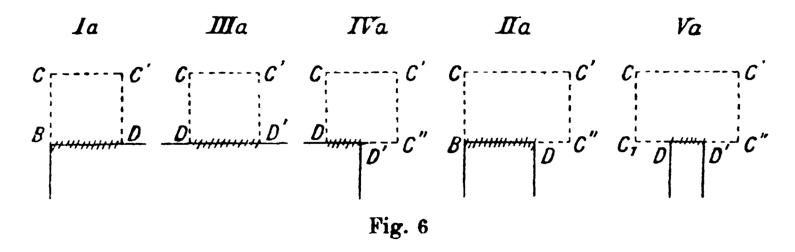


Fig. 6

läßt sich zeigen, daß auch der Treppenweg t′ den Parallelstreifen in zwei getrennte Gebiete zerlegt. Hält man an derjenigen Orientierung fest, welche den Figuren 6 zugrunde liegt, so werden, wenn man die *ausgeschalteten* (in den Figuren durchstrichenen) Wegestücke durch die *neu hinzutretenden* (in den Figuren gestrichelten) ersetzt, die *Innenpunkte* des betreffenden Rechtecks dem *oberen* Gebiete entzogen und dem (jenseits jener ausgeschalteten Wegestücke beginnenden, also) *unteren* Gebiete hinzugefügt. Der *Zusammenhang* des letzteren wird durch diese Vergrößerung nicht alteriert, ebenso bleibt die Tatsache bestehen, daß auch der Treppenweg t′ das *untere* Gebiet von den übrigen Punkten des Parallelstreifens vollständig trennt. Ein Zweifel könnte noch darüber be-

1) Die Numerierung der Figuren und die Bezeichnung der einzelnen Eckpunkte entspricht genau denjenigen der Figuren 5, I—V, S. 73, während die Reihenfolge nach Maßgabe des hier vorliegenden Einteilungsprinzips abgeändert ist.

stehen, ob auch der *Zusammenhang* des *oberen* Gebietes bei der fraglichen Operation stets gewahrt bleibt Um dies festzustellen, seien wieder P und P_1 zwei beliebige, nicht dem unteren Gebiete angehörige Innenpunkte des Parallelstreifens. Liegen P und P_1 in derselben Vertikalen und enthält die Strecke $\overline{PP_1}$ keinen Punkt des Treppenweges t', so ist die Frage des Zusammenhanges für sie erledigt. In jedem andern Falle werden wieder die von P und P_1 abwärts gerichteten Vertikalen den Treppenweg t' in je *einem* bzw. *einem ersten* Punkte P' und P_1' treffen. Enthält das zwischen P' und P_1' liegende Stück des Treppenweges t' keinen Bestandteil der eingeschalteten Rechteckseiten (so daß es also mit dem entsprechenden Stück von t identisch ist), so bleibt (abgesehen von eventuell erforderlichen Verkleinerung des früheren δ) der zuvor festgestellte Zusammenhang von P' und P_1' unverändert. Enthält dagegen das betreffende Wegestück die eingeschalteten Rechteckseiten ganz oder teilweise, so läßt sich die zuvor bei Betrachtung des Treppenweges t angegebene Konstruktion eines im Abstande δ' benachbarten Parallelweges auch auf diese neu hinzutretenden Teile ausdehnen, da ja deren äußere Nachbarschaft ausschließlich aus Punkten des früheren Obergebietes besteht: man hat lediglich bei der Bestimmung der zuvor mit δ bezeichneten Zahl auch die dort näher bezeichneten Abstände von den neu hinzutretenden Bestandteilen des Treppenweges mit in Rechnung zu ziehen Hiernach bildet also auch die durch den Treppenweg t' von dem *unteren* Gebiet abgetrennte Punktmenge ein (zusammenhängendes) *oberes* Gebiet.

Damit ist aber auf Grund der vorausgeschickten Bemerkungen die Gültigkeit des ausgesprochenen Satzes III allgemein bewiesen

9. Ein (einfaches) *Treppenpolygon* erscheint in dem vorliegenden Zusammenhange als (einfach) *geschlossener Treppenweg*, d. h. als ein solcher, bei dem Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen. Aus dem soeben bewiesenen Satze ergibt sich nun mit Leichtigkeit der folgende

Hauptsatz *Jedes Treppenpolygon $\mathfrak{T}$ zerlegt die Ebene in zwei getrennte Gebiete, ein (im Endlichen liegendes) inneres und ein (ins Unendliche sich erstreckendes) äußeres*

Beweis. Es werde vorläufig angenommen, daß unter den *horizontalen* Seiten von $\mathfrak{T}$ nur *eine* am tiefsten gelegen ist. Wir machen ihre beiderseitige Verlängerung zur Abszissenachse, legen den Anfangspunkt 0 weit genug nach links und wählen zugleich eine Abszisse X groß genug, daß $\mathfrak{T}$ in das Innere des von den Vertikalen $x = 0$ und $x = X$ begrenzten Parallelstreifens fällt. Nun werde jene tiefste Horizontalseite von $\mathfrak{T}$, deren Eckpunkte mit A und B bezeichnet werden mögen, ausgeschaltet und sodann das auf diese Weise geöffnete $\mathfrak{T}$ durch Hinzufügung der Strecken

$\overline{OA}$ und $\overline{BX}$ in einen die beiden Grenzvertikalen des Parallelstreifens verbindenden Treppenweg übergeführt. Dieser zerlegt dann nach Satz III den Parallelstreifen in ein *oberes* und ein *unteres* Gebiet. Durch Wiedereinschaltung der Strecke $\overline{AB}$ zerfällt das letztere in die *untere Hälfte* des Parallelstreifens (vollständig charakterisiert durch die Bedingungen: $0 < x < X$, $y < 0$) und als *Restgebiet* das *Innere* des *Treppenpolygons* $\mathfrak{T}$. Durch Beseitigung der beiden Vertikalen $x = 0$ und $x = X$, sowie der horizontalen Verlängerungen von $\overline{AB}$ werden dann schließlich alle außerhalb $\mathfrak{T}$ gelegenen Punkte zu einem einzigen *Außengebiete* vereinigt. Damit ist der ausgesprochene Satz zunächst unter der in bezug auf $\mathfrak{T}$ gemachten Einschränkung erwiesen.

Betrachten wir jetzt ein Treppenpolygon $\mathfrak{T}$ mit beliebig vielen auf gleicher Horizontale tiefstgelegenen Seiten, deren eine wieder mit $\overline{AB}$ bezeichnet werden möge, so führen wir dasselbe durch Ansetzen eines Rechtecks (mit beliebig kleiner Höhe) längs der Seite $\overline{AB}$ in ein solches über, welches der vorigen Bedingung genügt und somit die Ebene in zwei getrennte Gebiete zerlegt. Dieses Ergebnis bleibt aber bestehen, wenn man das angesetzte Hilfsrechteck wieder beseitigt, indem man seine Punkte (bis auf die Strecke $\overline{AB}$) dem Außengebiete zuteilt

Zusatz. Wird eine Durchlaufung des Treppenpolygons, die von dem zuvor mit A bezeichneten Punkte in der Richtung AB beginnt, als *positive* bezeichnet, so ist das *Innere* des Treppenpolygons dadurch charakterisiert, daß seine an die Begrenzung anstoßenden Punkte bei jenem *positiven* Umlauf stets zur *Linken* liegen. In der Nähe der Ecken *erster* Art (siehe Nr. 4, S. 71) gehören dann die Punkte zwischen den Schenkeln des *rechten* Winkels, in der Nähe der Ecken *zweiter* Art diejenigen zwischen den Schenkeln des *überstumpfen Winkels* dem *Innern* an Die Ecken *erster* Art werden in diesem Zusammenhange als *konvex* (sc. nach außen) oder *ausspringend*, die Ecken *zweiter* Art als *konkav* (sc. nach außen) oder *einspringend* bezeichnet.

10. Mit Rücksicht auf eine späterhin zu machende Anwendung fügen wir noch die folgenden, übrigens auch an sich des Interesses nicht entbehrenden Bemerkungen hinzu.

Ein *monotoner*, horizontal beginnender und horizontal endigender Treppenweg hat genau so viele Ecken *erster* wie *zweiter* Art (da dieselben, beständig abwechselnd, *paarweise* auftreten). Da jeder *beliebige*, nur gleichfalls horizontal beginnende und endigende Treppenweg durch Abschneiden freier Endstücke auf einen *monotonen* (eventuell auf eine horizontale Gerade) reduziert werden kann (s. Satz II, S. 74) und bei dieser sukzessiven Reduktion *ungleichartige* Ecken stets *paarweise* verloren gehen (s. Satz I, S. 74), so folgt:

Jeder horizontal beginnende und horizontal endigende Treppenweg besitzt ebensoviele Ecken erster wie zweiter Art.[1])

Um dieses Ergebnis auf ein *Treppenpolygon* anzuwenden, denken wir uns eine am tiefsten gelegene horizontale Seite $\overline{AB}$ (gleichgültig, ob sie die einzige ist oder nicht) nach links und rechts um je eine beliebig kleine[2]) Strecke verlängert, sodann durch *Ausschaltung* des Stückes $\overline{AB}$ das Treppenpolygon in einen horizontal beginnenden und ebenso endigenden Treppenweg verwandelt, der also *gleichviele* Ecken *beider Arten* besitzt. Werden sodann die beiden Verlängerungen wieder beseitigt, dagegen die Polygonseite $\overline{AB}$ wieder eingeschaltet, so fallen zwei *konkave Ecken* weg, während *zwei konvexe* hinzukommen. Mithin ergibt sich:

Jedes Treppenpolygon hat einen Überschuß von vier gleichartigen und zwar nach außen konvexen Ecken.

Ein treppenförmiges $2m$-Eck hat also $m-2$ *konkave* und $m+2$ *konvexe* Ecken Seine *Innenwinkel* liefern daher die *Summe* von

$$(m-2)\cdot 270^0 + (m+2)\cdot 90^0 = (m-1)\cdot 360^0 \quad \text{oder} \quad 4(m-1)$$

Rechten.

§ 10.[3]) Zyklisch zusammenhängende Punktmengen. — Approximierung der äußeren Berandung eines im Endlichen gelegenen Bereiches durch Treppenpolygone. — Charakterisierung dieser Berandung als linienhaftes Kontinuum, das aus einer zyklisch zusammenhängenden Punktmenge mit Hinzunahme ihrer Häufungspunkte besteht. — Äußere Berandungen eines zusammenhängenden Bereiches, welche die Ebene in mehr als zwei getrennte Gebiete zerlegen. — Ein- und mehrfach zusammenhängende Bereiche.

1. Um den Gang der Untersuchung späterhin nicht zu unterbrechen, schicken wir zunächst die Definition einer Kategorie von Punktmengen voraus, die wir als *zyklisch zusammenhängend* bezeichnen werden.

Es sei eine unendliche Folge endlicher Punktmengen mit beständig zunehmender Gliederzahl gegeben: $\{P_{n_0}^{(0)}\}$, $\{P_{n_1}^{(1)}\}, \ldots, \{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}, \ldots\ldots$, aus-

1) Der Satz behält selbstverständlich Gültigkeit, wenn man „horizontal" durch „vertikal" ersetzt

2) D. h. jedenfalls klein genug, daß diese Verlängerungen keine etwa auf derselben Horizontale liegende Polygonseite erreichen können.

3) Der Anfänger wird gut tun, die beiden Paragraphen 10 und 11 (etwa abgesehen von den in § 11, Nr 2/3 gegebenen Definitionen und dem Wortlaut des Hauptsatzes von Nr. 5) bei einem ersten Studium zu überschlagen und sich erst allmählich mit ihrem Inhalte vertraut zu machen, wenn dieser späterhin benützt wird.

führlicher geschrieben:

$$\begin{array}{l} P_1^{(0)},\ P_2^{(0)},\ P_3^{(0)},\ \ldots .\ P_{n_0}^{(0)}, \\ P_1^{(1)},\ P_2^{(1)},\ P_3^{(1)},\ \quad \ldots,\ P_{n_1}^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_1^{(\nu)},\ P_2^{(\nu)},\ P_3^{(\nu)},\ \ldots\ \ldots,\ P_{n_\nu}^{(\nu)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

und zwar soll sein:

$$P_1^{(0)} = P_1^{(1)} = \cdots = P_1^{(\nu)} = \quad ,$$

so daß also jede dieser Mengen mit demselben Punkte $P_1^{(0)}$ *beginnt.* Ferner soll eine jede aus der unmittelbar vorangehenden lediglich durch *Einschaltung* bzw. *Anfügung* neuer Punkte bei gleichzeitiger Festhaltung der für die bereits vorhandenen Punkte bestehenden Ordnung hervorgehen und somit *alle* vorhergehenden als *Teilmengen* enthalten. Es gibt dann eine *unendliche* und zwar *abzählbare* Menge, welche alle möglichen Mengen $\{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ enthält, die wir als deren *Vereinigungsmenge*, in Zeichen: $\lim\limits_{\nu \to \infty} \{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$, bezeichnen.

Wird sodann für hinlänglich großes ν der *Abstand* je zweier konsekutiver Punkte $P_\lambda^{(\nu)}$, $P_{\lambda+1}^{(\nu)}$ *beliebig klein*, etwa:

$$\overline{P_\lambda^{(\nu)} P_{\lambda+1}^{(\nu)}} < \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq n, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, n_\nu - 1,$$

so ist jene *Vereinigungsmenge zusammenhängend* und man hat:

$$\lim_{\nu \to \infty} \overline{P_\lambda^{(\nu)} P_{\lambda+1}^{(\nu)}} = 0,$$

nicht nur für jedes einzelne λ, sondern auch für beliebig ins *Unendliche* wachsende $\lambda \leqq n_\nu - 1$.

Kommt nun zu diesen Bedingungen noch die folgende hinzu:

$$\lim_{\nu \to \infty} \overline{P_{n_\nu}^{(\nu)} P_1^{(\nu)}} = \lim_{\nu \to \infty} \overline{P_{n_\nu}^{(\nu)} P_1^{(0)}} = 0,$$

so soll jene Vereinigungsmenge als *zyklisch zusammenhangend* bezeichnet werden Sie läßt sich dann, ohne ihren Charakter zu ändern, in der Weise zyklisch permutieren, daß sie mit einem beliebig vorzuschreibenden ihrer Punkte, etwa $P_\lambda^{(\mu)}$, *beginnt.* Um dies zu erzielen, hat man nur die obige Mengenfolge nach Weglassung der ersten μ Zeiten mit der folgenden Menge zu beginnen:

$$P_\lambda^{(\mu)},\ P_{\lambda+1}^{(\mu)},\ \quad,\ P_{n_\mu}^{(\mu)},\ P_1^{(\mu)},\ P_2^{(\mu)}, \ldots,\ P_{\lambda+1}^{(\mu)}.$$

und jede der folgenden Mengen gleichfalls zyklisch so zu permutieren, daß sie mit demjenigen Gliede beginnt, welches den Punkt $P_\lambda^{(\mu)}$ vorstellt

2. Nun sei $\mathfrak{B}$ ein im Endlichen gelegener *abgeschlossener* und *zusammenhängender* Bereich. Seine Berandung kann dann keinesfalls einen *isolierten* Punkt enthalten (s. § 8, Nr. 5, Fußn. 2), S. 65).

Es werde zunächst $\mathfrak{B}$ in ein Quadrat $\mathfrak{Q}$, etwa von der Seitenlänge λ eingeschlossen, groß genug, daß alle *Randpunkte* von $\mathfrak{B}$ in das *Innere* von $\mathfrak{Q}$ fallen und somit, da sie eine *abgeschlossene* Menge bilden (s § 8, Nr. 5), einen gewissen *Minimalabstand* ε_0 von der gleichfalls eine *abgeschlossene* Menge bildenden Grenze $\mathfrak{Q}$ besitzen. Wird jetzt eine natürliche Zahl m_0 so gewählt, daß: $\delta_0 \equiv \frac{\lambda}{m_0} < \varepsilon_0$ und darauf $\mathfrak{Q}$ in m_0^2 Teilquadrate von der Seitenlänge δ_0 zerlegt, so werden alle an die vier Seiten von $\mathfrak{Q}$ angrenzenden Teilquadrate weder im Innern, noch auf der Begrenzung einen *Randpunkt* von $\mathfrak{B}$ enthalten, also durchweg aus *Außenpunkten* von $\mathfrak{B}$ bestehen An den auf diese Weise entstandenen *quadratischen Ring* von *randpunktfreien* Teilquadraten schließen wir alle vorhandenen[1]) gleichfalls *randpunktfreien* Quadrate des nach innen angrenzenden *zweiten* quadratischen Ringes, sodann von den etwaigen *randpunktfreien* Quadraten des *dritten* Ringes *nur diejenigen*, welche *längs einer Seite* an ein *randpunktfreies* Quadrat des *zweiten* Ringes angrenzen oder mit einem aus diesem Grunde bereits angeschlossenen Quadrate des *dritten* Ringes in gleicher Art zusammenhängen. Dieses Verfahren soll fortgesetzt werden, solange noch *randpunktfreie* Quadrate vorhanden sind, die mit einem bereits angeschlossenen *längs einer Seite* zusammenhängen.

Die Zusammenfassung aller dieser Teilquadrate mit der außerhalb $\mathfrak{Q}$ liegenden Punktmenge liefert ein ins Unendliche sich erstreckendes *Gebiet* $\mathfrak{A}_0$ von *Außenpunkten* des Bereiches $\mathfrak{B}$, welches, wie sogleich gezeigt werden soll, von einem einzigen (einfach geschlossenen) *Treppenpolygon* begrenzt wird.

3. Wir betrachten irgendeine der *Begrenzung* von $\mathfrak{A}_0$ angehörige Teilquadratseite, etwa die (nur behufs Fixierung der Ausdrucksweise) *horizontal* angenommene Strecke $\overline{AB}$, die also die Trennungslinie zwischen einem (zu $\mathfrak{A}_0$ gehörigen) *randpunktfreien* und einem *randpunkthaltigen* Quadrate oder, wie wir von jetzt ab zumeist kürzer sagen wollen, zwischen einem $\mathfrak{A}$-*Quadrate* und einem $\mathfrak{R}$-*Quadrate* bildet. Das *erstere* (in Fig. 7, I—IVa mit a bezeichnete) mag, um eine (an sich wiederum gleichgültige) Festsetzung zu treffen, *unterhalb*, das *letztere* (ebendaselbst mit b bezeichnete) *oberhalb* $\overline{AB}$ angenommen werden Für die beiden nach *rechts* benachbarten Quadrate sind dann bezüglich ihrer Zugehörig-

1) Sollte kein solches randpunktfreies bei der getroffenen Wahl von δ_0 vorhanden sein, so muß der im Text angenommene entgegengesetzte Fall bei passender Verkleinerung von δ_0 sicher eintreten.

keit zu den $\mathfrak{A}$- oder $\mathfrak{R}$-Quadraten die *vier* verschiedenen, durch die Figuren 7, I—IV dargestellten Fälle denkbar: die $\mathfrak{A}$-Quadrate sind dabei durch *Schraffierung* gekennzeichnet, die $\mathfrak{R}$-Quadrate *weiß* gelassen.

Man erkennt unmittelbar, daß es in den Fällen I—III stets *eine* und *nur* eine Quadratseite gibt (nämlich die mit $\overline{BC}$ bezeichnete), die als Begrenzungsstück des Gebietes $\mathfrak{A}_0$ sich an $\overline{AB}$ anschließt Eine Schwierig-

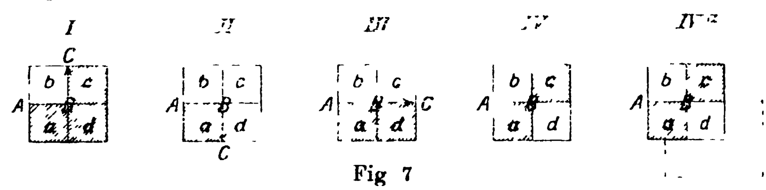


Fig 7

keit würde sich dagegen im Falle der Figur IV ergeben, in dem ja *eine jede* der *drei* an $\overline{AB}$ sich anschließenden Quadratseiten der Begrenzung von $\mathfrak{A}_0$ angehören müßte Dieser Fall kann nun aber in Wirklichkeit *niemals* eintreten Denn jedes der beiden mit a und c bezeichneten $\mathfrak{A}$-Quadrate gehört ja zu $\mathfrak{A}_0$ und hängt daher mit dem anderen zusammen (wie in Fig IVa durch die punktierten Linien schematisch angedeutet ist) Da außerdem der Punkt B *kein Randpunkt* von $\mathfrak{B}$ ist, so besitzt er auch eine gewisse *randpunktfreie* Umgebung, die also aus lauter *Außenpunkten* von $\mathfrak{B}$ bestehen muß Hiernach würde also das mit d bezeichnete Quadrat, das mindestens einen *Randpunkt* von $\mathfrak{B}$ enthalten müßte, von einem aus lauter *Außenpunkten* von $\mathfrak{B}$ bestehendem Gebiete vollständig umschlossen und von dem gleichfalls *randpunkthaltigen* Quadrate b abgetrennt werden, was der Voraussetzung des *Zusammenhanges* von $\mathfrak{B}$ widerspricht. Damit erscheint also das Eintreten jeder anderen Möglichkeit, als der in Fig. 7, I—III dargestellten *ausgeschlossen*

Da die analoge Schlußweise auf die in Fig. 7, I III mit $\overline{BC}$ bezeichnete Quadratseite anwendbar ist (d h. *mutatis mutandis*, wenn die letztere, wie in Fig. I und II, *vertikal* liegt), ebenso auch in bezug auf die Fortsetzung der Quadratseite $\overline{AB}$ nach *links*, so erscheint als Begrenzung von $\mathfrak{A}_0$ ein an die Strecke $\overline{AB}$ nach *rechts* sich anschließender *Treppenweg*, der sich *niemals verzweigen* und *niemals abbrechen* kann, also schließlich bei A wieder *einmünden* muß und so zu einem einfach geschlossenen *Treppenpolygon* $\mathfrak{T}_0$ wird. Dieses letztere zerlegt die Ebene in *zwei getrennte Gebiete*, deren *inneres* den Bereich $\mathfrak{B}$ und zwar wegen des *Zusammenhanges* von $\mathfrak{B}$ *vollständig* enthält, während das *äußere* (einschließlich seiner polygonalen Begrenzung) lediglich aus *Außenpunkten* von $\mathfrak{B}$ besteht und ein „*luckenlos*"[1]) ins Unendliche sich erstreckendes, oben bereits mit $\mathfrak{A}_0$ bezeichnetes Gebiet bildet.

1) Das soll in dem vorliegenden Zusammenhange besagen Es kann nicht

4. Die an $\mathfrak{T}_0$ nach innen *anliegenden*[1]) $\mathfrak{R}$-Quadrate haben teils eine *Seite*, teils nur einen *Eckpunkt*[2]) miteinander gemein. Liegt ein *Randpunkt* von $\mathfrak{B}$ im *Innern* eines solchen Quadrats, so muß das letztere deren *unendlich viele* enthalten, da ja jeder *Randpunkt* zugleich *Häufungspunkt* von *Randpunkten* ist. Liegt er dagegen auf einer *Quadratseite* (die dann selbstverständlich eine nicht zu $\mathfrak{T}_0$ gehörige sein muß), so kann er für das betreffende Quadrat und, wenn er ein *Eckpunkt* ist, auch für *zwei* benachbarte (s. Fig. 8, I), ja sogar für *drei* in diesem Eckpunkte aneinander stoßende Quadrate (s. Fig. 8, II) der *einzige* sein Es besteht daher im äußersten Falle die Möglichkeit, daß die *Gesamtheit* der *Randpunkte*, welche den an $\mathfrak{T}_0$ anliegenden $\mathfrak{R}$-Quadraten angehören, eine *endliche* Menge bilden Im allgemeinen wird aber diese Menge eine *unendliche* sein. Mit Rücksicht auf das folgende ist es wichtig, für diesen Fall eine ganz bestimmte *endliche* Menge daraus zu isolieren Hierzu heben wir aus jedem der an $\mathfrak{T}_0$ anliegenden $\mathfrak{R}$-Quadrate je einen solchen Punkt heraus, der von einer der zu $\mathfrak{T}_0$ gehörigen Quadratseiten *den kleinsten Abstand* hat, d h., da ja ein $\mathfrak{R}$-Quadrat höchstens *drei* zu $\mathfrak{T}_0$ gehörige Quadratseiten enthalten kann, höchstens *drei* solche Punkte, die aber auch teilweise oder insgesamt und zwar sogar gleichzeitig für *zwei* oder *drei* benachbarte $\mathfrak{R}$ Quadrate in einen *einzigen* zusammenfallen können (s. Fig 8, I und II) Sollten andererseits für irgendeine Quadratseite *mehrere* bzw *unendlich viele „nächstgelegene“ Randpunkte* vorhanden sein, so soll es freistehen, einen *beliebigen* davon auszuwählen

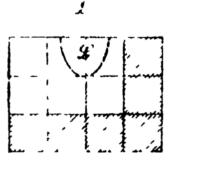


Fig. 8.

5 Wir fixieren nun irgendeins der an $\mathfrak{T}_0$ anliegenden $\mathfrak{R}$-Quadrate als Nr. 1 und denken uns, von diesem ausgehend, einen vollständigen Umlauf längs $\mathfrak{T}_0$ etwa in positiver Richtung[3]) ausgeführt, zugleich jeder *einzelnen* zu $\mathfrak{T}_0$ gehörigen Quadratseite bzw *Folge* von *zwei* oder *drei* solchen Quadratseiten (wie in Fig. 8, I und II) den oben herausgehobenen *nächstgelegenen Randpunkt zugeordnet* und der Reihenfolge entsprechend *numeriert*

Eine scheinbare Schwierigkeit könnte hierbei eintreten, falls ein $\mathfrak{R}$-

etwa ein *zweites* Treppenpolygon von der Art des mit $\mathfrak{T}_0$ bezeichneten irgendein Teilgebiet aus $\mathfrak{A}_0$ ausschneiden, da dessen Existenz wieder der Voraussetzung des Zusammenhanges von $\mathfrak{B}$ widersprechen würde.

1) *„Anliegend“* bedeutet immer längs einer *Seite* zusammenhängend

2) Einen *Eckpunkt* nämlich dann, wenn dieses den Scheitel eines *einspringenden* Winkels von $\mathfrak{T}_0$ bildet

3) Vgl. § 9, Nr 9, Zusatz (S 79).

Quadrat, das *zwei parallele* Seiten (ohne verbindende dritte) mit $\mathfrak{T}_0$ gemein hat und daher bei Umlaufung von $\mathfrak{T}_0$ *zweimal* passiert wird, nur einen *einzigen Randpunkt* enthielte. Dieser Fall kann aber wiederum in Wirklichkeit *niemals* eintreten, wie die folgende Überlegung zeigt. Angenommen, es gäbe ein Quadrat von der fraglichen Beschaffenheit, etwa das in Fig. 9 mit $\overline{ABB'A'}$ bezeichnete Die beiden anliegenden *schraffierten* Quadrate sind dann als *randpunktfrei* und (wie durch die punktierten Linien wieder schematisch angedeutet wird) *zu* $\mathfrak{A}_0$ *gehörig* anzusehen, während jedes der beiden anderen anliegenden, mit a und b bezeichneten Quadrate *Randpunkte* von $\mathfrak{B}$ enthalten muß. Der hypothetische *einzige*, dem Quadrate $\overline{ABB'A'}$ angehörige *Randpunkt* müßte auf $\overline{AB}$ oder $A'B'$ liegen, so daß die ganze Fläche des Quadrats $ABB'A'$ mit Ausnahme dieses einzigen Punktes aus lauter *Außenpunkten* von $\mathfrak{B}$ bestehen und durch Vermittlung der beiden schraffierten Nachbarquadrate mit $\mathfrak{A}_0$ zusammenhängen würde. Dann lägen aber die beiden *randpunkthaltigen* Quadrate a und b in zwei vollständig von *Außenpunkten* umschlossenen getrennten Gebieten, was wiederum der Voraussetzung des *Zusammenhanges* von $\mathfrak{B}$ widersprechen würde Das gleiche würde aber sogar schon dann eintreten, wenn das Quadrat $\overline{ABB'A'}$ irgendein, die beiden schraffierten Nachbarquadrate verbindendes *Gebiet* (z B. einen beliebig schmalen *Streifen*) von *Außenpunkten* enthielte. Es müssen daher im *Innern* des Quadrates $ABB'A'$ *Randpunkte*, also auch *Innenpunkte* von $\mathfrak{B}$ liegen und aus dem letzteren Umstande geht insbesondere hervor, daß die betreffende *Randpunkt*menge *keinesfalls* aus Punkten einer einzigen zu AA' parallelen Strecke bestehen kann. Daraus folgt aber, daß es zu *jeder* der beiden parallelen Seiten AA' und $\overline{BB'}$ einen besonderen *nächstgelegenen Randpunkt* gibt und daß der *am nächsten* zu $\overline{AA'}$ liegende von BB' *entfernter* ist, als der zu BB' *nächstliegende*.

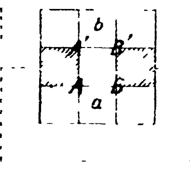


Fig 9

Hiernach läßt sich also in der Tat nach der angegebenen Vorschrift eine bestimmte, eindeutig geordnete *endliche* Folge „*ausgezeichneter*“ *Randpunkte*:

$$P_1^{(0)},\ P_2^{(0)},\ P_3^{(0)},\ \ldots,\ P_{n_0}^{(0)},$$

deren Gesamtheit mit $\{P_{n_0}^{(0)}\}$ bezeichnet werden möge, aus der Menge derjenigen, die den an $\mathfrak{T}_0$ anliegenden $\mathfrak{R}$ Quadraten angehören, herausheben. Der Abstand *zweier konsekutiver Randpunkte* dieser Kategorie, also die Strecke $\overline{P_\lambda^{(0)} P_{\lambda+1}^{(0)}}$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$) ist dann im äußersten Fall[1]) *nicht größer* als $2 \cdot \sqrt{2}\,\delta_0$ Dies gilt auch für $\overline{P_{n_0}^{(0)} P_1^{(0)}}$, da ja der

1) Nämlich, wenn $P_\lambda^{(0)}$, $P_{\lambda+1}^{(0)}$ zwei $\mathfrak{R}$-Quadraten angehören, die nur einen

beim Schluß des Umlaufs als *letzter* vor $P_1^{(0)}$ auftretende Punkt $P_{n_0}^{(0)}$ dem Nachbarquadrat des Quadrats Nr. 1 oder allenfalls dem nächst-[1]) bzw übernächst-[2])vorangehenden angehört.

6. Die Menge aller derjenigen *Randpunkte*, welche nicht nur den (bisher ausschließlich in Betracht gezogenen) an $\mathfrak{T}_0$ *anliegenden*, sondern auch den nur *in einem Eckpunkt an* $\mathfrak{T}_0$ *anstoßenden*[3]) $\mathfrak{R}$-Quadraten angehören, besitzt wiederum einen gewissen *Minimalabstand* von $\mathfrak{T}_0$, etwa δ_0' (wo $\delta_0' < \delta_0$ sein kann) Wird jetzt eine natürliche Zahl $m_1 \geqq 3$ so angenommen, daß: $\delta_1 \equiv \frac{\lambda}{m_0 m_1} < \delta_0'$ $\left(\text{so daß also } \textit{eo ipso: } \delta_1 \leqq \frac{1}{3} \frac{\lambda}{m_0} = \frac{1}{3}\delta_0\right)$, sodann jedes der von $\mathfrak{T}_0$ eingeschlossenen Quadrate in m_1^2 Teilquadrate von der Seitenlänge δ_1 zerlegt, so bilden die an $\mathfrak{T}_0$ längs einer Seite oder auch nur in einem Eckpunkt anstoßenden Teilquadrate einen lediglich aus Außenpunkten von $\mathfrak{B}$ bestehenden *Ring*, der außer von $\mathfrak{T}_0$ von einem im Abstande δ_1 parallel zu $\mathfrak{T}_0$ verlaufenden Treppenpolygone $\mathfrak{T}_0'$ begrenzt wird Enthält dann irgendein an $\mathfrak{T}_0'$ anliegendes Quadrat einen der ausgezeichneten Randpunkte $P_\lambda^{(0)}$, so ist dieser wieder ein *nächstgelegener* in bezug auf diejenige Quadratseite, welche jetzt an die Stelle der früher dem Punkte $P_\lambda^{(0)}$ *zugeordneten* (ihr parallelen) größeren Quadratseite getreten ist Es besteht dann die Möglichkeit, daß schon *alle* Punkte $P_\lambda^{(0)}$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, n_0)$ auf diese Weise wieder zum Vorschein kommen Es können aber auch Punkte $P_\lambda^{(0)}$ (möglicherweise sogar *alle*) infolge der Verkleinerung der Teilquadrate durch ein oder auch mehrere (einen Streifen von der Breite δ_1 bildende) Zwischenquadrate von $\mathfrak{T}_0'$ getrennt sein. Alle diese Zwischenquadrate mögen dann an das *Treppenpolygon* $\mathfrak{T}_0'$ noch angesetzt werden[4]), ebenso auch alle Quadrate, die etwa

---

Eckpunkt gemein haben. Andernfalls ist

$$\overline{P_\lambda^{(0)} P_{\lambda+1}^{(0)}} < \sqrt{2}\;\delta_0 \quad \text{bzw} \quad < \sqrt{5}\;\delta_0,$$

je nachdem $P_\lambda^{(0)}$, $P_{\lambda+1}^{(0)}$ demselben bzw zwei aneinanderliegenden $\mathfrak{R}$-Quadraten angehören

1) Nämlich, wenn jenes Nachbarquadrat den Punkt $P_1^{(0)}$ mit dem Quadrat Nr 1 gemeinsam hat und keinen weiteren enthalt

2) Vgl Fig 8, II Nimmt man daselbst das Quadrat a als Quadrat Nr. 1, so wurde bei der durch die Pfeile angedeuteten Umlaufsrichtung weder b, noch c, vielmehr erst d den Punkt $P_{n_0}^{(0)}$ liefern

3) S z B. in Fig 7, II das mit c bezeichnete Quadrat Daselbst wurden nur die Quadrate b und d fur die Auswahl der *ausgezeichneten* Randpunkte $P_\lambda^{(0)}$ in Betracht kommen Andererseits könnte aber das Quadrat c einen Randpunkt enthalten, der *naher* an dem *Eckpunkt* B liegt, als die *ausgezeichneten* Randpunkte der Quadrate b und d an den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$, was dann bei der Bestimmung des im Texte mit δ_0' bezeichneten Abstandes ausschlaggebend wäre

4) Sollte einer der Punkte $P_\lambda^{(0)}$ zwei benachbarten Zwischenquadraten an-

zwei senkrecht zueinander verlaufenden zusammenstoßenden Streifen und einem Teil von $\mathfrak{T}_0'$ eingeschlossen werden.[1]) Alsdann tritt an die Stelle des *Treppenpolygons* $\mathfrak{T}_0'$ jetzt ein neues: $\mathfrak{T}_0''$, dessen Äußeres wieder aus einem *lückenlosen* Gebiete von *Außenpunkten* des Bereiches $\mathfrak{B}$ besteht, während das *Innere* diesen letzteren enthält. Zugleich besitzt dasselbe die Eigenschaft, daß bei positivem, mit dem Quadrate, welches den Punkt $P_1^{(0)}$ enthält, beginnenden Umlauf in den Quadraten, welche an $\mathfrak{T}_0''$ nach innen *anliegen*, *sämtliche* Punkte der Menge $\{P_{n_0}^{(0)}\}$ und zwar genau in der früheren Reihenfolge auftreten.

Andererseits können aber unter den an $\mathfrak{T}_0''$ nach innen *anliegenden* Quadraten noch weitere *randpunktfreie* vorhanden sein. Auch diese fügen wir noch zu dem von $\mathfrak{T}_0''$ begrenzten Komplexe hinzu, ebenso auch alle diejenigen, die mit diesen oder einem anderen bereits angeschlossenen längs einer Seite zusammenhängen sollten, und setzen dieses Verfahren so lange fort, bis jedes der äußersten angeschlossenen, *randpunktfreien* Quadrate an ein *randpunkthaltiges* anzuliegen kommt. Als Begrenzung aller so zusammengefaßten $\mathfrak{A}$-Quadrate erscheint dann auf Grund der zum Existenznachweise des *Treppenpolygons* $\mathfrak{T}_0$ bereits benützten Schlußweise ein (einfach geschlossenes) *Treppenpolygon* $\mathfrak{T}_1$, welches nach *innen* den Bereich $\mathfrak{B}$ *enger* umschließt, als jedes der Treppenpolygone $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{T}_0'$, $\mathfrak{T}_0''$ (falls es nicht mit dem letztgenannten bzw. mit den beiden letztgenannten identisch ist), und nach *außen* wiederum ein *lückenloses* Gebiet $\mathfrak{A}_1$ von Außenpunkten begrenzt, welches das zuvor mit $\mathfrak{A}_0$ bezeichnete als *Teil* enthält Aus *jedem* der nunmehr an $\mathfrak{T}_1$ *anliegenden*, durchweg *randpunkthaltigen* Quadrate (unter denen auch alle bereits an $\mathfrak{T}_0''$ anliegenden $\mathfrak{R}$ Quadrate, insbesondere die $P_1^{(0)}$-haltigen vorkommen) heben wir wieder genau nach den zuvor getroffenen Festsetzungen eine (nur zum Teil *neue*) endliche Menge *ausgezeichneter Randpunkte* heraus, welche die Menge $\{P_{n_0}^{(0)}\}$ als *Teilmenge* enthält Die ihr angehörigen Punkte mögen in derjenigen Reihenfolge, welche bei positivem, mit der dem Punkte $P_1^{(0)}$ zugeordneten Quadratseite beginnendem Umlauf um $\mathfrak{T}_1$ zum Vorschein kommt, mit:

$$P_1^{(1)},\ P_2^{(1)},\ P_3^{(1)},\ \ldots,\ P_{n_1}^{(1)} \qquad (\text{wo: } P_1^{(1)} \equiv P_1^{(0)}),$$

ihre Gesamtheit mit $\{P_{n_1}^{(1)}\}$ bezeichnet werden. Für den *Abstand* je zweier *konsekutiver* Punkte besteht jetzt die Beziehung:

---

gehorend auf deren Trennungslinie liegen, so mögen diese *beiden* bzw ein *Streifen* von der Breite $2\delta_1$ an $\mathfrak{T}_0'$ angeschlossen werden

1) Solche Quadrate sind sicher *randpunktfrei* Denn die entgegengesetzte Annahme würde wiederum auf den bereits mehrfach vorgekommenen Widerspruch gegen den vorausgesetzten *Zusammenhang* von $\mathfrak{B}$ führen.

$$\overline{P_\lambda^{(1)} P_{\lambda+1}^{(1)}} \leqq 2 \sqrt{2} \cdot \delta_1 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n_1 - 1),$$

und die analoge Beziehung gilt auch für $\overline{P_{n_1}^{(1)} P_1^{(1)}}$

7. Wir behaupten nun, daß die innerhalb der Folge $\{P_{n_1}^{(1)}\}$ vollständig enthaltene Menge der Punkte $P_\lambda^{(0)}$, abgesehen von Einschaltungen weiterer Randpunkte wieder genau in der ursprünglichen Anordnung auftritt, wie dies ja bei der Umlaufung von $\mathfrak{T}_0''$ noch der Fall war und offenbar bestehen bliebe, wenn jetzt nur diejenigen *neuerdings ausgezeichneten Randpunkte* dazwischen geschaltet würden, welche an $\mathfrak{T}_0''$ anliegenden $\mathfrak{R}$-Quadraten angehören Es erscheint aber zunächst fraglich, ob bei Aufzählung aller möglichen bei Umlaufung von $\mathfrak{T}_1$ auftretenden *ausgezeichneten Randpunkte* nicht irgendeiner der Punkte $P_\lambda^{(0)}$ sich *zwischen* zwei Punkte $P_\varkappa^{(0)}$ und $P_{\varkappa+1}^{(0)}$ *einschieben* könnte. Das ist allerdings *ausgeschlossen*, wenn $P_\varkappa^{(0)}$ und $P_{\varkappa+1}^{(0)}$ *demselben* oder zwei (wenn auch nur in einem *Eckpunkt*) *aneinanderstoßenden* Quadraten angehören. Es kommt daher nur der Fall in Betracht, daß $P_{\varkappa+1}^{(0)}$ einem Quadrate angehört, das bei Umlaufung von $\mathfrak{T}_0''$ *nicht unmittelbar* dem mit $P_\varkappa^{(0)}$ besetzten folgt. Wird das zwischen diesen beiden Quadraten verlaufende Stück des *Treppenpolygons* $\mathfrak{T}_0''$ von lauter $\mathfrak{R}$-Quadraten begrenzt, so gehört dasselbe auch dem *Treppenpolygon* $\mathfrak{T}_1$ an, so daß in diesem Abschnitt der Umlaufung von $\mathfrak{T}_1$ gegen früher keine Änderung eintritt. Eine solche erscheint erst dann möglich, wenn längs des fraglichen Stückes von $\mathfrak{T}_0''$ durchweg oder wenigstens teilweise $\mathfrak{A}$-Quadrate anliegen Sei dann etwa das (aus einer oder mehreren Quadratseiten bestehende) Wegstück $\overline{A \ldots B}$ von $\mathfrak{T}_0''$ das *erste*, an welchem durchweg $\mathfrak{A}$-Quadrate anliegen. Um $\mathfrak{T}_1$ aus $\mathfrak{T}_0''$ herzustellen, wird zunächst an jede zu $\overline{A \ldots B}$ gehörige Quadratseite ein $\mathfrak{A}$-Quadrat angesetzt und mit Hinzufügung weiterer $\mathfrak{A}$-Quadrate so lange fortgefahren, bis der entstandene Komplex, abgesehen von dem Wegstück $\overline{A \ldots B}$, durchweg von $\mathfrak{R}$-Quadraten begrenzt wird. Seine Begrenzung entsteht aus *zwei Treppenwegen*, die bei A und B beginnend schließlich zu einem *einzigen*, die Punkte A und B verbindendem *Treppenwege* $\mathfrak{t}$ zusammenlaufen müssen [1]) Denn keiner jener beiden Treppenwege kann abbrechen oder an irgendeinem nicht zu $\overline{A \ldots B}$ gehörigen Punkte von $\mathfrak{T}_0''$ bzw $\mathfrak{T}_1$ einmünden, da in diesem Falle das betreffende *Treppenpolygon* in *zwei* solche zerfallen würde, das eine den *Randpunkt* $P_\varkappa^{(0)}$, das andere $P_{\varkappa+1}^{(0)}$ enthaltend, was wiederum den *Zusammenhang* von $\mathfrak{B}$ zerreißen würde. Der von A nach B führende Treppenweg $\mathfrak{t}$ tritt dann bei positiver Umlaufung von $\mathfrak{T}_1$ an die Stelle des Wegstücks $\overline{A \ldots B}$ bei entsprechender Umlaufung von $\mathfrak{T}_0''$. Dabei werden sich eine Anzahl der *neuer-*

1) Die Begegnung der beiden Treppenwege kann auch in einem zu $\overline{A \ldots B}$ gehörigen Eckpunkte stattfinden

dings ausgezeichneten Randpunkte zwischen $P_{\varkappa}^{(0)}$ und $P_{\varkappa+1}^{(0)}$ einschieben. Soll nun die gleiche Möglichkeit für einen der *älteren* Serie angehörigen Punkt $P_{\lambda}^{(0)}$ bestehen, so muß der Treppenweg t eine Serie mit demjenigen an $\mathfrak{T}_0''$ anliegenden $\mathfrak{R}$-Quadrate $\mathfrak{Q}_{\lambda}$ gemein haben, welches den Punkt $P_{\lambda}^{(0)}$ enthält. Dies ist aber, da t, wie bemerkt, außer Punkten von $A \,..\, B$ keinen weiteren Punkt mit $\mathfrak{T}_0''$ gemein haben kann, einzig in der Weise möglich, daß $\mathfrak{Q}_{\lambda}$ nur *eine* zu $\mathfrak{T}_0''$ gehörige Seite besitzt und der Randpunkt $P_{\lambda}^{(0)}$ als *nächstgelegener* ihr zugeordnet ist, während die ihr *parallele* Seite zu t gehört. Für diese muß aber auf Grund des zuvor im Anschluß an Fig. 9 gesagten ein *neuer nächstgelegener* Punkt $P_{\mu}^{(1)}$ vorhanden sein und nur *dieser letztere* schiebt sich (mit anderen neugeschaffenen) zwischen $P_{\varkappa}^{(0)}$ und $P_{\varkappa+1}^{(0)}$ ein, während $P_{\lambda}^{(0)}$ auch bei Umlaufung von $\mathfrak{T}_1$ erst *hinter* $P_{\varkappa+1}^{(0)}$ an die Reihe kommen kann.[1])

Hiermit ist also der Nachweis erbracht, daß in der Punktmenge $\{P_{n_1}^{(1)}\}$ alle Punkte von $\{P_{n_0}^{(0)}\}$ genau in ihrer ursprünglichen Reihenfolge, lediglich durch eingeschobene Zwischenpunkte getrennt, enthalten sind.

8. Da auf $\mathfrak{T}_1$ selbst wieder *kein* Randpunkt von $\mathfrak{B}$ liegt, die Menge der letzteren also wieder durch einen gewissen *Minimalabstand* von $\mathfrak{T}_1$ getrennt ist, so läßt sich das Verfahren, welches von $\mathfrak{T}_0$ aus zur Herstellung von $\mathfrak{T}_1$ führte, wiederholen und zwar unbegrenzt oft wiederholen. Man erhält also auf diese Weise eine unbegrenzt fortsetzbare Folge *ineinanderliegender*, aus lauter *Außenpunkten* von $\mathfrak{B}$ bestehender *Treppenpolygone:*

$$\mathfrak{T}_0,\ \mathfrak{T}_1,\ \mathfrak{T}_2,\ \ldots;\ \mathfrak{T}_{\nu},\ \ldots,$$

welche nach *außen* eine entsprechende Folge *lückenloser*, sich gegenseitig *umfassender* und ins *Unendliche* sich erstreckender *Gebiete von Außenpunkten:*

$$\mathfrak{A}_0,\ \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{A}_{\nu},\ \ldots$$

begrenzen, während sie nach *innen* den Bereich $\mathfrak{B}$ immer *enger* umschließen. Diese letztere Tatsache findet ihren präziseren Ausdruck in der nachgewiesenen Existenz einer unbegrenzten Folge endlicher, durchweg mit demselben Punkte $P_1^{(0)}$ beginnender, durch sukzessive Einschaltung bzw. Anfügung neuer Punkte auseinander hervorgehender, fest geordneter *Randpunktmengen:*

$$\{P_{n_0}^{(0)}\},\ \{P_{n_1}^{(1)}\},\ \{P_{n_2}^{(2)}\},\ \ldots,\ \{P_{n_{\nu}}^{(\nu)}\},\ \ldots$$

(wo: $P_1^{(\nu)} \equiv P_1^{(0)}$ für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$), die mit unbegrenzt wachsendem

---

1) Diese ganze Betrachtung bleibt auch gültig, wenn an die Stelle von $P_{\lambda}^{(0)}$, $P_{\lambda+1}^{(0)}$ die im *zyklischen* Sinne *konsekutiven* Punkte $P_{n_0}^{(0)}$, $P_1^{(0)}$ treten

ν sich unbegrenzt verdichten und deren *Vereinigungsmenge* $\lim_{\nu \to \infty} \{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ durch die *Treppenpolygone* $\mathfrak{T}_\nu$ unbegrenzt approximiert wird. Diese letztere ist also *zusammenhängend* und zwar, da $P_{n_1}^{(\nu)} P_1^{(0)}$ mit unbegrenzt wachsendem ν *beliebig klein* wird, *zyklisch zusammenhängend*. Durch Hinzunahme ihrer *Häufungspunkte*, die ja als *Häufungspunkte* von *Randpunkten* gleichfalls *Randpunkte* sind, wird sie zu einer *abgeschlossenen* und zwar, da sie als Menge von *Randpunkten* keine *inneren* Punkte enthalten kann, zu einem *linienhaften Kontinuum* $\mathfrak{L}$.

Dieses Kontinuum $\mathfrak{L}$ bildet die Begrenzung zweier verschiedener Punktmengen, nämlich *erstens* der *Vereinigungsmenge* aller Außengebiete $\mathfrak{A}_\nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$), die wir mit $\mathfrak{A} = \lim_{\nu \to \infty} \mathfrak{A}_\nu$ bezeichnen wollen und die ein *lückenlos* zusammen*hängendes*, sich *ins Unendliche* erstreckendes *Gebiet* von *Außenpunkten* des Bereiches $\mathfrak{B}$ bildet; *zweitens* der Menge *aller übrigen Punkte*, die wir, soweit sie nicht zu $\mathfrak{L}$ gehören, als *innere* Punkte, kürzer $\mathfrak{J}$-Punkte von $\mathfrak{L}$, deren Menge als $\mathfrak{J}$ bezeichnen wollen. Diese letztere enthält insbesondere die Innenpunkte des Bereiches $\mathfrak{B}$, da das Gebiet $\mathfrak{A}$ keinen Punkt von $\mathfrak{B}$ enthält. Da ferner jeder $\mathfrak{A}$-Punkt *außerhalb* eines $\mathfrak{T}_\nu$ von *hinlänglich großem* (und um so mehr von noch größerem) Index ν, jeder $\mathfrak{J}$-Punkt *innerhalb aller* $\mathfrak{T}_\nu$ liegen muß, so findet zwischen je einem Punkte der einen und der anderen Kategorie kein Zusammenhang statt. Denn jeder einen $\mathfrak{A}$-Punkt und einen $\mathfrak{J}$-Punkt verbindende Streckenzug muß mit jedem $\mathfrak{T}_\nu$ von hinlänglich großem Index ν einen Punkt P_ν, also jeden *Häufungspunkt* dieser Punkte P_ν mit $\mathfrak{L}$ gemein haben. Es ist somit $\mathfrak{L}$ identisch mit der *vollständigen Begrenzung* der beiden Punktmengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ und bildet insbesondere in dem Sinne die *äußere Berandung* des Bereiches $\mathfrak{B}$, daß sie ihn von denjenigen *Außenpunkten* trennt, welche das lückenlos *ins Unendliche* sich erstreckende Gebiet $\mathfrak{A}$ bilden (möglicherweise freilich auch noch *von an deren Außenpunkten*, wie in der folgenden Nummer gezeigt werden soll).

Das Gesamtergebnis der vorstehenden Betrachtungen läßt sich zu dem folgenden *Hauptsatz* zusammenfassen:

> *Die Berandung eines im Endlichen gelegenen abgeschlossenen und zusammenhängenden Bereiches $\mathfrak{B}$ enthält ein linienhaftes Kontinuum $\mathfrak{L}$, welches die Ebene in zwei getrennte Punktmengen zerlegt, nämlich ein ins Unendliche sich erstreckendes lückenloses Gebiet $\mathfrak{A}$ von Außenpunkten des Bereiches $\mathfrak{B}$ und eine innere Punktmenge $\mathfrak{J}$, welche den Bereich $\mathfrak{B}$ enthält. Dieses als äußere Berandung von $\mathfrak{B}$ zu bezeichnende Kontinuum erscheint als Grenzgebilde einer Folge ineinanderliegender Treppenpolygone und besteht aus einer zyklisch zusammenhängenden abzählbaren Punktmenge mit Hinzunahme ihrer Häufungspunkte.*

9. Zum genaueren Verständnis des vorstehenden Ergebnisses ist noch zu bemerken, daß die *Häufungspunkte* der Menge $\lim_{\nu\to\infty}\{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ von *zweierlei* Art sein können. Die *eine* (stets vorhandene) Kategorie macht jene lediglich *abzählbare* Menge der *„ausgezeichneten“ Randpunkte* oder einen ihrer Abschnitte in der Weise zum *Kontinuum*, daß dieses kein von ausgezeichneten Randpunkten freies Teilkontinuum enthält (in der Art, wie bei Hinzufügung der irrationalen Zahlen zu der abzählbaren Menge der rationalen des Intervalls $[0, 1]$) Die *andere* (welche auch gänzlich fehlen kann) liefert *Kontinua*, welche, allenfalls abgesehen von einzelnen Punkten, überhaupt *keine Punkte* der Menge $\lim_{\nu\to\infty}\{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$, sondern nur *Haufungspunkte* enthalten und demgemäß als *Häufungskontinua* bezeichnet werden mögen.

Ein einfaches Beispiel für das Auftreten eines *Kontinuums* der letzteren Art liefert die in Fußn. 1), S. 58 zunächst für das Intervall $0 < x \leqq 1$ definierte Funktion, die wir uns für das Intervall $0 > x \geqq -1$ *symmetrisch* fortgesetzt und für die Stelle $x = 0$ nach der Vorschrift am Schlusse von Fußn 1), S 65 ergänzt denken wollen Das geometrische Bild dieser Funktion besteht dann aus zwei Folgen gleichschenkliger Dreiecke von der Höhe 1, deren Grundlinien von den Punkten $\left(x = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \ldots, \pm \frac{1}{2^\nu}, \ldots, y = 0\right)$ begrenzt werden, und aus der Verbindungslinie der Punkte $(0, 0)$ und $(0, 1)$ die als Ort der *Haufungspunkte* der bei Annäherung an $x = 0$ immer spitzer werdenden Dreiecke den betreffenden Streckenzug zu einem *linienhaften Kontinuum* vervollständigt. Dieses letztere bilde einen Teil der äußeren Berandung von $\mathfrak{B}$ (die im übrigen etwa aus einem die Punkte $x = -1$ und $x = 1$ verbindenden, abwärts gerichteten Halbkreise bestehen mag) Die von außen approximierenden Treppenpolygone $\mathfrak{T}_\nu$ ziehen sich mit wachsendem ν immer tiefer und zugleich weiter nach dem Nullpunkt zu in die Winkelräume zwischen den Dreiecken hinein, deren *Seiten* die *ausgezeichneten Randpunkte* $P_{n_\nu}^{(\nu)}$ liefern, während von der Strecke $\overline{01}$ nur der einzige Punkt $(0,1)$ den Mengen $\{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ angehören kann, alle anderen Punkte lediglich als *Häufungspunkte* der Menge $\lim_{\nu\to\infty}\{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ zum Vorschein kommen, also in der Tat ein *Kontinuum* der oben bezeichneten Art liefern

10 Während bei dem vorhergehenden Beispiel das zu der übrigen äußeren Berandung von $\mathfrak{B}$ hinzutretende *Haufungskontinuum* aus einer einfachen Strecke besteht, so kann auch der Fall eintreten (und zwar bei derselben Berandung beliebig oft), daß ein *solches Kontinuum*, also ein Teil der äußeren Berandung von $\mathfrak{B}$, zugleich die vollständige Begrenzung eines *endlichen* (also zu $\mathfrak{T}$, *nicht* zu $\mathfrak{A}$ gehörigen) Gebietes von *Außenpunkten* des Bereiches $\mathfrak{B}$ bildet.

Um diese Möglichkeit an einem Beispiel deutlich zu machen, wollen wir für das als äußere Berandung von 𝔅 dienende linienhafte Kontinuum 𝔏 eine Form wählen, welche dessen Charakter als Grenzgebilde einer Folge von *Treppenpolygonen* in besonders anschaulicher Weise zum Ausdruck bringt, nämlich ein *Treppenpolygon* mit einer abzählbar unendlichen Menge von Seiten, das wir als ein *asymptotisches* bezeichnen wollen und folgendermaßen konstruieren. Wir gehen aus von zwei konzentrischen Quadraten, deren Seiten etwa horizontal und vertikal angenommen werden mögen. Zwischen diese denken wir uns von außen nach innen eine unendliche Menge gleichfalls konzentrischer Quadrate eingeschaltet, deren Abstände beständig abnehmen und zwar so, daß ihre Summe (einschließlich des Abstandes zwischen dem äußeren Quadrate und dem ersten eingeschalteten) gegen den Abstand der beiden Anfangsquadrate konvergiert Ferner denken wir uns die untere Horizontale eines jeden der eingeschalteten Quadrate soweit nach links verlängert, bis die linke Vertikale des vorhergehenden Quadrats getroffen wird, und sodann das Stück dieser Vertikale vom Treffpunkt bis zum linken unteren Eckpunkt ausgetilgt Auf diese Weise entsteht ein zusammenhängender *polygonaler Streckenzug* (ein *Treppenweg*), der vom linken unteren Eckpunkt des äußersten Quadrats beginnend das innerste Quadrat in unendlich vielen Windungen „spiralförmig" umläuft und sich diesem unbegrenzt *(„asymptotisch")* nähert, gegen dasselbe *konvergiert*. Ein diesem *„äußeren"* Treppenwege parallel verlaufender *„innerer"* werde in der Weise hergestellt, daß seine Seiten den Zwischenraum zwischen je zwei Windungen des ersteren halbieren. Werden dann schließlich die Anfangspunkte der beiden Treppenwege (durch teilweise Wiederherstellung einer früher getilgten Strecke) geradlinig verbunden, so hat man das oben angekündigte *„asymptotische" Treppenpolygon*, das durch Hinzunahme des *Innenquadrats* zu einer *abgeschlossenen* Punktmenge und damit zu einem linienhaften *Kontinuum* 𝔏 wird Versucht man, dasselbe nach dem zuvor beschriebenen Verfahren von außen her durch *Treppenpolygone* $\mathfrak{T}_\nu$ zu approximieren, so werden diese mit wachsendem ν immer tiefer und weiter in die Zwischenräume zwischen den Windungen des Treppenpolygons eindringen. Die sukzessive zum Vorschein kommenden *ausgezeichneten Randpunkte* $P_{n_\nu}^{(\nu)}$ werden *ausschließlich* von den *Seiten* des asymptotischen Treppenpolygons geliefert, das *Innenquadrat* bleibt dabei gänzlich unbeteiligt und erscheint erst als Ort eines *Teils* der *Häufungspunkte* von $\lim\limits_{\nu\to\infty}\{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$. Das *linienhafte Kontinuum* 𝔏 zerlegt hier die Ebene in *drei* getrennte Gebiete, nämlich das ins Unendliche sich erstreckende *Außengebiet* 𝔄, das *Innengebiet* 𝔅 des asymptotischen *Treppenpolygons* (welche beide das ganze 𝔏, einschließlich des *Innenquadrats*, als

Berandung erfordern) und das (nur durch einen *Teil* von $\mathfrak{L}$ begrenzte) *Innere* $\mathfrak{B}'$ des *Innenquadrats*.[1])

In der zur Veranschaulichung des vorstehenden dienlichen Fig 10 ist für die Seiten des innersten und äußersten Quadrats das Verhältnis 1 : 5 gewählt Betrachtet man die Seite des Innenquadrats als Längeneinheit, so hat der Abstand zwischen den beiden Quadraten den Wert 2 Für die Abstände der Windungen des *äußeren* Treppenweges konnten daher die Werte $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^\nu}, \ldots$ gewählt werden $\left(\text{wegen: } \sum_0^\infty \frac{1}{2^\nu} = 2\right)$: die Windungen dieses (und selbstverständlich auch diejenigen des zweiten Treppenweges) müssen also dem Innenquadrat beliebignahe kommen, ohne dasselbe jemals zu erreichen

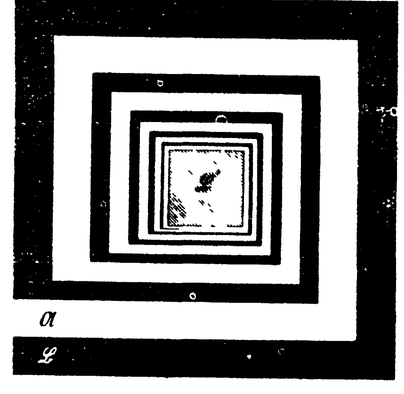


Fig 10

Es ist leicht ersichtlich, daß man durch geeignete Kombinationen solcher asymptotischer Treppenpolygone auch *Kontinuen* $\mathfrak{L}$ herstellen kann, welche für die gemeinsame Begrenzung der bisher mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bezeichneten Gebiete *vollständig* in Anspruch genommen werden, nichtsdestoweniger die Ebene in eine *beliebige Anzahl von Teilgebieten* zerlegen Auch ist dabei die von uns nur der besonderen konstruktiven und rechnerischen Einfachheit halber getroffene Wahl des treppenpolygonalen Typus selbstverständlich unwesentlich

11. Einen beliebigen zusammenhangenden Abschnitt der äußeren Berandung $\mathfrak{L}$, welcher *kein Haufungskontinuum* enthält, wollen wir als *primären Bogen* bezeichnen[2]) und hieran anknupfend den *Hauptsatz* von Nr. 8 durch den folgenden wichtigen *Zusatz* vervollständigen:

1) Es gibt noch wesentlich kompliziertere Moglichkeiten dieser Art, auf die aber nicht näher eingegangen zu werden braucht, da die beiden im Text angeführten Beispiele genugen, um die besondere Rolle, welche die *Haufungspunkte* der Menge $\lim_{\nu\to\infty} \{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ in dem vorliegenden Zusammenhange spielen, deutlich zu machen

2) Ein solcher *primärer* Bogen muß also die *ausgezeichneten* Randpunkte *uberall dicht* enthalten Andererseits sei darauf hingewiesen, daß ein *primarer* Bogen für einen *Bestandteil* von $\mathfrak{L}$ auch *gleichzeitig* die Rolle eines *Haufungskontinuums* spielen kann Um sich dies deutlich zu machen, braucht man das Beispiel von Nr 9 nur in der Weise abzuändern, daß man den Bereich $\mathfrak{L}$ *links* vom Nullpunkt durch die Schenkel des rechten Winkels begrenzt, welcher die Punkte

Jeder zu $\mathfrak{L}$ gehörige, d. h. in der Menge $\lim\limits_{\nu\to\infty}\{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ mit ihren Haufungspunkten enthaltene primäre Bogen kommt darin nur einmal vor, d. h die obige Menge enthält nicht zwei verschiedene Abschnitte[1]*, welche den Bogen überall dicht erfullen.*

Beweis. Angenommen, es enthielte $\mathfrak{L}$ einen *primären* Bogen $\widehat{PP'}$ in dem angegebenen Sinne *zweimal*, so müßte jede der Punktmengen $\{P_{m_\nu}^{(\nu)}\}$ zum mindesten bei hinlänglich großem ν je *zwei* verschiedene aus den obengenannten Abschnitten der Vereinigungsmenge $\lim\limits_{\nu\to\infty}\{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ hervorgehende Teilfolgen ausgezeichneter Randpunkte enthalten, die auf $\widehat{PP'}$ liegen, etwa:

$$P_{\varkappa_\nu}^{(\nu)},\ P_{\varkappa_\nu+1}^{(\nu)},\ \ldots,\ P_{\lambda_\nu}^{(\nu)}\quad\text{und:}\quad P_{\varrho_\nu}^{(\nu)},\ P_{\varrho_\nu+1}^{(\nu)},\ \ldots,\ P_{\sigma_\nu}^{(\nu)},$$

wo:

$$\varkappa_\nu < \lambda_\nu \leqq \varrho_\nu < \sigma_\nu.^{2)}$$

Das Treppenpolygon $\mathfrak{T}_\nu$ liefert dann zu den obigen zwei Teilfolgen ein Paar „zugeordneter“ *Treppenwege*, in deren (dem *Innern* von $\mathfrak{T}_\nu$ angehörenden) *Zwischenraume* jene verlaufen müßten. Die Annäherung der *aus lauter $\mathfrak{A}$-Punkten* bestehenden, immer enger werdende Kanäle bildenden Treppenweg-Paare an den Bogen $\widehat{PP'}$ nimmt mit wachsendem ν unbegrenzt zu, und es müßte schließlich $\widehat{PP'}$ vollständig in ein Gebiet von $\mathfrak{A}$-Punkten eingebettet sein, was unmöglich ist

12 Wir wollen jetzt den Fall betrachten, daß das *linienhafte Kontinuum* $\mathfrak{L}$, welches die *äußere Berandung* eines *abgeschlossenen* Bereiches $\mathfrak{B}$ bildet, diesen *vollständig* begrenzt, daß also im Inneren von $\mathfrak{L}$ nicht noch *andere* Randpunktmengen liegen, welche irgendwelche Punktmengen als *Außenpunkte* von $\mathfrak{B}$ ausscheiden (dagegen könnten immerhin *Teile* von $\mathfrak{L}$, wie in der vorigen Nummer gezeigt wurde, solche *Außenpunkte* begrenzen). Alsdann soll gezeigt werden, *daß $\mathfrak{L}$ auch von innen, und zwar durch eine Folge sich gegenseitig umschließender Treppenpolygone approximiert werden kann und zugleich wieder in eine abzählbare, zyklisch zu-*

$(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$ verbindet. Die *Verbindungs*vertikale $\overline{(0,0),\ (0,1)}$ spielt dann für die *rechts* gelegenen Randpunkte die Rolle eines *Häufungskontinuums,* während bei der Annäherung von *links jeder* ihrer Punkte als *ausgezeichneter* Randpunkt dienen kann, sie selbst also der Definition eines *primaren* Bogens genügt.

1) Infolge des *zyklischen Zusammenhanges* der Menge $\lim\limits_{\nu\to\infty}\{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ muß man hierbei, um alle Möglichkeiten zu berücksichtigen, die Bezeichnung „Abschnitt“ auch auf den Fall zweier im Punkte $P_0^{(0)}$ zusammenstoßender Teilabschnitte ausdehnen.

2) Für den besonderen in der vorigen Fußnote angeführten Fall kommt zu der zweiten Teilfolge noch eine von der Form $P_0^{(\nu)}, P_1^{(\nu)}, \ldots, P_{\iota_\nu}^{(\nu)}$ hinzu, wo jetzt: $0 < \iota_\nu < \varkappa_\nu < \lambda_\nu \leqq \varrho_\nu < \sigma_\nu$.

sammenhängende Punktmenge und die Menge der zugehörigen Häufungspunkte sich zerlegen läßt.

Um dies einzusehen, denke man sich ein Quadrat $\mathfrak{Q}$, das ganz aus *Innenpunkten* von $\mathfrak{B}$ besteht, von einer gewissen *Seitenlänge* λ Man bestimme sodann eine natürliche Zahl m_0 so, daß $\delta_0 \equiv \frac{\lambda}{m_0}$ *kleiner* ist als der *Minimalabstand* des Quadrats $\mathfrak{Q}$ von der Begrenzung $\mathfrak{L}$, teile $\mathfrak{Q}$ in m_0^2 Quadrate von der Seitenlänge δ_0 und überziehe daran anschließend den Bereich $\mathfrak{B}$ mit einem Netz solcher Quadrate Von diesen vereinige man alle an $\mathfrak{Q}$ unmittelbar anliegenden (offenbar *randpunktfreien*, also ausschließlich aus *Innenpunkten* von $\mathfrak{B}$ bestehenden) mit $\mathfrak{Q}$, ebenso alle gleichfalls *randpunktfreien*, die mit den letzteren oder mit bereits angeschlossenen längs einer Seite zusammenhängen, und setze dieses Verfahren so lange fort, bis es durch Auftreten anliegender *randpunkthaltiger* Quadrate gehemmt wird Man gewinnt auf diese Weise ein *erstes* von *Innenpunkten* des Bereiches $\mathfrak{B}$ begrenztes und erfülltes *Treppenpolygon* $\mathfrak{T}_0$, das ringsherum von daran anliegenden *randpunkthaltigen* Quadraten umgeben ist. Aus den betreffenden *Randpunkten* kann man dann wieder, geradeso wie beim Beweise des Hauptsatzes von Nr. 8 (vgl. insbesondere Nr. 4, 5), eine in bestimmter Weise geordnete *endliche Menge ausgezeichneter Randpunkte* herausheben, und das in dieser Weise begonnene Verfahren läßt sich in ganz analoger Weise, wie in Nr. 6—8 ausführlich beschrieben, unbegrenzt fortsetzen. Daraus ergibt sich dann unmittelbar die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung.

13. Bildet das als *äußere Berandung* des abgeschlossenen Bereiches $\mathfrak{B}$ dienende *linienhafte Kontinuum* $\mathfrak{L}$ *nicht* dessen *vollständige* Begrenzung, so müssen *im Innern* von $\mathfrak{L}$ noch *Außenpunkte* von $\mathfrak{B}$ vorhanden sein. Da zu jedem *Außenpunkte* auch eine *Umgebung* von Außenpunkten gehört (vgl. § 8, Nr. 4, II, S. 64), so zieht die Existenz *eines* solchen Außenpunktes unmittelbar diejenige mindestens eines gewissen *Gebietes von Außenpunkten* nach sich.[1]) Solcher Gebiete können dann *beliebig viele*, auch *unendlich viele* im Innern von $\mathfrak{L}$ liegen.[2]) Jedes *Gebiet* dieser Art

1) Einfaches, in der Funktionentheorie besonders häufig vorkommendes Beispiel eines entsprechenden Bereiches $\mathfrak{B}$: ein von zwei konzentrischen Kreisen begrenztes *Ringgebiet* (ein „*Kreisring*").

2) Der Bereich $\mathfrak{B}$ bestehe z B. aus einer Kreisfläche, aus der eine *endliche* oder *abzählbare* Menge von Punktumgebungen durch Kreise ausgeschieden sind. Als Beispiel der zweiten Art nehme man etwa einen Kreis um den Nullpunkt vom Radius $r \geqq 1$ mit Ausschluß der Kreisflächen um die Mittelpunkte:

$$x = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{2^\nu - 1}{2^\nu}, \ldots \text{ mit den Radien } \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^{\nu+2}}, \ldots$$

muß dann wiederum durch ein gewisses *linienhaftes Kontinuum* gegen die *Innenpunkte* von $\mathfrak{B}$ abgegrenzt sein, was sich in ganz analoger Weise begründen läßt, wie zuvor die Existenz der mit $\mathfrak{L}$ bezeichneten äußeren Berandung von $\mathfrak{B}$; man braucht nur alle dem fraglichen Gebiete von Außenpunkten *nicht* angehörigen Punkte zu einer einzigen Menge zusammenzufassen, welche jetzt die Rolle des *früheren* Außengebiets übernimmt. Dabei bildet ein solches zur *„inneren Berandung"* von $\mathfrak{B}$ gehöriges *linienhaftes Kontinuum* allemal die *vollständige* Begrenzung des betreffenden Gebietes von Außenpunkten, da in dessen *Inneren* wegen des *Zusammenhanges* von $\mathfrak{B}$ keine Innenpunkte, also auch *keine* weiteren *Randpunkte* liegen können.[1])

Hängen mehrere derartige *Kontinua punktweise zusammen*, so sind sie auf Grund der Definitionen IV, V von § 8, Nr. 5 (S. 65/6) als *ein einziges linienhaftes Kontinuum* anzusehen Diese Aussage gilt auch für den Fall, daß ein punktweiser Zusammenhang mit der *äußeren Berandung* $\mathfrak{L}$ vorhanden ist: die *äußere Berandung* bildet dann mit entsprechenden *inneren Berandungen* zusammengenommen *ein einziges Kontinuum*.[2])

Ist der (im Endlichen gelegene) Bereich $\mathfrak{B}$ ein *offener*, so ist seine *äußere Berandung* $\mathfrak{L}$ *identisch* mit derjenigen äußeren Berandung, welche zum Vorschein kommt, wenn man ihn zu einem *abgeschlossenen* macht Der Hauptsatz von Nr. 8 behält also unveränderte Geltung. Dagegen können hier *innere Berandungen* in Gestalt *isolierter Punkte* oder *Punkt-*

Je zwei konsekutive dieser Kreise haben keinen Punkt gemein Denn es ist

$$\frac{2^{\nu}-1}{2^{\nu}}-\frac{1}{2^{\nu+2}}=\frac{2^{\nu+2}-5}{2^{\nu+2}},$$

andererseits $$\frac{2^{\nu-1}-1}{2^{\nu-1}}+\frac{1}{2^{\nu+1}}=\frac{2^{\nu+1}-3}{2^{\nu+1}}=\frac{2^{\nu+2}-6}{2^{\nu+2}}<\frac{2^{\nu+2}-5}{2^{\nu+2}}.$$

Der Häufungspunkt der Kreismittelpunkte (bzw. der Kreise selbst), nämlich der Punkt (1, 0) gehört dann auch im Falle $r > 1$ zur Begrenzung von $\mathfrak{B}$.

1) Dagegen können auch hier wieder *Teile* jenes linienhaften Kontinuums (analog wie in Nr 10) noch besondere Gebiete von Außenpunkten begrenzen.

2) Es bestehe z B. die vollständige Begrenzung von $\mathfrak{B}$ aus zwei ineinanderliegenden, sich berührenden Kreisen. Die Innenpunkte des *kleineren* Kreises sind dann *Außenpunkte* von $\mathfrak{B}$. Die *äußere Berandung* von $\mathfrak{B}$ besteht ausschließlich aus dem *größeren* Kreise, sie bildet aber mit dem *kleineren* zusammen *ein einziges Kontinuum* (wie noch anschaulicher wird, wenn man sich dieses letztere an der Stelle des Berührungspunktes durchschnitten denkt). Statt *eines* solchen Kreises kann auch eine endliche oder abzählbare Menge von Kreisen vorhanden sein, welche keinen Punkt gemein haben und sämtlich einen größeren Kreis von innen berühren Oder man denke sich als Begrenzung von $\mathfrak{B}$ eine geschlossene krumme Linie (im landläufigen Sinne), die *nach innen* eine endliche oder abzählbare Menge von *Schleifen* bildet.

mengen, auch solcher *linienhafter Kontinua* auftreten, die keinen Bereich von Außenpunkten begrenzen, und zwar in endlicher[1]) oder abzählbarer Menge.[2])

14. Ein (abgeschlossener oder offener, zusammenhängender) Bereich $\mathfrak{B}$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn seine vollständige Begrenzung *aus einem einzigen linienhaften Kontinuum* besteht. Unter diese Kategorie fallen also insbesondere diejenigen Bereiche, deren *vollständige* Begrenzung schon durch die *äußere Berandung* gebildet wird[3]) (z. B. Treppenpolygon, Kreis), wobei aber keineswegs ausgeschlossen ist, daß *Teile* der äußeren Berandung noch besondere Bereiche begrenzen können, wie bei dem *asymptotischen Treppenpolygon* von Nr. 10, dessen Inneres nichtsdestoweniger einen *einfach zusammenhängenden* Bereich bildet. Des weiteren gehören hierher Bereiche wie die in Fußn. 2), S. 98 angeführten.

Der Bereich heißt *n-fach zusammenhängend*, wenn seine Begrenzung aus n getrennten Stücken besteht (dabei werden *isolierte* Randpunkte, wie sie ja bei *offenen* Bereichen vorkommen können, als vollwertige „Stücke" gezählt). *Zweifach zusammenhängend* ist z. B. ein Kreisring oder eine Kreisfläche, deren *Mittelpunkt* als Randpunkt ausgeschieden ist. Die gegebene Definition schließt auch den Fall $n = \infty$ nicht aus (vgl. die Beispiele in Fußn 2).

§ 11. Jordansche Kurven. — Zweiteilung der Ebene durch jede geschlossene Jordansche Kurve („Jordanscher Kurvensatz").

1. Die Untersuchungen des vorigen Paragraphen haben ergeben, daß die *Berandung* eines einfach zusammenhängenden Bereiches Eigentümlichkeiten, ich möchte sagen: unerwartete Abweichungen von den üb-

---

1) Beispiel: Eine Kreisfläche, von welcher außer der *Peripherie* noch einzelne *Innenpunkte* oder die Punkte eines ganzen *Radius* als *Randpunkte* fixiert sind

2) Beispiel Der offene Bereich $\mathfrak{B}$ bestehe aus dem Inneren des Quadrats über der Strecke $\overline{01}$ unter Ausscheidung der folgenden isolierten *Punktmengen* bzw *Streckenmengen* als *Randpunkte* (x, y), nämlich:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(a)} & x = \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \text{oder. (b)} & 0 \leq x < \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{array}\right\} y = \frac{\nu}{2^n} \quad \begin{pmatrix} n = 1, 2, 3, & \\ \nu = 1, 2, 3, & , 2^n \quad 1 \end{pmatrix}.$$

Im Falle (a) besteht die Menge der betreffenden *Randpunkte* aus den *Punkten*, welche die Vertikalen mit den Abszissen $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ und der Höhe 1 in 2^n gleiche Teile zerlegen; im Falle (b) aus den horizontalen *Strecken*, welche von den äußersten der zuvor bezeichneten Punkte bis an die Grenzvertikale $x = 0$ reichen (Die letztere, welche als Ort der *Häufungspunkte* in Betracht kommen würde, bildet ja überdies einen Teil der äußeren Berandung.)

3) Die *äußere Berandung* wird also in diesem Falle zur *Berandung schlechthin.*

lichen Vorstellungen, aufweisen kann, welche davon herrühren, daß die *Häufungspunkte* der zur Charakterisierung des betreffenden *linienhaften Kontinuums* dienenden *zyklisch zusammenhängenden Punktmenge* auf dessen endgültige Gestaltung einen maßgebenden Einfluß ausüben. Da ein großer Teil der für die Funktionenlehre unentbehrlichen Schlußfolgerungen auf dem Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten beruht, so erscheint es in dem vorliegenden Zusammenhange notwendig, die als wirklich vorhanden erwiesene Eventualität zu beseitigen, daß die *Berandung* eines einfach zusammenhängenden Bereiches außer dessen *Innenpunkten* und dem ins Unendliche sich erstreckenden *Gebiet* von *Außenpunkten* noch *andere Gebiete* begrenzt. Es handelt sich also darum, aus der Gesamtheit der *linienhaften Kontinua*, welche als *äußere Berandungen* eines im Endlichen liegenden *Bereiches* vorkommen können, einen *besonderen* und doch möglichst *allgemeinen Typus* herauszuheben, der die Sicherheit gewährt, daß der soeben bezeichnete ungünstige Fall niemals eintreten kann, und der als *Berandung* eines *Bereiches* nur *diesen* und das unendliche *Außengebiet* begrenzt, mit anderen Worten, die Ebene in *zwei* und *nur* zwei getrennte Gebiete zerlegt.

Dieses Ziel wird erreicht, indem man den fraglichen Typus *linienhafter Kontinua* durch eine zugleich einfache und dennoch sehr allgemeine *analytische* Definition charakterisiert, wie im folgenden gezeigt werden soll.

2. Es seien $\varphi(t)$, $\psi(t)$ zwei für ein bestimmtes Intervall der reellen Veränderlichen t, etwa: $t_0 \leqq t \leqq T$, *eindeutig definierte* und *stetige* Funktionen[1]) von t, welche überdies die Eigenschaft besitzen, daß *nicht gleichzeitig:*

$$(1) \qquad \varphi(t_1) = \varphi(t_2), \quad \psi(t_1) = \psi(t_2), \qquad \text{wenn:} \quad t_1 \neq t_2.$$

Definiert man sodann eine Punktmenge $\{x, y\}$ durch die Beziehungen:

$$(2) \qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (t_0 \leqq t \leqq T),$$

so soll diese als eine die Punkte $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$ und $(\varphi(T), \psi(T))$ verbindende *Jordansche Kurve* $\mathfrak{C}$ bezeichnet werden.[2]) Die Veränderliche t pflegt man in diesem Zusammenhange als *Parameter*, die Beziehungen (2)

---

1) „Funktion" in der allgemeinen Bedeutung von § 4, Nr. 2 (S. 33). Insbesondere können $\varphi(t)$, $\psi(t)$ in verschiedenen, eine endliche oder abzählbar unendliche Menge bildenden Teilintervallen durch verschiedene arithmetische Ausdrücke definiert sein.

2) Einfachste Beispiele: Eine Strecke, ein Kreisbogen — aber, mit Rücksicht auf Fußn. 1), auch ein Streckenzug, der sogar aus abzählbar unendlich vielen (behufs Wahrung der Stetigkeit schließlich unendlich klein werdenden) Strecken bestehen kann (vgl das in Fußn 1), S. 59 angeführte Beispiel).

als *Parameterdarstellung* der Kurve, diese selbst als *stetige Parameterkurve* zu bezeichnen.

Führt man zur Abkürzung für den zu irgendeinem Parameterwerte t gehörigen Kurvenpunkt die Bezeichnung $P(t)$ ein, so daß also:

$$P(t) = (\varphi(t), \psi(t)),$$

und versteht man unter t', t'' irgend zwei dem Intervall $[t_0, T]$ angehörige Zahlen (etwa: $t_0 \leqq t' < t'' \leqq T$), so wird infolge der *Stetigkeit* von $\varphi(t)$, $\psi(t)$ der *Abstand* von $P(t')$, $P(t'')$ gleichzeitig mit $t'' - t'$ *beliebig klein:* die Menge der Kurvenpunkte $\{x, y\} \equiv \{P(t)\}$ ist also *zusammenhängend.*

Aus der Bedingung (1) folgt, daß jeder Kurvenpunkt nur *ein*mal erzeugt wird, wenn man der Veränderlichen t alle Zahlenwerte des Intervalls $[t_0, T]$ beilegt: die Kurve geht also nicht mehr als *ein*mal durch denselben Punkt, sie hat *keinen „Doppelpunkt“*

Umgekehrt gehört zu jedem *Punkte* $P(t)$ *eine* und *nur* eine bestimmte, dem Intervall $[t_0, T]$ angehörige *Zahl,* die gleichzeitig mit der Lage von $P(t)$ sich *stetig* ändert. Substituiert man für die *Zahlen* des Intervalls $[t_0, T]$ die *Punkte* der *Strecke* $\overline{t_0 T}$, so kann nach dem Gesagten die *Jordansche Kurve* $\mathfrak{C}$ charakterisiert werden als ein *umkehrbar eindeutiges und stetiges Abbild der Strecke* $\overline{t_0 T}$ (die man überdies noch durch die Substitution $t = t_0 + (T - t_0)t'$ auf die *Einheitsstrecke* $0 \leqq t' \leqq 1$ reduzieren kann). Daraus folgt insbesondere, daß die Punkte der *Jordan*schen Kurve eine *abgeschlossene* Menge bilden müssen.

Versteht man ferner unter t', t'' zwei beliebige Punkte des Intervalls $[t_0, T]$ und hebt man aus dem Intervall $[t', t'']$ eine die Punkte t', t'' enthaltende *abzählbare* und *zusammenhängende* Menge $\{t_\nu\}$ heraus, so liefert diese eine gleichfalls *abzählbare* und *zusammenhängende* Menge von Kurvenpunkten $P(t_\nu)$, die sich vom Punkte $P(t')$ bis zu $P(t'')$ erstreckt. Ergänzt man sodann die Menge $\{t_\nu\}$ durch Hinzufügung ihrer *Häufungspunkte* zum *Kontinuum,* so kann der entsprechende, die Punkte $P(t')$ und $P(t'')$ verbindende *Kurvenbogen* kein Kontinuum enthalten, welches *ausschließlich* aus *Häufungspunkten* der $P(t_\nu)$ (diese selbst ausgeschlossen) besteht. Denn diesem müßte ja ein von Punkten t_ν freier und zugleich *stetiger* Bestandteil des Intervalls $[t', t'']$ entsprechen, was unmöglich ist, da die t_ν daselbst *überall dicht* liegen.

3. Besteht in bezug auf die Bedingung (1) die *eine* Ausnahme:

$$\text{(1a)} \qquad \varphi(t_0) = \varphi(T), \quad \psi(t_0) = \psi(T),$$

so daß also $P(t_0) \equiv P(T)$, so soll die Kurve auch noch als *Jordan*sche bezeichnet werden. Sie kehrt in diesem Falle, wenn t das Intervall $[t_0, T]$ durchläuft, schließlich in den *Anfangspunkt* zurück und wird infolge-

dessen als eine *geschlossene*, dem gegenüber in dem zuvor ausschließlich betrachteten Falle als eine *offene* (oder auch als *Jordan*scher Kurvenbogen) bezeichnet. Man erkennt nun leicht die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Eine Jordansche Kurve $\mathfrak{C}$, die einen im Endlichen gelegenen Bereich vollständig begrenzt, ist eine geschlossene.

Denkt man sich nämlich die fragliche Begrenzungskurve $\mathfrak{C}$ nach dem beim Beweise des Hauptsatzes von Nr. 8 des vorigen Paragraphen entwickelten Verfahren durch eine Folge von Treppenpolygonen von außen approximiert und faßt einen beliebigen Abschnitt der dort (S. 90) mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} \{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ bezeichneten *abzählbaren* und (*zyklisch*) *zusammenhängenden* Menge der ausgezeichneten Randpunkte ins Auge, so folgt aus der am Schlusse der vorigen Nummer gemachten Bemerkung, daß derselbe nach Hinzunahme seiner Häufungspunkte *kein Häufungskontinuum* liefern kann. Jeder Bogen der Kurve $\mathfrak{C}$ ist somit ein *primärer* und sie selbst muß daher auf Grund des „Zusatzes" von Nr. 11 des vorigen Paragraphen (S. 93/4) eine *geschlossene* sein. Denn, wäre sie eine *offene*, so müßte die zyklisch zusammenhängende Menge $\lim\limits_{\nu \to \infty} \{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$, um von dem Anfangspunkte $P_0^{(0)}$ ausgehend zu diesem zurückzukehren, irgendeinen Abschnitt von $\mathfrak{C}$ *zweimal* überstreichen. Es würde also im Widerspruche mit dem angeführten Zusatze *derselbe primäre* Bogen *zweimal* in der Menge $\lim\limits_{\nu \to \infty} \{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ vorkommen.

4. Dem Beweise für die (als Hauptziel dieser ganzen Betrachtung anzusehenden) *Umkehrung* des vorhergehenden, daß nämlich jede geschlossene *Jordan*sche Kurve stets einen und nur einen im Endlichen gelegenen Bereich begrenzt, schicken wir noch den folgenden *Hilfssatz* voraus:

Eine zusammenhängende Punktmenge $\mathfrak{P}$, welche ausschließlich aus Punkten einer die Punkte $P(t_0)$ und $P(T)$ verbindenden (offenen) Jordanschen Kurve $\mathfrak{C}$ besteht und Punkte in beliebiger Nähe von $P(t_0)$ und $P(T)$ enthält, ist nach Hinzunahme ihrer Häufungspunkte mit $\mathfrak{C}$ identisch.

Beweis. Es sei wieder Gl. (2) die Gleichung der Kurve $\mathfrak{C}$ und daher

$$(3) \qquad P(t_0) \equiv (\varphi(t_0), \psi(t_0)), \quad P(T) \equiv (\varphi(T), \psi(T)).$$

Infolge der *Stetigkeit* von $\varphi(t)$, $\psi(t)$ gehört auch jeder *Häufungspunkt* von Punkten der Menge $\mathfrak{P}$ der Kurve $\mathfrak{C}$ an, so daß also auch die aus $\mathfrak{P}$ durch Hinzufügung der *Häufungspunkte* hervorgehende *abgeschlossene* Menge $\overline{\mathfrak{P}}$ *ausschließlich* aus Punkten von $\mathfrak{C}$ besteht.

Es bleibt nun zu zeigen, daß auch umgekehrt jeder Punkt von $\mathfrak{C}$ der Menge $\overline{\mathfrak{P}}$ angehört. Dies gilt zunächst ohne weiteres von den Punkten

$P(t_0)$ und $P(T)$, da sie ja auf Grund der Voraussetzung *Häufungspunkte* der gegebenen Menge $\mathfrak{P}$ sind.

Es bedeute sodann τ einen ganz *beliebigen*, dem Intervall $t_0 < \tau < T$ angehörigen Parameterwert, von dem noch nicht feststehen soll, ob er einen zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Punkt liefert, und es mögen andererseits diejenigen Parameterwerte, denen diese Eigenschaft mit Sicherheit zukommt, generell mit t' bzw. mit t'' bezeichnet werden, je nachdem sie *kleiner* oder *größer* als τ sind, so daß also:

$$(4) \qquad t_0 \leqq t' < \tau, \quad \tau < t'' \leqq T.$$

Die t' haben dann eine *obere* Grenze $\bar{t}'$, die t'' eine *untere* Grenze $\underline{t}''$, und zwar folgt aus Ungl. (4), daß:

$$(5) \qquad \bar{t}' \leqq \tau \leqq \underline{t}''.$$

Da die Punktmenge $\mathfrak{P}$ eine *abgeschlossene* ist, so müssen die Punkte $P(\bar{t}')$, $P(\underline{t}'')$ ihr angehören. Da sie zugleich eine *zusammenhängende* ist und andererseits auf Grund der Bedeutung von $\bar{t}'$ und $\underline{t}''$ *zwischen* $\bar{t}'$ und $\underline{t}''$ keine Parameterwerte existieren, welche Punkte von $\mathfrak{P}$ liefern, so müssen jene beiden Punkte *zusammenfallen*.[1]) Daraus folgt aber vermöge der Bedingung (1), daß $\bar{t}' = \underline{t}''$ sein muß und daß daher mit Berücksichtigung von Ungl. (5) sich ergibt:

$$(6) \qquad \bar{t}' = \tau = \underline{t}'',$$

d. h. daß in der Tat jeder *beliebige* Punkt $(\varphi(\tau), \psi(\tau))$, sofern $t_0 < \tau < T$, der Menge $\mathfrak{P}$ angehört. Die letztere ist somit, wie behauptet, mit der Kurve $\mathfrak{C}$ identisch.

5. Hauptsatz. *Eine geschlossene Jordansche Kurve* $\mathfrak{C}$ *zerlegt die Ebene in zwei und nur zwei getrennte Gebiete.*

Beweis. Es sei A ein am weitesten nach *links*, B ein am weitesten nach *rechts* gelegener Punkt von $\mathfrak{C}$. Diese beiden Punkte zerlegen die Kurve in zwei Bögen, einen *unteren* und einen *oberen*, die wir durch Ansetzen beliebig (insbesondere beliebig klein) zu denkender horizontaler Strecken $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ nach *links* bzw. nach *rechts* verlängern. Hierdurch wird der Charakter der beiden Bögen als *offene Jordansche Kurven* nicht geändert.

Wir denken uns nun durch die Punkte A' und B' zwei nach beiden Seiten unbegrenzte Vertikalen $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ gezogen und gehen darauf aus zu zeigen, daß jeder der beiden Kurvenbögen $\widetilde{A'A\ldots BB'}$, die wir mit

1) Andernfalls müßten die Bögen $\widehat{P(t_0)P(\bar{t}')}$ und $\widehat{P(\underline{t}'')P(T)}$ als abgeschlossene Mengen ohne gemeinsamen Punkt einen von *Null* verschiedenen Minimalabstand haben, und $\mathfrak{P}$ wäre *nicht* zusammenhängend

$\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{C}_2'$ bezeichnen wollen, den so entstandenen unendlichen Parallelstreifen in zwei getrennte Gebiete zerlegt. Hierzu soll dasjenige Verfahren, welches in § 10, Nr. 2—8 zur Approximation der äußeren Berandung eines Bereiches durch eine Folge ihn umschließender Treppenpolygone diente, auf einen jener beiden Kurvenbögen, etwa den unteren $\mathfrak{C}_1'$, angewendet werden.

Wir schließen also den letzteren zunächst in ein *Quadrat*, dann in einen *quadratischen Ring* von Teilquadraten und, von diesem ausgehend, in ein *Treppenpolygon* $\mathfrak{T}_0$ ein, dem wir wieder eine in bestimmter Weise geordnete *endliche Menge* $\{P^{(0)}_{n_0}\}$ von *„ausgezeichneten“ Randpunkten*, d. h. von *Punkten des Bogens* $\mathfrak{C}_1'$ zuordnen. Bei weiterer Fortsetzung des a. a. O. beschriebenen Verfahrens ergibt sich dann wieder eine *unbegrenzte Folge* ineinanderliegender *Treppenpolygone* $\mathfrak{T}_\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, welche den Kurvenbogen $\mathfrak{C}_1'$ immer enger umschließen und diesen zugeordnet eine gleichfalls unbegrenzte Folge sich beständig verdichtender *endlicher Mengen* $\{P^{(\nu)}_{n_\nu}\}$ *von* $\mathfrak{C}_1'$*-Punkten*, denen jene Treppenpolygone unbegrenzt näher rücken, ohne jemals einen dieser Punkte zu erreichen. Wir treffen nun die weitere Verfügung, daß bei allen möglichen $\mathfrak{T}_\nu$ die beiden äußersten Vertikalseiten derjenigen Teilquadrate, welche die Strecken $A'A$, BB' enthalten, durch entsprechende Stücke der beiden Grenzvertikalen $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ ersetzt werden sollen. Dadurch gelangen die beiden $\mathfrak{C}_1'$-Punkte A' und B' auf die *Begrenzung* aller $\mathfrak{T}_\nu$, während im übrigen keinerlei wesentliche Änderung eintritt. Werden jetzt die beiden (neu geschaffenen) äußersten Vertikalseiten der $\mathfrak{T}_\nu$ gänzlich ausgeschaltet, so zerfällt jedes $\mathfrak{T}_\nu$ *in zwei Treppenwege*, einen *unteren* $\underline{\mathfrak{t}}_\nu$ und einen *oberen* $\overline{\mathfrak{t}}_\nu$. Zugleich zerfällt auch jede der Punktmengen $\{P^{(\nu)}_{n_\nu}\}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ in *zwei* solche, deren eine dem Treppenwege $\underline{\mathfrak{t}}_\nu$, deren andere dem Treppenwege $\overline{\mathfrak{t}}_\nu$ zugeordnet ist und die beide *zwischen* $\underline{\mathfrak{t}}_\nu$ und $\overline{\mathfrak{t}}_\nu$ verlaufen. Die *Vereinigungsmenge einer jeden* dieser beiden Punktmengen mit Hinzunahme ihrer *Häufungspunkte* (zu denen auch A' und B' gehören) muß dann nach dem Hilfssatze von Nr. 4 mit $\mathfrak{C}_1'$ *identisch* sein. Da andererseits jedes $\underline{\mathfrak{t}}_\nu$ und jedes $\overline{\mathfrak{t}}_\nu$ den von $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ begrenzten Parallelstreifen in *zwei* und *nur* zwei getrennte Gebiete, ein *Unter-* und ein *Obergebiet*, zerlegt, so gilt das gleiche von $\mathfrak{C}_1'$. Denn, wie auch ν angenommen werden mag, so muß jeder Streckenzug, der einen Punkt des *Untergebiets* von $\underline{\mathfrak{t}}_\nu$ und des Obergebiets von $\overline{\mathfrak{t}}_\nu$ verbindet, mit jedem $\underline{\mathfrak{t}}_\nu$ und jedem $\overline{\mathfrak{t}}_\nu$ von größerem Index ν mindestens je einen Punkt und daher als *Häufungspunkt* aller dieser Punkte auch mit $\mathfrak{C}_1'$ mindestens einen Punkt gemein haben. Da überdies auf Grund des Satzes von Nr. 3 bereits feststeht, daß nicht etwa ein *Teil* von $\mathfrak{C}_1'$ ein Sondergebiet begrenzen könnte, so folgt in der Tat, daß $\mathfrak{C}_1'$ den Parallelstreifen in genau *zwei* getrennte Gebiete zerlegt: ein *Unter-*

gebiet als Vereinigungsmenge aller Untergebiete der $\underline{t}_\nu$ und ein *Obergebiet* als Vereinigungsmenge aller Obergebiete der $\overline{t}_\nu$.

In derselben Weise ergibt sich, daß auch der (abgesehen von den Strecken $\overline{A'A}$ und $\overline{BB'}$) vollständig dem *Obergebiet* von $\mathfrak{C}_1'$ angehörige Kurvenbogen $\mathfrak{C}_2'$ den Parallelstreifen in zwei Gebiete zerlegt. Dabei können die beiden durch $\mathfrak{C}_1'$ und $\mathfrak{C}_2'$ hervorgebrachten Zerlegungen *nicht identisch* sein, da sonst $\mathfrak{C}_1'$ und $\mathfrak{C}_2'$ *identisch* sein müßten. Es muß daher ein Teil des *Ober*gebietes von $\mathfrak{C}_1'$ mit einem Teil des *Unter*gebietes von $\mathfrak{C}_2'$ zusammenfallen und es wird somit der Parallelstreifen durch die beiden Bögen $\mathfrak{C}_1'$ und $\mathfrak{C}_2'$ in *drei* Stücke zerlegt, von denen die *beiden äußeren* sich ins *Unendliche* erstrecken, während das *mittlere*, gleichzeitig von $\mathfrak{C}_1'$ und $\mathfrak{C}_2'$ begrenzte, ganz im *Endlichen* liegt. Denkt man sich jetzt die beiden Ansatzstücke $\overline{A'A}$ und $\overline{BB'}$, sowie die beiden Vertikalen $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$ ausgeschaltet und die beiden Bögen von $\mathfrak{C}$, die nach Wegnahme der Strecken $\overline{A'A}$ und $\overline{BB'}$ mit $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ bezeichnet werden mögen, zu der *geschlossenen Kurve* $\mathfrak{C}$ zusammengefaßt, so zerlegt die letztere die Ebene in genau *zwei* getrennte Punktmengen, eine *äußere*, von der bereits feststeht, daß sie ein lückenlos zusammenhängendes (übrigens ins Unendliche sich erstreckende) *Gebiet* bildet, und eine *innere*, von der noch zu zeigen ist, daß sie gleichfalls ein einziges zusammenhängendes Gebiet bildet. Dazu ist nur der Nachweis erforderlich, daß zwei *beliebige*, *im Innern* von $\mathfrak{C}$ liegende Punkte P, P' durch einen ganz im Innern von $\mathfrak{C}$ verlaufenden Streckenzug verbunden werden können.

Wir bemerken zunächst, daß durch die vorstehende Betrachtung für jeden der beiden Kurvenbögen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ eine bestimmte *Seite* (d. h. anliegende Punktmenge) als *untere* bzw. *obere* festgelegt ist. Insbesondere hat diejenige Seite des (unteren) Kurvenbogens $\mathfrak{C}_1$ als *obere* zu gelten, an welche die *im Innern* von $\mathfrak{C}$ liegenden Punkte (im folgenden kurz als *Innenpunkte* von $\mathfrak{C}$ bezeichnet) angrenzen.

Da der Punkt P einen gewissen von Null verschiedenen *Minimalabstand* von $\mathfrak{C}$ aufweisen muß, so läßt er sich mit einem ganz aus *Innenpunkten* von $\mathfrak{C}$ bestehenden Quadrat umgeben, von dem ausgehend man nach der Vorschrift von § 10, Nr. 12 eine unbegrenzte Folge ganz von Innenpunkten der Kurve $\mathfrak{C}$ erfüllter und begrenzter, sich gegenseitig umschließender Treppenpolygone $\mathfrak{T}_\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ nebst einer entsprechenden Folge endlicher Mengen $\{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ von „*ausgezeichneten*" *Randpunkten*, d. h. $\mathfrak{C}$-*Punkten*, herstellen kann, denen jene *Treppenpolygone* unbegrenzt näher rücken. Als Vereinigungsmenge der von den $\mathfrak{T}_\nu$ begrenzten Polygonflächen erscheint ein bestimmtes *Innengebiet* $\mathfrak{J}$ der Kurve $\mathfrak{C}$, die auf Grund des Satzes von Nr. 3 in ihrer gesamten Ausdehnung dessen äußere Berandung bilden muß. Immerhin ist die Möglichkeit nicht ohne weiteres

von der Hand zu weisen, daß $\mathfrak{C}$ *noch andere Innengebiete* begrenzen könnte, so daß der am Schlusse des vorletzten Absatzes postulierte Nachweis durch die oben gewonnene Erkenntnis keineswegs entbehrlich gemacht wird.

Bei dem obigen Verfahren muß unter den *ausgezeichneten* $\mathfrak{C}$-*Punkten* einmal ein *erster* auftreten, der (von A und B verschieden) dem *unteren* Bogen $\mathfrak{C}_1$ angehört. Er werde mit P_1, der auf der *zugeordneten* Quadratseite des betreffenden Treppenpolygons, etwa $\mathfrak{T}_m$, ihm gegenüberliegende mit Q bezeichnet. Die Strecke $\overline{QP_1}$ liegt dann, abgesehen von dem Punkte P_1, ganz *im Innern* von $\mathfrak{C}$. Da andererseits der Punkt P mit Q durch eine *im Innern* von $\mathfrak{T}_m$, also auch von $\mathfrak{C}$ verlaufenden Streckenzug sich verbinden läßt, so liefert der Streckenzug $\overline{PQP_1}$ eine *im Innern* von $\mathfrak{C}$ verlaufende Verbindung von P mit der *oberen* Seite von $\mathfrak{C}_1$.

Genau in derselben Weise läßt sich auch für den ganz *beliebig* im *Innern* von $\mathfrak{C}$ (d. h. nicht von vornherein als Punkt von $\mathfrak{T}$) zu wählenden Punkt P' eine analoge Verbindung $\overline{P'Q'P_1'}$ mit einem Punkt P_1' von $\mathfrak{C}_1$, und zwar wieder mit der *oberen* Seite von $\mathfrak{C}_1$, herstellen.

Nun läßt sich aber die *obere* Seite von $\mathfrak{C}_1$ durch eine Folge der im ersten Teile des vorliegenden Beweises mit $\bar{t}_\nu$ bezeichneten Treppenwege beliebig approximieren. Da das Bogenstück $\widehat{P_1 P_1'}$ einen gewissen *Minimalabstand* von dem *oberen* Kurvenbogen $\mathfrak{C}_2$ hat, so muß bei hinlänglich großem ν der *Treppenweg* $\bar{t}_\nu$ die Strecken $\overline{QP_1}$ und $\overline{Q'P_1'}$ in zwei Punkten Q_1 bzw. Q_1' nahe bei P_1 bzw. P_1' treffen, und das Wegstück $\overline{Q_1 Q_1'}$ dem *Unter*gebiete von $\mathfrak{C}_2$ angehören, also *im Innern* von $\mathfrak{C}$ liegen. Der aus $\overline{PQQ_1Q_1'Q'P_1}$ bestehende Streckenzug liefert dann eine *im Innern* von $\mathfrak{C}$ verlaufende Verbindung von P und P'. Die *Innenpunkte* von $\mathfrak{C}$ bilden also ein *einziges zusammenhängendes Gebiet.*

Damit ist der ausgesprochene Satz bewiesen, aus dem insbesondere hervorgeht, daß die charakteristische, in § 9 zunächst für *Treppenpolygone* erwiesene Eigenschaft auch jedem *beliebigen Polygon* mit sich nicht durchkreuzenden Seiten und jeder *einfach geschlossenen Kurve* der analytischen Geometrie zukommt.

§ 12. Funktionen zweier reellen Veränderlichen. — Doppellimites und iterierte Limites. — Stetigkeit und daraus entspringende Folgerungen.

1. Sind x und y zwei reelle Veränderliche, z eine dritte reelle Veränderliche von der Beschaffenheit, daß jedem *Wertepaare* (x, y) eines gewissen *Bereiches*, also jedem *Punkte* einer gewissen *Punktmenge* eine

bestimmte Zahl z *zugeordnet* ist, so heißt z eine in dem bezeichneten Umfange *eindeutige* oder *einwertige* (reelle) *Funktion* von (x, y), in Zeichen:

$$(1) \qquad z = f(x, y) \qquad \text{(bzw. nach Bedarf: } = F(x, y),\ \varphi(x, y) \text{ usw.)},$$

jene Punktmenge der *Definitionsbereich* von $f(x, y)$, jeder ihrer Punkte eine *Stelle* des letzteren.

Gehören zu jedem (x, y) *mehrere* (d. h. zwei bis unendlich viele) Werte z, so heißt z eine *mehrdeutige* oder *mehrwertige* Funktion von (x, y).

Wir beschränken uns hier auf den Fall, daß der *Definitionsbereich* von $f(x, y)$ ein *Gebiet*, also ein (abgeschlossener oder offener) „*Bereich*" $\mathfrak{B}$ in dem engeren Sinne von § 8, Nr. 4, VI (S. 65) ist, ferner verstehen wir unter $f(x, y)$, solange nicht das Gegenteil ausdrücklich bemerkt wird, eine in dem gerade vorliegenden Zusammenhange *eindeutige* Funktion, d. h. eine *schlechthin einwertige* Funktion oder einen *eindeutig definierten* Bestandteil einer mehrwertigen Funktion $\left(\text{z. B.} + \sqrt{xy}\ (xy > 0)\right.$, d. h. $|\sqrt{xy}|$ als einen *eindeutig* bestimmten der beiden Funktionswerte $|\sqrt{x}|$ und $\left.(-|\sqrt{xy}|)\right)$.

Die für einen gewissen Bereich $\mathfrak{B}$ definierte *Funktion:* $z = f(x, y)$, d. h. die entsprechende *Zahlenmenge* $\{z\}$ hat dann wiederum (vgl. § 4, Nr. 5, S. 31) eine gewisse *obere* und *untere Grenze*: $\overline{\mathfrak{G}}(z)$ bzw. $\underline{\mathfrak{G}}(z)$, wo $\overline{\mathfrak{G}}(z)$, $\underline{\mathfrak{G}}(z)$ entweder *bestimmte Zahlen* vorstellen oder auch $\overline{\mathfrak{G}}(z) = +\infty$, $\underline{\mathfrak{G}}(z) = -\infty$ sein kann. Im *ersteren* Falle heißt $f(x, y)$ im Bereiche $\mathfrak{B}$ *beschränkt.*

Die *niemals negative* (endliche oder unendliche) *Differenz*

$$D = \overline{\mathfrak{G}}(z) - \underline{\mathfrak{G}}(z)$$

wird wiederum als *Schwankung* von $f(x, y)$ im Bereiche $\mathfrak{B}$ bezeichnet.

In bezug auf die *obere* und *untere Grenze* von $f(x, y)$ gilt das folgende Analogon zu dem in § 4, Nr. 6 (S. 31) für Funktionen *einer* Veränderlichen bewiesenen Satze:

Ist $\overline{\mathfrak{G}}(z)$ die obere, $\underline{\mathfrak{G}}(z)$ die untere Grenze der in dem endlichen Bereiche $\mathfrak{B}$ eindeutig definierten Funktion $z = f(x, y)$, so gibt es mindestens je eine zu $\mathfrak{B}$ gehörige oder (ohne zu $\mathfrak{B}$ zu gehören) als Randpunkt von $\mathfrak{B}$ auftretende Stelle, in deren Umgebung $f(x, y)$ die obere Grenze $\overline{\mathfrak{G}}(z)$, bzw. die untere Grenze $\underline{\mathfrak{G}}(z)$ besitzt (gleichgültig, ob diese Grenzen endlich oder unendlich ausfallen).

Der Beweis wird ganz analog geführt, wie derjenige für den oben angeführten entsprechenden Satz von § 4, Nr. 6. Nur tritt hier wiederum an die Stelle des dort als Operationsgebiet dienenden *Intervalls* ein den Bereich $\mathfrak{B}$ einschließendes *Quadrat* und demgemäß an die Stelle des *linearen* Teilungsprozesses ein *quadratischer*, geradeso wie bei dem in

§ 8, Nr. 2 (S. 61) gegebenen, auf die Existenz mindestens einer Häufungsstelle für jede ebene Punktmenge sich beziehenden Beweise, welcher als Vorbild vollständig genügen dürfte.

Aus dem obigen Satze folgt dann weiter (vgl. § 4, Nr. 8, S. 33):

Ist $f(x, y)$ in der Umgebung jeder einzelnen Stelle eines endlichen abgeschlossenen Bereiches $\mathfrak{B}$ beschränkt, so ist $f(x, y)$ im gesamten Bereiche $\mathfrak{B}$ beschränkt.

2. Ist (a, b) irgendeine *Stelle* des *Definitionsbereiches* $\mathfrak{B}$ von $f(x, y)$ oder auch nur ein nicht zu diesem gehöriger *Randpunkt* von $\mathfrak{B}$, c eine beliebige Zahl, so gilt die folgende Definition:

$f(x, y)$ hat für $x \to a$, $y \to b$ den Doppellimes c, in Zeichen:

$$\lim_{x \to a,\, y \to b} f(x, y) = c, \tag{2}$$ [1]

wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung (ϱ) der Stelle (a, b) existiert, derart, daß:

$$|f(x, y) - c| < \varepsilon \tag{3}$$

für alle (x, y) jener Umgebung (abgesehen von (a, b) selbst), also für alle (x, y), welche einer Bedingung von der Form genügen:

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varrho. \tag{3a}$$ [2]

Dabei kommt, wenn (a, b) ein *Randpunkt* von $\mathfrak{B}$ sein sollte, in dem vorstehenden Zusammenhange als „*Umgebung*" von (a, b) nur der zu $\mathfrak{B}$ gehörige *Teil* der *vollen* Umgebung (3a) in Betracht.

Parallel mit der obigen Definition läuft die folgende:

$f(x, y)$ hat für $x \to a$, $y \to b$ den Doppellimes $+\infty$ bzw. $-\infty$, in Zeichen:

$$\lim_{x \to a,\, y \to b} f(x, y) = +\infty \ \text{bzw.} = -\infty, \tag{2'}$$

wenn zu jedem (noch so großen) $C > 0$ eine Umgebung nach Art

---

1) Im Falle $b = a$ schreiben wir etwas einfacher:

$$\lim_{x, y \to a} f(x, y) = c.$$

2) Diese Definition enthält also wiederum (vgl. § 5, Nr. 1, Fußn. 1, S. 34) keinerlei Aussage über das Verhalten von $f(x, y)$ an der Stelle (a, b) (für welche $f(x, y)$ überhaupt nicht definiert zu sein braucht oder einen von c angebbar verschiedenen Wert besitzen kann). Will man die fragliche „Umgebung" statt *kreisförmig*, wie in Ungl. (3a), *quadratisch* begrenzen, also (x, y) den Bedingungen unterwerfen:

$$0 \leqq |x - a| < \varrho, \quad 0 \leqq |y - b| < \varrho,$$

so ist die Kombination $(x = a,\ y = b)$ ausdrücklich auszuschließen.

von Ungl (3a) *existiert, derart, daß für alle ihr angehörenden* (x,y):

$$(3') \qquad f(x, y) > C \text{ bzw. } f(x, y) < -C.$$

Wir sagen gelegentlich, der fragliche *Doppellimes existiere im engeren Sinne,* wenn er eine bestimmte Zahl vorstellt, im *weiteren Sinne,* wenn auch die Möglichkeit eines Unendlichwerdens (mit bestimmten Vorzeichen) zugelassen werden soll.

3. Mit Hilfe der Substitution: $x = a + h$, $y = b + k$ geht die Beziehung (2) in die folgende über:

$$(4) \qquad \lim_{h,k \to 0} f(a + h, b + k) = c,$$

während zugleich die definierenden Ungleichungen (4), (4a) die Form annehmen:

$$(5) \qquad |f(a + h, b + k) - c| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad 0 < \sqrt{h^2 + k^2} < \varrho.$$[1]

Nun seien $\varphi(t)$, $\psi(t)$ irgend zwei für ein gewisses Intervall $t_0 \leqq t \leqq T$ *stetige* und für $t = t_0$ *verschwindende* Funktionen von der Beschaffenheit, daß unter der Voraussetzung $t' \neq t$ *niemals gleichzeitig:* $\varphi(t') = \varphi(t)$, $\psi(t') = \psi(t)$. Die Punktmenge:

$$\{x = a + \varphi(t), \quad y = b + \psi(t)\}$$

bildet dann eine die beiden Punkte $(a + \varphi(T), b + \psi(T))$ und (a, b) verbindende *Jordansche Kurve* $\mathfrak{C}$. Setzt man jetzt in Gl. (4): $h = \varphi(t)$, $k = \psi(t)$, so wird:

$$(6) \qquad \lim_{t \to t_0} f(a + \varphi(t), b + \psi(t)) = c.$$

Wir sprechen den Inhalt dieser aus der Voraussetzung (4) hervorgehenden Beziehung in folgender Weise aus: *Gleichzeitig mit dem Doppellimes* (4) *und damit übereinstimmend existiert der längs eines jeden nach* (a, b) *führenden „Weges"* $\mathfrak{C}$ *genommene Grenzwert* (6).

Dabei soll von jetzt ab unter einem solchen *Wege* ein entsprechender *Jordanscher Kurvenbogen* verstanden werden.

Es findet aber auch das Umgekehrte statt, d. h.: *Besteht die Beziehung* (6) *für jeden nach* (a, b) *führenden Weg, so existiert damit übereinstimmend der Doppellimes* (4) (*bzw.* (2)).

Denn, angenommen das letztere wäre nicht der Fall, mit anderen Worten, die Ungleichung (3) ließe sich nicht für *jedes* $\varepsilon > 0$ durch passende Wahl von ϱ befriedigen, so müßten für ein bestimmtes (möglicherweise sehr kleines) $\varepsilon > 0$ *in beliebiger Nähe* der Stelle (a, b), also jeden-

---

1) Andere häufig übliche Schreibweise:

$$|f(a + \vartheta\varrho, b + \zeta\varrho) - c| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad 0 < \vartheta^2 + \zeta^2 < 1$$

falls in unendlicher, zum mindesten abzählbarer Menge, solche Punkte $(a + h_\nu, b + k_\nu)$ vorhanden sein, für welche:

$$|f(a + h_\nu, b + k_\nu) - c| \geqq \varepsilon.$$

Ein diese Punkte verbindender, sich nicht durchkreuzender und der Bedingung $\lim\limits_{\nu \to \infty} h_\nu = \lim\limits_{\nu \to \infty} k_\nu = 0$ genügender[1]) Streckenzug würde dann aber einen *Weg* liefern, für welchen der *Grenzwert c nicht* zum Vorschein käme, was der Voraussetzung widerspricht.

Die vorstehenden Aussagen lassen sich, wie leicht ersichtlich, auch auf den Fall übertragen, daß $+\infty$ oder $-\infty$ an die Stelle der Zahl c tritt.

4 Trifft man in dem vorliegenden Zusammenhange die besondere Wahl:

$$\varphi(t) = \alpha t, \quad \psi(t) = \beta t, \quad \text{also:} \quad t_0 = 0,$$

wo α, β zwei beliebige reelle Zahlen bedeuten, deren *eine* auch *Null* sein kann, so wird der zuvor mit $\mathfrak{C}$ bezeichnete Weg zu einem im Punkte (a, b) einmündenden *Halbstrahl*, dessen *Richtung* durch das Verhältnis $\frac{\alpha}{\beta}$ oder $\frac{\beta}{\alpha}$ bestimmt wird. Man hat alsdann wiederum unter der Voraussetzung, daß der *Doppellimes* (4) existiert:

$$\lim_{t \to 0} f(a + \alpha t, b + \beta t) = c, \tag{7}$$

d. h der fragliche *Grenzwert* kommt insbesondere *längs eines jeden* nach (a, b) führenden *Halbstrahls*, anders ausgesprochen, in jeder beliebigen *Richtung* zum Vorschein.

Die wohl ziemlich naheliegende Vermutung, daß auch umgekehrt diese letztere Tatsache, also das Bestehen von Gl. (7) für jede beliebige Wahl von α und β, die Existenz des *Doppellimes* (4) nach sich ziehen müsse, erweist sich als irrig, wie das folgende Beispiel zeigen soll. Es sei:

$$f(x, y) = \frac{xy^4}{x^4 + y^8} \tag{8}$$

und die fragliche Stelle (a, b) die Stelle $(0, 0)$, für welche dieser Ausdruck die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, so daß $f(0, 0)$ überhaupt *nicht definiert* ist. Dagegen läßt sich zeigen, daß $f(x, y)$ daselbst *in allen möglichen Richtungen* den *Grenzwert* 0 besitzt. Da die Richtung des Halbstrahls: $x = \alpha t$, $y = \beta t$ $(t \geqq 0)$, wie bemerkt, nur von $\frac{\alpha}{\beta}$ bzw. $\frac{\beta}{\alpha}$ abhängt, so werden alle Möglichkeiten bereits erschöpft, wenn man α auf die

---

1) Nur unter dieser Bedingung ist der Streckenzug ein *Jordan*scher Kurvenbogen. Vgl. § 11, S. 98, Fußn. 2).

Werte $\alpha = 0$ und $\alpha = \pm 1$ beschränkt und $\beta \geqq 0$ annimmt. Man findet zunächst für $\alpha = 0$ und $t \neq 0$:

$$f(0, \beta t) = 0, \quad \text{also auch:} \quad \lim_{t \to 0} f(0, \beta t) = 0.$$

Ferner für $\alpha = \pm 1$ und $t \neq 0$:

(8a) $$f(\pm t, \beta t) = \pm \frac{\beta^4 t^5}{t^4 + \beta^8 t^8} = \pm \frac{\beta^4 t}{1 + \beta^8 t^4},$$

mithin:

$$\lim_{t \to 0} f(\pm t, \beta t) = 0,$$

so daß also in der Tat in *jeder beliebigen Richtung* der Grenzwert 0 erscheint.

Wählt man dagegen (bei $\beta \gtrless 0$):

$$x = \pm t^2, \quad y = \beta t \quad (\text{also: } \; y^2 = \pm \beta^2 x),$$

so wird für $t \neq 0$:

(8b) $$f(\pm t^2, \beta t) = \pm \frac{\beta^4 t^6}{t^8 + \beta^8 t^8} = \pm \frac{\beta^4}{(1 + \beta^8) t^2}$$

und daher:

$$\lim_{t \to 0} f(\pm t^2, \beta t) = \pm \infty.$$

Die Wege $\mathfrak{C}$, welche diese Grenzwerte erzeugen, sind jetzt zwei (nach rechts bzw links sich erstreckende) Scharen von *Parabeln* mit dem Scheitel $(0, 0)$, der x-Achse als Symmetrieachse und dem Parameter $\frac{1}{2}\beta^2$.

Zur genaueren Einsicht in das Zustandekommen der fürs erste doch wohl äußerst merkwürdig erscheinenden Tatsache, daß jene Funktion $f(x, y)$ bei Annäherung an die Nullstelle *auf jedem Halbstrahle* gegen 0 konvergiert, dagegen auf jeder der näher bezeichneten Parabeln nach $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert, mögen die folgenden Bemerkungen dienen.

Wie aus Gl (8a) hervorgeht, nimmt $f(x, y)$ auf den *Halbstrahlen*: $x = \pm t$, $y = \beta t$ für $t = \frac{1}{\beta^2}$ $\left(\text{also: } x = \pm \frac{1}{\beta^2}, \; y = \frac{1}{\beta}\right)$ die Werte $\pm \frac{1}{2} \beta^2$ an, also für verhältnismäßig *große* Werte von β (d. h. je mehr die Richtung der Halbstrahlen sich der vertikalen nähert) und demnach für *sehr kleine* Werte von t (also *sehr nahe* an der Stelle $(0, 0)$) *numerisch sehr große* Werte an. Übrigens sind diese Werte $\pm \frac{1}{\beta^2}$ noch nicht einmal die numerisch größten, die $f(x, y)$ auf den betreffenden zwei Halbstrahlen in der Nähe des Nullpunkts annimmt, diese sind vielmehr, wie eine bekannte Methode der Differentialrechnung zeigt: $\pm \frac{1}{4} \sqrt[4]{27}\, \beta^2$ und treten ein für: $x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{\beta^2}$, $y = \sqrt[4]{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{\beta}$, also noch etwas *näher* am Nullpunkte. Erst längs der mit diesem Punkte beginnenden und mit unbegrenzt wachsendem β unbegrenzt abnehmenden Strecke nimmt dann $|f(x, y)|$

äußerst jäh gegen Null ab. Die Konvergenz von $f(x, y)$ gegen 0 längs der verschiedenen in den Punkt $(0, 0)$ einmündenden Halbstrahlen erscheint hiernach als eine *ungleichmäßige*, es gibt *keine noch so kleine* Umgebung $\sqrt{x^2 + y^2} < \varrho$ von der Beschaffenheit, daß $f(x, y)$ innerhalb derselben auf *allen* Halbstrahlen einen gewissen Kleinheitsgrad erreicht.

Ähnlich liegen die Verhältnisse längs der *Parabeln* bezüglich der *Divergenz* von $f(x, y)$ ins *Unendliche*. Allerdings *wächst*, wie Gl. (8b) zeigt, $|f(x, y)|$ *beständig* und zwar *proportional mit* $\frac{1}{t^2}$. Aber die Schnelligkeit dieses Wachsens hängt wesentlich von dem Proportionalitätsfaktor $\frac{\beta^4}{1+\beta^8}$ ab, der wegen:

$$\frac{\beta^4}{1+\beta^8}\begin{cases} < \frac{1}{\beta^4} \\ < \beta^4, \end{cases}$$

sowohl für *relativ große*, als für *relativ kleine* Werte von $|\beta|$ *sehr klein* ausfällt. Wird insbesondere β verhältnismäßig *klein* angenommen und sodann $t = |\beta|$ gesetzt, so daß die zugehörigen Parabelpunkte (nämlich: $x = \pm \beta^2$, $y = \pm \beta^2$) *sehr nahe* am Nullpunkte liegen, so findet man als zugehörigen Absolutwert von $f(x, y)$ aus Gl. (8b):

$$|f(x, y)| = \frac{\beta^2}{1+\beta^8} < \beta^2,$$

also trotz beständigen Wachsens noch *sehr klein*. Ein *stärkeres* und schließlich *rapides* Anwachsen von $|f(x, y)|$ findet erst auf den noch merklich *jenseits* der Punkte $(\pm \beta^2, \pm \beta^2)$ zum Nullpunkte sich erstreckenden *sehr kleinen* und gleichzeitig mit β unbegrenzt abnehmenden Parabelbögen statt. Wenn also auch ein beliebiger Halbstrahl, mag er sich noch so sehr der Vertikalen nähern, *alle* Parabeln der einen Schar schneiden muß, so geschieht dies *schließlich*, d. h. bei den Parabeln mit hinlänglich kleinem $|\beta|$ (also hinlänglich kleiner Öffnung) in solchen Punkten, für welche $|f(x, y)|$ immerhin *sehr kleine* Werte annimmt, so daß hieraus für die Konvergenz von $f(x, y)$ gegen *Null* bei weiterem Fortschreiten auf dem Halbstrahle kein Hindernis erwächst.

5. Von dem in Nr. 2 definierten, offenbar dem *Doppellimes* einer *Doppelfolge*: $\lim\limits_{\mu, \nu \to \infty} a_\mu^{(\nu)}$ (vgl. I_1, § 40, Nr. 1, S. 253) nachgebildeten *Doppellimes*: $\lim\limits_{x \to a, y \to b} f(x, y)$ wohl zu unterscheiden sind die beiden *iterierten Limites*:

$$(9)\quad \begin{cases} \lim\limits_{y \to b} \overline{\underline{\lim}}_{x \to a} f(x, y) & \text{(deutlicher geschrieben:} \quad \lim\limits_{y \to b} (\overline{\underline{\lim}}_{x \to a} f(x, y)) \\ \lim\limits_{x \to a} \overline{\underline{\lim}}_{y \to b} f(x, y) & (\qquad ,, \qquad\qquad ,, \qquad \lim\limits_{x \to a} (\overline{\underline{\lim}}_{y \to b} f(x, y)), \end{cases}$$

welche das Analogon zu den *iterierten Limites* einer *Doppelfolge* bilden

(vgl. I_1, § 42, Nr. 1, S. 271), übrigens keiner weiteren Erklärung bedürfen, da sie ja auf zwei nacheinander auszuführenden Limesbildungen in bezug auf eine *einzige* Veränderliche beruhen.[1]) Sie reduzieren sich auf:

$$\lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y), \quad \lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y),$$

wenn die inneren Hauptlimites in einen Limes zusammenfallen. Daß übrigens, auch wenn dies *nicht* der Fall ist, die beiden *iterierten* Limites (9) nichtsdestoweniger existieren und überdies zusammenfallen können, mag das folgende einfache Beispiel zeigen.

Es bedeute $\varphi(x)$ die in § 4, Nr. 2 (S. 28) angeführte *Dirichlet*sche Funktion:

$$\varphi(x) \begin{cases} = a \text{ für alle } \textit{rationalen } x, \\ = b \text{ für alle } \textit{irrationalen } x, \end{cases}$$

und es sei:

$$f(x, y) = c + \varphi(y) \cdot x^2 + \varphi(x) \cdot y^2,$$

so ergibt sich, falls $a < b$:

$$\underline{\lim}_{x \to 0} f(x, y) = c + a y^2, \quad \overline{\lim}_{x \to 0} f(x, y) = c + b y^2$$

also *verschieden*, nichtsdestoweniger:

$$\lim_{y \to 0} \overline{\underline{\lim}}_{x \to 0} f(x, y) = c$$

und ebenso:

$$\lim_{x \to 0} \overline{\underline{\lim}}_{y \to 0} f(x, y) = c.$$

6. Bezüglich des Zusammenhanges zwischen den beiden *iterierten Limites* (9) und dem *Doppellimes* (2) gilt der folgende Satz:

Es ist:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{y \to b} \overline{\underline{\lim}}_{x \to a} f(x, y) \\ \lim\limits_{x \to a} \overline{\underline{\lim}}_{y \to b} f(x, y) \end{array}\right\} = \lim_{x \to a,\, y \to b} f(x, y),$$

falls der Doppellimes (im weiteren Sinne) existiert.

Beweis. Es sei zunächst: $\lim\limits_{x \to a,\, y \to b} f(x, y) = c$, so daß also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein (im allgemeinen gleichzeitig mit ε gegen 0 abnehmendes) $\varrho > 0$ existiert, für welches:

$$|f(x, y) - c| < \varepsilon, \quad \text{wenn:} \quad 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varrho,$$

---

1) Es erscheint vielleicht zweckmäßig, an die Bedeutung der Schreibweise $\overline{\underline{\lim}}$ zu erinnern, welche (nach I_1, § 36, Nr. 3, S. 213) besagt, daß in dem betreffenden Zusammenhange die Wahl zwischen dem unteren und oberen Limes (falls diese verschieden sind) vollständig frei steht.

anders geschrieben:

$$c - \varepsilon < f(x, y) < c + \varepsilon \qquad (0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varrho).$$

Daraus folgt für $x \to a$

$$c - \varepsilon \leqq \underline{\lim}_{x \to a} f(x, y) \leqq \overline{\lim}_{x \to a} f(x, y) \leqq c + \varepsilon \quad \text{für:} \quad 0 < |y - b| < \varrho.$$

Kürzer geschrieben:

$$|\overline{\underline{\lim}}_{x \to a} f(x, y) - c| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 < |y - b| < \varrho$$

Diese Beziehung ist aber gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\lim_{y \to b} \overline{\underline{\lim}}_{x \to a} f(x, y) = c,$$

(wie man sofort übersieht, wenn man $\overline{\underline{\lim}}_{x \to a} f(x, y) = F(y)$ setzt).

In gleicher Weise ergibt sich:

$$\lim_{x \to a} \overline{\underline{\lim}}_{y \to b} f(x, y) = c.$$

Geht man von der Voraussetzung aus: $\lim_{x \to a,\, y \to b} f(x, y) = +\infty$, so hat man bei beliebig *großem* $C > 0$:

$$f(x, y) > C \quad \text{für:} \quad 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varrho,$$

und daher:

$$\overline{\lim}_{x \to a} f(x, y) \geqq \underline{\lim}_{x \to a} f(x, y) \geqq C \qquad (0 < |y - b| < \varrho).$$

Da es freisteht C unbegrenzt zu vergrößern (bei gleichzeitig unbegrenzt abnehmenden ϱ), so folgt:

$$\lim_{y \to b} \overline{\underline{\lim}}_{x \to a} f(x, y) = +\infty$$

Ebenso:

$$\lim_{x \to a} \overline{\underline{\lim}}_{y \to b} f(x, y) = +\infty.$$

7. Aus dem eben bewiesenen Satze geht hervor, daß der *Doppellimes* sicher *nicht* existieren kann, wenn die beiden *iterierten Limites verschieden* ausfallen Setzt man z. B.:

$$f(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2} + x + y,$$

so findet man:

$$\lim_{x \to 0} f(x, y) = 1 + y \quad \text{für} \quad y \neq 0, \quad \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = 1,$$

dagegen:

$$\lim_{y \to 0} f(x, y) = x \quad \text{für} \quad x \neq 0, \qquad \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = 0.$$

Setzt man, um sich über das Verhalten von $f(x, y)$ auf den verschiedenen in den Nullpunkt einmündenden Halbstrahlen zu orientieren,

$y = \beta x$, so folgt:

$$f(x, \beta x) = \frac{\beta^2}{1+\beta^2} + (1+\beta)x, \quad \text{also:} \quad \lim_{x \to 0} f(x, \beta x) = \frac{\beta^2}{1+\beta^2},$$

der fragliche Grenzwert hängt also wesentlich von dem Richtungskoeffizienten β ab.

Andererseits darf aus der Existenz und dem Zusammenfallen der beiden *iterierten Limites* noch keineswegs auf die Existenz des *Doppellimes* geschlossen werden. Es sei z. B.:

$$f(x, y) = \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2 + x^2 y^2} + x - y$$

und daher:

$$\lim_{x \to 0} f(x, y) = 1 - y, \quad \text{also:} \quad \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = 1$$

$$\lim_{y \to 0} f(x, y) = 1 + x, \quad \text{also:} \quad \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = 1.$$

Die beiden iterierten Limites fallen somit zusammen. Daß nichtsdestoweniger für $x, y \to 0$ *kein Doppellimes* existiert, erkennt man sofort, wenn man $y = x$ setzt. Alsdann wird nämlich:

$$f(x, x) = 0, \quad \text{also auch:} \quad \lim_{x \to 0} f(x, x) = 0$$

8. Wie in Nr. 2, Fußn. 1, S. 106 ausdrücklich bemerkt wurde, gibt die Existenz eines bestimmten $\lim\limits_{x \to a,\, y \to b} f(x, y)$ allein noch keinerlei Auskunft über den Wert von $f(a, b)$. Bestehen nun aber die *zwei* Bedingungen:

(I) $\qquad f(a, b) = c \quad$ (d. h. eine bestimmte Zahl)

(II) $\qquad \lim\limits_{x \to a,\, y \to b} f(x, y) = f(a, b),$

so heißt $f(x, y)$ *stetig an der Stelle* (a, b), ausführlicher gesagt, eine *stetige* Funktion der *beiden* Veränderlichen x, y für $x = a$, $y = b$.

Auf Grund der Definition des *Doppellimes* (2) (S. 106) durch die Ungleichungen (3), (3a) kann die Bedingung (II) durch die folgende ersetzt werden:

(IIa) $\quad |f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon \quad$ *für:* $\quad 0 \leqq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varrho,$

(welche durch ihre Fassung die Bedingung (I) schon implizite enthält: vgl. § 6, Nr. 1, Fußn. 2), S. 46), anders geschrieben:

(IIa′) $\quad |f(a + \vartheta\varrho, b + \zeta\varrho) - f(a, b)| < \varepsilon \quad$ *für:* $\quad 0 \leqq \vartheta^2 + \zeta^2 < 1.$

Schreibt man in Ungl. (IIa) $\frac{\varepsilon}{2}$ statt ε und ersetzt die offene kreisförmige Umgebung durch eine abgeschlossene quadratische, so nimmt die betreffende Stetigkeitsbedingung die Form an:

$$|f(x, y) - f(a, b)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \textit{für:} \quad 0 \leqq \left\{ \begin{matrix} |x-a| \\ |y-b| \end{matrix} \right\} \leqq \varrho$$

und, wenn (x', y') gleichfalls irgendeine Stelle der bezeichneten Umgebung bedeutet:

$$|f(x', y') - f(a, b)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \textit{für:} \quad 0 \leqq \begin{Bmatrix} |x' - a| \\ |y' - b| \end{Bmatrix} \leqq \varrho.$$

Daraus ergibt sich:

$$\text{(IIb)} \qquad |f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$$

zunächst als *notwendige* Stetigkeitsbedingung, die aber sofort auch als *hinreichend* erkannt wird, wenn man $x' = a$, $y' = b$ setzt. Wird sodann die Schwankung von $f(x, y)$ für die bezeichnete Umgebung mit D_ϱ bezeichnet, so erscheint um so mehr die Beziehung:

$$\text{(IIc)} \qquad D_\varrho < \varepsilon$$

als *hinreichende* Stetigkeitsbedingung, während ihre prinzipielle *Notwendigkeit* (genau genommen in der Form $D_\varrho < 2\varepsilon$) gerade so erkannt wird, wie in § 6, Nr. 1, Ungl. (IIb) für Funktionen *einer* Veränderlichen.

9. Aus der Definitionsbedingung (IIa) folgt mit Rücksicht auf die in Nr. 3 als Inhalt von Gl. (6) erörterte Eigenschaft des Doppellimes, daß die an der Stelle (a, b) *stetige* Funktion $f(x, y)$ auch *stetig* in den Wert $f(a, b)$ übergeht, wenn das Wertepaar (x, y) die Punkte eines beliebigen nach (a, b) führenden Weges durchläuft.

Dies gilt insbesondere längs aller in (a, b) einmündenden *Halbstrahlen*, während umgekehrt die *Stetigkeit* längs aller dieser *Halbstrahlen* noch *keineswegs* diejenige *an der Stelle* (a, b) nach sich zieht.

Vervollständigt man nämlich die Definition der in Nr. 4 diskutierten Funktion Gl. (8):

$$f(x, y) = \frac{x y^4}{x^4 + y^8}.$$

durch die Zusatzbestimmung:

$$f(0, 0) = 0,$$

so wird *in allen möglichen (geradlinigen) Richtungen* (vgl. Gl. (8a)):

$$\lim_{x, y \to 0} f(x, y) = f(0, 0),$$

während im Anschlusse an Gl. (8b) sich ergibt, daß $f(x, y)$ an der Stelle $(0, 0)$ *nicht nur nicht stetig*, sondern sogar in der Umgebung *nicht einmal beschränkt* ist.

Da die an der Stelle (a, b) *stetige* Funktion $f(x, y)$ *in allen Richtungen stetig* sein muß, so gilt dies besonders *längs der vier zu den Achsen parallelen Halbstrahlen*, mit anderen Worten, es muß $f(x, b)$ eine *stetige* Funktion von x für $x = a$, ebenso $f(a, y)$ eine *stetige* Funktion von y für $y = b$ sein, in Zeichen:

$$(10) \qquad \begin{cases} \text{a)} \quad |f(a + \vartheta\varrho, b) - f(a, b)| < \varepsilon \quad \textit{für:} \quad |\vartheta| < 1, \\ \text{b)} \quad |f(a, b + \zeta\varrho) - f(a, b)| < \varepsilon \quad \textit{für:} \quad |\zeta| < 1. \end{cases}$$

Selbstverständlich sind diese für die Stetigkeit von $f(x, y)$ an der Stelle (a, b) *notwendigen* Bedingungen noch sehr viel weiter davon entfernt *hinreichende* zu sein, da sie ja der Funktion bei der Annäherung an die Stelle (a, b) *im Innern* der vier durch die beiden Achsenparallelen erzeugten Quadranten noch volle Freiheit lassen.

Man kann indessen je eine der beiden Bedingungen (10) so abändern, daß sie mit der anderen zusammen für die *Stetigkeit* von $f(x, y)$ an der Stelle (a, b) *hinreichend* wird, so daß auf diese Weise die Stetigkeit von $f(x, y)$ in bezug auf *die beiden Veränderlichen* zurückgeführt wird auf diejenige in bezug auf *je eine Veränderliche.* Man hat hierzu nur die Bedingung (10a) durch die folgende zu ersetzen:

$$|f(a + \vartheta\varrho, y) - f(a, y)| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad b - \varrho < y < b + \varrho,$$

anders geschrieben:

$$(10\text{A}) \qquad |f(a + \vartheta\varrho, b + \zeta\varrho) - f(a, b + \zeta\varrho)| < \varepsilon \quad \textit{für:} \quad |\zeta| < 1;$$

bzw. die Bedingung (10b) durch die folgende:

$$|f(x, b + \zeta\varrho) - f(x, b)| < \varepsilon \quad \textit{für:} \quad a - \varrho < x < a + \varrho,$$

anders geschrieben:

$$(10\text{B}) \qquad |f(a + \vartheta\varrho, b + \zeta\varrho) - f(a + \vartheta\varrho, b)| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad |\vartheta| < 1.$$

Die erste dieser Bedingungen verlangt die *Stetigkeit* von $f(x, y)$ in bezug auf die *eine* Veränderliche x an der Stelle $x = a$ *nicht nur für* $y = b$, sondern *„gleichmäßig" für alle* y des Intervalls $b - \varrho < y < b + \varrho$. Das Entsprechende gilt bezüglich der zweiten Bedingung.

Durch Kombination von (10A) mit (10b) bzw. von (10B) mit (10a) ergibt sich die Beziehung:

$$|f(a + \vartheta\varrho, b + \zeta\varrho) - f(a, b)| < 2\varepsilon \quad \textit{für:} \quad \left\{\begin{matrix} |\vartheta| \\ |\zeta| \end{matrix}\right\} < 1,$$

welche dem Sinne nach mit (11a') gleichwertig ist, also die *Stetigkeit* von $f(x, y)$ an der Stelle (a, b) nach sich zieht.

Das vorstehende Ergebnis liefert u. a. den folgenden nützlichen Spezialsatz:

> *Ist $\varphi(x)$ stetig für $x = a$, $\psi(y)$ für $y = b$, so ist das Produkt $f(x, y) \equiv \varphi(x) \cdot \psi(y)$ eine an der Stelle (a, b) stetige Funktion der beiden Veränderlichen x, y.*

Man findet zunächst zur Herstellung der Beziehungen (10A), (10b):

$$(11) \left\{\begin{aligned} &|f(a + \vartheta\varrho, b + \zeta\varrho) - f(a, b + \zeta\varrho)| = |\varphi(a + \vartheta\varrho) - \varphi(a)| \cdot |\psi(b + \zeta\varrho)| \\ &|f(a, b + \zeta\varrho) - f(a, b)| = |\varphi(a)| \cdot |\psi(b + \zeta\varrho) - \psi(b)|. \end{aligned}\right.$$

Man kann nun zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\varrho' > 0$ so fixieren, daß:

$$(12) \qquad |\psi(b + \zeta\varrho') - \psi(b)| < \varepsilon \quad \textit{für:} \quad |\zeta| < 1$$

und daher:

(12a) $$|\psi(b + \zeta\varrho')| < |\psi(b)| + \varepsilon = \gamma;$$

sodann ein $\varrho \leqq \varrho'$, derart, daß:

(13) $$|\varphi(a + \vartheta\varrho) - \varphi(a)| < \frac{\varepsilon}{\gamma} \quad \textit{für:} \quad |\vartheta| < 1$$

und, falls $|\varphi(a)| > 1$ sein sollte, zugleich:

(14) $$|\psi(b + \zeta\varrho) - \psi(b)| < \frac{\varepsilon}{\varphi(a)}$$

Da Ungl. (12) bestehen bleibt, wenn man ϱ' durch ϱ ersetzt, so gehen durch Einsetzen von Ungl. (12) [mit der Abänderung ϱ statt ϱ'], (13) und eventuell (14) in die Gleichungen (11) diese letzteren in die Beziehungen (10A), (10b) über, womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Hieraus folgt z. B., daß $x^m y^n$ (wo *m, n natürliche Zahlen*) an jeder im Endlichen gelegenen Stelle eine *stetige* Funktion von (x, y) ist.

10. Die Analogie der Stetigkeitsdefinition für Funktionen *zweier* Veränderlichen mit derjenigen für Funktionen *einer* Veränderlichen ist ausreichend, um gewisse dort daraus gezogene Folgerungen ohne weiteres auf den jetzt vorliegenden Fall zu übertragen. Danach ergibt sich insbesondere:

Ist $f(x, y)$ stetig an der Stelle (a, b), so gilt das gleiche für den absoluten Betrag $|f(x, y)|$ (vgl. § 6, Nr. 3, S. 50).

Die Summe und das Produkt beliebig vieler an der Stelle (a, b) stetiger Funktionen von (x, y) ist daselbst gleichfalls stetig.[1] ***Dasselbe gilt für den Quotienten zweier solcher Funktionen, vorausgesetzt daß der Nenner für $x = a$, $y = b$ von Null verschieden ist*** (vgl. § 6, Nr. 4, S. 51).

Schreibt man ferner in Nr. 3, Gl. (6) $\varphi(t)$, $\psi(t)$ an Stelle von $a + \varphi(t)$, $b + \psi(t)$, so daß also: $\varphi(t_0) = a$, $\psi(t_0) = b$ wird, und nimmt man an, daß $\varphi(t)$, $\psi(t)$ für $t = t_0$ *nicht nur*, wie in Nr. 3 angenommen wurde, *vorwärts*, sondern *schlechthin stetig* sind, so folgt aus der Voraussetzung:

$$\lim_{x \to a,\, y \to b} f(x, y) = f(a, b)$$

nach Analogie von Gl. (6) die Beziehung:

(15) $$\lim_{t \to t_0} f(\varphi(t), \psi(t)) = f(a, b) = f(\varphi(t_0), \psi(t_0)),$$

deren Inhalt folgendermaßen ausgesprochen werden kann:

---

1) Daraus folgt z. B. mit Rücksicht auf die letzte Bemerkung der vorigen Nummer ohne weiteres, daß jede *ganze rationale* Funktion $\sum a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ an jeder im Endlichen gelegenen Stelle eine *stetige* Funktion von (x, y) ist.

Ist $f(x, y)$ stetig an der Stelle (a, b), sind ferner $\varphi(t)$, $\psi(t)$ stetig für $t = t_0$ und ist: $\varphi(t_0) = a$, $\psi(t_0) = b$, so ist $f(\varphi(t), \psi(t))$ eine für $t = t_0$ stetige Funktion von t

In analoger Weise ergibt sich der folgende Satz:

Ist $f(x, y)$ stetig an der Stelle (a, b), sind ferner $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ zwei an der Stelle (u_0, v_0) stetige Funktionen der beiden reellen Veränderlichen (u, v) und ist $\varphi(u_0, v_0) = a$, $\psi(u_0, v_0) = b$, so ist $f(\varphi(u,v), \psi(u, v))$ als Funktion von (u, v) stetig an der Stelle (u_0, v_0).

11. Es sei jetzt $f(x, y)$ (eindeutig definiert und) *stetig* für *jede* Stelle eines endlichen *zusammenhängenden* und *abgeschlossenen* Bereiches $\mathfrak{B}$[1]) oder, wie man in diesem Falle kürzer zu sagen pflegt, *im Bereiche* $\mathfrak{B}$. Die Funktion ist dann an jeder einzelnen Stelle *endlich* und für eine gewisse Umgebung auch *beschränkt*, mithin nach dem letzten Satze von Nr. 1 dieses Paragraphen (S. 106) *im gesamten Bereiche* $\mathfrak{B}$ *beschränkt*. Sie hat also daselbst eine *endliche obere Grenze* G und eine *endliche untere Grenze* g. Darüber hinaus läßt sich zeigen, daß die eine als *reales Maximum*, die andere als *reales Minimum* auftritt, d h. es gilt der Satz:

Ist $f(x, y)$ stetig in dem endlichen, zusammenhängenden und abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{B}$, so gibt es daselbst mindestens je eine Stelle (A, B) bzw. (a, b), derart, daß: $f(A, B) = G$, $f(a, b) = g$.

Der Beweis wird im einzelnen gerade so geführt, wie der entsprechende für Funktionen *einer* Veränderlichen (vgl. § 7, Nr. 1, S. 52), läßt sich übrigens im wesentlichen folgendermaßen zusammenfassen: Nach dem vorletzten Satze von Nr. 1 dieses Paragraphen gibt es in $\mathfrak{B}$ mindestens eine Stelle (A, B) bzw. (a, b) in deren beliebig kleiner Umgebung $f(x, y)$ die *obere* Grenze G, bzw. die *untere* Grenze g hat. Infolge der *Stetigkeit* von $f(x, y)$ muß dann $f(A, B)$ dem Werte G, $f(a, b)$ dem Werte g „*beliebig*" nahe kommen, was nur so möglich ist, daß: $f(A, B) = G$, $f(a, b) = g$.

12. Auch der in § 7, Nr. 3 (S. 54) für Funktionen $f(x)$ bewiesene Satz über die *gleichmäßige Stetigkeit* läßt sich auf Funktionen $f(x, y)$ übertragen. Wir schicken hierzu die folgenden Bemerkungen voraus:

Besitzt $f(x, y)$ in irgendeinem Gebiete die Schwankung D, so ist die Schwankung in einem beliebigen Teilgebiet *höchstens* D, da ja die obere Grenze bei Beschränkung auf ein Teilgebiet niemals steigen, die untere niemals fallen kann.

---

1) Für die Feststellung der *Stetigkeit* in einem *Randpunkte* (x, y) kommt lediglich der zu $\mathfrak{B}$ gehörige *Teil* der *vollen* Umgebung als „*Umgebung*" in Betracht — vgl. Nr. 2 dieses Paragraphen (S 106).

Hat ferner $f(x, y)$ in zwei abgeschlossenen Gebieten, die mindestens in *einem* Punkte (a, b) zusammenhängen, die Schwankungen D_1 und D_2, so ist die Schwankung in dem aus beiden Gebieten zusammengesetzten Bereich *höchstens* $D_1 + D_2$. Denn, bedeuten (x, y), (x_1, y_1) zwei beliebige Punkte der Gesamtmenge, so hat man in *jedem* Falle:

$$\begin{aligned}|f(x, y) - f(x_1, y_1)| &= |(f(x, y) - f(a, b)) + (f(a, b) - f(x_1, y_1))| \\ &\leqq |f(x, y) - f(a, b)| + |f(a, b) - f(x_1, y_1)| \\ &\leqq D_1 + D_2.\end{aligned}$$

Ebenso findet man, wenn n abgeschlossene, zum mindesten punktweise zusammenhängende Gebiete mit den zugehörigen Schwankungen $D_1, D_2, \ldots, D_n$ vorhanden sind:

$$(16) \qquad |f(x, y) - f(x_1, y_1)| \leqq D_1 + D_2 + \cdots + D_n$$

als obere Schranke für die Schwankung von $f(x, y)$ innerhalb der Gesamtmenge, wie auf Grund des zuvor erledigten Falles $n = 2$ sich leicht durch vollständige Induktion bestätigen läßt.

13. Dies vorausgesetzt, beweisen wir jetzt den folgenden Satz:

Ist $f(x, y)$ stetig in dem endlichen, zusammenhängenden und abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{B}$, so ist $f(x, y)$ in $\mathfrak{B}$ gleichmäßig stetig, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, derart, daß in jedem dem Bereiche $\mathfrak{B}$ angehörigen Quadrate von der Seitenlänge δ die Schwankung von $f(x, y)$ kleiner als ε ausfällt

Beweis: Um einen beliebig ausgewählten Innenpunkt (x_0, y_0) läßt sich nach Nr. 8 dieses Paragraphen (s. Ungl. (IIc), S. 114) ein Quadrat von einer gewissen Seitenlänge 2ϱ legen, so daß die Schwankung D von $f(x, y)$ für die Punkte dieses Quadrats einschließlich der Begrenzung einen gegebenen Kleinheitsgrad erreicht, wir wollen sagen, kleiner als $\frac{\varepsilon}{4}$ ausfällt. Nach dem Muster dieses Quadrats und allseitig daran anschließend werde nun der ganze Bereich $\mathfrak{B}$ mit einem quadratischen Netz überzogen, dessen einzelne Quadrate, soweit sie nicht vollständig aus $\mathfrak{B}$-Punkten bestehen, Bruchstücke von $\mathfrak{B}$ enthalten werden. Es kann dann zunächst der Fall eintreten (und dieser wird sogar bei einigermaßen kleinem ϱ die Regel sein), daß außer in dem Anfangsquadrate noch in anderen die Bedingung $D < \frac{\varepsilon}{4}$ erfüllt ist. Alle diese Quadrate gelten als erledigt. Die etwa übrigbleibenden werden durch Mittellinien in je vier kongruente Teilquadrate zerlegt, von den letzteren diejenigen, welche der Bedingung $D < \frac{\varepsilon}{4}$ genügen, wieder als erledigt ausgeschieden, die übrigen dagegen dem analogen Teilungsprozeß unterworfen und in dieser Weise nach Bedarf fortgefahren. Es wird nun behauptet, daß nach einer begrenzten An-

wendung des beschriebenen Verfahrens das gewünschte Ziel ausnahmslos erreicht werden muß. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so müßte jedesmal mindestens ein Teilquadrat vorhanden sein, welches die fragliche Bedingung nicht erfüllt und bei weiterer Fortsetzung des Teilungsprozesses wieder mindestens ein Teilquadrat von gleicher Art liefert. Es würde also auf diese Weise mindestens eine Folge ineinander geschachtelter, unbegrenzt kleiner werdender Quadrate und ein allen diesen gemeinsamer, dem Bereiche $\mathfrak{B}$ angehöriger „Grenzpunkt"[1]) (a, b) von folgender Beschaffenheit resultieren: umgibt man den letzteren mit einem *noch so kleinen* Kreise, so würde in diesem $D \geqq \frac{\varepsilon}{4}$ ausfallen, was der Voraussetzung der *Stetigkeit* von $f(x, y)$ widerspräche.

Hiernach wird also, wenn die Länge der Teilquadrate ein gewisses endliches Minimum δ erreicht hat, die Bedingung $D < \frac{\varepsilon}{4}$ durchweg erfüllt sein. Dies bleibt, wenn man nachträglich auch alle die größeren Quadrate in solche von der Seitenlänge δ zerlegt, auf Grund der ersten Bemerkung von Nr. 12 auch in bezug auf diese Teilquadrate bestehen. Mit anderen Worten, der Bereich $\mathfrak{B}$ läßt sich mit einem Netz kongruenter Quadrate von der Seitenlänge δ überziehen, derart daß in jedem derselben die Bedingung $D < \frac{\varepsilon}{4}$ erfüllt ist.

Da ein *beliebiges*, nicht mit einem der Netzquadrate zusammenfallendes Quadrat von der Seitenlänge δ, das ganz oder teilweise aus $\mathfrak{B}$-Punkten besteht, *höchstens über vier* in einem Punkte zusammenstoßende Netzquadrate sich teilweise erstrecken kann, so muß dasselbe auf Grund der zweiten in Nr. 12 gemachten Bemerkung der Bedingung $D < \varepsilon$ genügen, womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

14. Auch der für stetige Funktionen $f(x)$ bewiesene *Zwischenwertsatz* (s. § 7, Nr. 5, S. 57) läßt sich auf Funktionen $f(x, y)$ übertragen und zwar in folgender Fassung:

Sind (x_1, y_1), (x_2, y_2) zwei Punkte eines endlichen, zusammenhängenden und abgeschlossenen Stetigkeitsbereiches $\mathfrak{B}$ der Funktion $f(x, y)$, so nimmt $f(x, y)$ im Innern von $\mathfrak{B}$ jeden zwischen $z_1 = f(x_1, y_1)$ und $z_2 = f(x_2, y_2)$ liegenden Wert unendlich oft an

Beweis. Die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), die zunächst beide im Innern von $\mathfrak{B}$ liegen mögen, lassen sich durch unendlich viele ganz aus Innenpunkten von $\mathfrak{B}$ bestehende Wege: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ verbinden. Längs eines jeden dieser Wege wird $f(x, y) = f(\varphi(t), \psi(t))$ nach Nr. 10 dieses Paragraphen (S. 117) eine *stetige* Funktion von t, die an den beiden End-

---

1) Vgl. § 8, Nr. 2 (S 62).

punkten die Werte z_1 und z_2 und somit längs jedes solchen Weges, also schließlich unendlich oft jeden Zwischenwert annehmen. Läßt man die Voraussetzung, daß die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) Innenpunkte von $\mathfrak{B}$ sein sollten, fallen, so mag der *eine* der beiden Punkte, etwa (x_1, y_1) als auf dem Rande liegend angenommen werden (was offenbar prinzipiell vollständig genügt). Infolge der Stetigkeit von $f(x, y)$ läßt sich dann ein Innenpunkt (x', y') so annehmen, daß $z' = f(x', y')$ sich von $z_1 = f(x_1, y_1)$ *beliebig wenig* unterscheidet. Dann folgt aber, daß $f(x, y)$ jeden Zwischenwert zwischen z' und z_2, also, da z' dem z_1 *beliebig nahe* kommt, auch zwischen z_1 und z_2 im Innern von $\mathfrak{B}$ unendlich oft annimmt.

Die Verbindung des Ergebnisses von Nr. 11 mit dem eben bewiesenen Satze liefert noch den folgenden:

Die in einem endlichen, zusammenhängenden und abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{B}$ stetige Funktion $f(x, y)$ nimmt daselbst einen gewissen Minimal- und Maximalwert mindestens je einmal, jeden Zwischenwert unendlich oft an.

§ 13. Überraschende Tragweite des Begriffs „arithmetischer Ausdruck“, selbst bei Beschränkung auf Grenzwerte rationaler Funktionen. — Vorläufiger Begriff einer „analytischen“ Funktion. — Motivierung der Beschränkung auf „Potenzreihen“ bei gleichzeitiger Ausdehnung des Definitionsbereiches auf das komplexe Gebiet.

1. Die nächstliegende Definitionsform für eine eindeutige Funktion einer reellen Veränderlichen x liefert, wie bereits in § 4, Nr. 2 (S. 27) bemerkt wurde, ein *begrenzter rationaler Ausdruck* in x. Ein solcher läßt sich, wie er ursprünglich auch ausgesehen haben mag, durch Anwendung der elementaren Rechnungsregeln auf die Form einer *gebrochenen rationalen Funktion* bringen:

$$(1) \qquad f(x) = \frac{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}{c_0 + c_1 x_1 + \cdots + c_m x^m},$$

die sich, falls x schließlich nicht im Nenner vorkommt, auf eine *ganze rationale* reduziert:

$$(2) \qquad g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Will man mit Hilfe der Definition einer Funktion durch einen ähnlichen *„arithmetischen Ausdruck“*, d. h. eine formale Verbindung der Veränderlichen x und irgenwelcher Konstanten vermittelst gewisser wohldefinierter Rechnungssymbole, über den Kreis der *rationalen* Funktionen hinaus gelangen, so muß zu der Anwendung der vier Spezies in *begrenz-*

er Anzahl irgendein neues Hilfsmittel hinzukommen. Das Vorbild für die Wahl dieses Hilfsmittels findet sich bereits in der *Zahlenlehre.* Wie dort die Absicht, den Zahlvorrat über die *rationalen* Zahlen hinaus zu erweitern, dazu führte, von den *endlichen* Systembrüchen zu den sogenannten *unendlichen*, d. h. schließlich zu *Grenzwerten* von unbegrenzten *Folgen endlicher Systembrüche* überzugehen (s. I_1, § 20, S. 119; § 21, S. 124), so liegt hier der Versuch nahe, von einer unbegrenzten *Folge rationaler Funktionen:* $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_\nu(x), \ldots$ ausgehend, eine *neue Funktion* $f(x)$ durch eine Beziehung von der Form:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \tag{3}$$

zu definieren, was offenbar für alle Zahlen derjenigen Menge $\{x'\}$ gelingt, für welche die *Zahlenfolge* $(f_\nu(x'))$ *konvergiert*

Übrigens haben wir auf diese Methode bei Einführung des Funktionsbegriffes bereits hingewiesen (§ 4, Nr 2, S 27) und weiterhin mehrfach davon Gebrauch gemacht (s. z. B § 4, Nr. 7, S. 32/3; § 5, N. 4, S. 37), nämlich allemal da, wo es sich darum handelte, Beispiele für Funktionen zu gewinnen, die irgendein besonderes, bei *rationalen* Funktionen nicht vorkommendes Verhalten zeigen. Auch sei in Erinnerung gebracht (vgl. I_3, § 88, S. 668, Fußn. 2)), daß man einem *Grenzwert* von der Form (3) stets auch die (dem „unendlichen" Systembruche für einen Grenzwert von der Form $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_n}{b^n}$ adaequate) Form einer konvergenten *unendlichen Reihe* geben kann Auf Grund der Identität:

$$f_n(x) = f_0(x) + \sum_1^n{}^\nu (f_\nu(x) - f_{\nu-1}(x))$$

ergibt sich nämlich:

$$f(x) = f_0(x) + \sum_1^\infty{}^\nu (f_\nu(x) - f_{\nu-1}(x)). \tag{3a}$$

Es entsteht nun die Frage, ob die *Funktionen vom Typus* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, allenfalls abgesehen von einzelnen Unregelmäßigkeiten, in einem sogleich noch genauer festzustellenden Sinne einen ähnlichen Charakter besitzen müssen, wie die *rationalen* Funktionen. Es wird sich zeigen, daß zwischen den beiden Kategorien ein tief greifender prinzipieller Unterschied besteht.

2. Wenn eine ganze Funktion n^{ten} Grades $g(x)$ (s. Gl. (2)) für irgendeine Stelle $x = x_1$ verschwindet, so läßt sie sich, wie schon in der „Zahlenlehre" (I_1, § 25, Nr. 4, S. 154) gezeigt wurde, in die Form setzen:

$$g(x) = (x - x_1) \cdot g_1(x),$$

wo $g_1(x)$ eine mit dem Gliede $a_n x^{n-1}$ endigende ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet. Ist dann x_2 eine zweite Stelle, für welche $g(x)$ zu Null wird, so muß offenbar $g_1(x_2) = 0$ sein, so daß sich in analoger Weise wie zuvor der Faktor $(x - x_2)$ aus $g_1(x)$ abspalten läßt und daher:

$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot g_2(x),$$

wo $g_2(x)$ mit dem Gliede $a_n x^{n-2}$ endigt. Wird also angenommen, daß $g(x)$ auch noch für die Stellen $x = x_3, \ldots, x_n$ zu Null wird, so findet man durch Fortsetzung dieser Schlußweise:

$$g(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n). \tag{4}$$

Existiert jetzt noch eine $(n+1)^{\text{te}}$ Stelle $x = x_{n+1}$, derart, daß $g(x_{n+1}) = 0$, so folgt aus Gl. (4), daß:

$$0 = a_n(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \cdots (x_{n+1} - x_n),$$

was nur möglich ist, wenn $a_n = 0$. Für die ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades: $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$, auf welche sich nunmehr $g(x)$ reduziert, folgt dann in derselben Weise, daß $a_{n-1} = 0$ und ebenso: $a_{n-2} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$. Hiernach gilt also der folgende Satz:

Eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades, welche für mehr als n Stellen x zu Null wird, ist identisch Null, d. h. jeder ihrer Koeffizienten ist Null, und sie selbst hat daher für jedes x den Wert Null.

Dies vorausgeschickt, sei jetzt $f(x) \equiv \frac{g(x)}{g_1(x)}$ eine beliebige *rationale* Funktion, die wir von vornherein als *„reduziert"*, d. h. von gemeinsamen Faktoren (s. Gl. (4)) des Zählers und Nenners befreit annehmen wollen (so daß also $g(x)$ und $g_1(x)$ niemals *gleichzeitig* zu Null werden). Ist dann x_1 eine beliebige Stelle, für welche $g_1(x_1) \neq 0$, so hat $f(x)$ nicht nur für $x = x_1$, sondern infolge der Stetigkeit auch für eine gewisse *Umgebung* der Stelle x_1 einen bestimmten Wert. Angenommen nun, es sei $\frac{\gamma(x)}{\gamma_1(x)}$ eine zweite (gleichfalls „reduzierte") *rationale* Funktion, die für eine abzählbare unendliche Menge von Stellen *dieselben Werte* besitzt, wie $\frac{g(x)}{g_1(x)}$, so hätte man in diesem Umfange:

$$\frac{g(x)}{g_1(x)} - \frac{\gamma(x)}{\gamma_1(x)} \equiv \frac{g(x) \cdot \gamma_1(x) - \gamma(x) \cdot g_1(x)}{g_1(x) \cdot \gamma_1(x)} = 0,$$

was nur in der Weise möglich ist, daß:

$$g(x) \cdot \gamma_1(x) - \gamma(x) \cdot g_1(x) = 0 \tag{5}$$

für jene abzählbare Menge von Stellen x. Aus dem obigen Satze folgt alsdann, daß die ganze Funktion $g(x) \cdot \gamma_1(x) - \gamma(x) \cdot g_1(x)$, wie *hoch* auch

deren Grad sein mag, für *jedes* x den Wert *Null* haben muß, und es besteht daher die Beziehung:

$$\frac{g(x)}{g_1(x)} = \frac{\gamma(x)}{\gamma_1(x)} \tag{6}$$

zunächst für jedes x, für welches $g_1(x)$, also auch[1] $\gamma_1(x)$ *von Null verschieden* ist, schließlich auch für diejenigen (höchstens in endlicher Anzahl vorhandenen) Stellen x, für welche $g_1(x)$, $\gamma_1(x)$ zu *Null* werden, in dem Sinne, daß dort beiden Seiten von Gl. (6) der Wert ∞ beizulegen ist (s. § 5, Nr. 4 am Ende, S. 38).

Die vorstehende Schlußweise erleidet offenbar keine Änderung, wenn eine der beiden Nennerfunktionen $g_1(x)$, $\gamma_1(x)$ oder beide sich auf *Konstanten* reduzieren. Hiernach ergibt sich:

Zwei rationale Funktionen, deren Werte für eine abzählbare Menge von Stellen übereinstimmen, sind in ihrem ganzen Verlaufe einander gleich.

Oder auch:

Der gesamte Verlauf einer rationalen Funktion ist durch diejenigen Werte, welche sie für eine abzählbare Menge von Stellen eines (eventuell beliebig kleinen) Intervalls annimmt, vollständig bestimmt.

Wir wollen *vorläufig*, d. h. unter dem Vorbehalt, die folgende Definition späterhin noch anderweitig zu umschreiben, eine Klasse von Funktionen als *„analytisch"* bezeichnen, wenn jede ihr angehörige Funktion durch die Werte, die sie für eine abzählbare Menge von Stellen eines (eventuell beliebig kleinen) Intervalls annimmt, in ihrem ganzen Verlaufe bestimmt ist. Mit Benutzung dieser Ausdrucksweise läßt der vorstehende Satz sich kurz folgendermaßen aussprechen:

Jeder rationale Ausdruck in x ist eine analytische Funktion

3. Es soll nun gezeigt werden, daß es im Gegensatz hierzu, *Grenzwerte* von *rationalen* Ausdrücken äußerst einfacher Art gibt, die sehr weit davon entfernt sind, jenen „analytischen" Charakter zu besitzen, die insbesondere in verschiedenen Intervallen *verschiedene* (z. B. willkürlich vorgeschriebene) rationale Funktionen darstellen.

Es sei z eine reelle Veränderliche und es werde gesetzt:

$$f_n(z) = \frac{1}{1 + z^{2n}}, \tag{7}$$

also:

---

1) Aus $\gamma_1(x) = 0$ würde nämlich folgen: $\gamma(x) \neq 0$ und daher nach Gl (5): $g_1(x) = 0$.

$$(8)\qquad f(z) \equiv \lim_{n\to\infty} f_n(z) \begin{cases} = 1 & \text{für: } -1 < z < +1, \\ = \frac{1}{2} & \text{„ } z = -1,\ z = +1, \\ = 0 & \text{„ } z < -1,\ z > +1.\text{[1]} \end{cases}$$

Um das Intervall $[-1, +1]$ in ein solches zu transformieren, das von zwei ganz beliebigen Zahlen $a' < a$ begrenzt wird, führen wir an Stelle von z eine neue Veränderliche x durch die Substitution ein:

$$z = \frac{2x - a - a'}{a - a'} \quad \left(\text{also: } x = \frac{1}{2}\left((a - a')z + a + a'\right)\right).$$

Alsdann wird:

$$x = a' \text{ bzw. } = a \quad \text{für: } z = -1 \text{ bzw. } = +1 \quad (\textit{vice versa}),$$

und da x und z *gleichzeitig zu-* bzw. *ab*nehmen:

$$a' < x < a, \quad \text{wenn: } -1 < z < +1,$$

dagegen:

$$x < a' \text{ bzw. } > a, \quad \text{wenn: } z < -1 \text{ bzw. } > +1.$$

Hiernach gehen die Beziehungen (8) in die folgenden über:

$$(9)\ f\left(\frac{2x - a - a'}{a - a'}\right) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{2x - a - a'}{a - a'}\right)^{2n}} \begin{cases} = 1 & \text{für: } a' < x < a \\ = \frac{1}{2} & \text{„ } x = a',\ x = a \\ = 0 & \text{„ } x < a',\ x > a. \end{cases}$$

Versteht man jetzt unter:

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_{m+1}$$

beliebige reelle Zahlen, unter:

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_m(x)$$

$m + 1$ verschiedene, beliebig vorzuschreibende *rationale Funktionen* und setzt man sodann:

$$(10)\qquad F(x) = \sum_0^m{}_\mu f\left(\frac{2x - a_{\mu+1} - a_\mu}{a_{\mu+1} - a_\mu}\right) \cdot \varphi_\mu(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_0^m{}_\mu \frac{\varphi_\mu(x)}{1 + \left(\frac{2x - a_{\mu+1} - a_\mu}{a_{\mu+1} - a_\mu}\right)^{2n}},$$

so ergibt sich:

---

1) In Reihenform geschrieben:

$$f(z) = \frac{1}{2} + \sum_1^\infty{}_\nu \left(\frac{1}{1 + z^{2\nu}} - \frac{1}{1 + z^{2\nu-2}}\right) = \frac{1}{2} + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{z^{2\nu-2}(1 - z^2)}{(1 + z^{2\nu-2})(1 + z^{2\nu})}.$$

$$
(11)\quad F(x)\begin{cases} = 0 & \text{für: } x < a_0,\ x > a_{m+1} \\ = \varphi_\mu(x) & \text{,,}\quad a_\mu < x < a_{\mu+1} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \\ = \frac{1}{2}(\varphi_{\mu-1}(x) + \varphi_\mu(x)) & \text{für: } x = a_\mu \qquad \text{,,} \\ = \frac{1}{2}\varphi_0(x) & \text{,,}\quad x = a_0 \\ = \frac{1}{2}\varphi_{m+1}(x) & \text{,,}\quad x = a_{m+1} \end{cases}
$$

Der durch Gl. (10) als Grenzwert einer verhältnismäßig sehr einfachen rationalen Funktion definierte arithmetische Ausdruck $F(x)$ stellt also im Innern von m aneinanderstoßenden Intervallen *m verschiedene*, willkürlich vorgeschriebene rationale Funktionen, außerhalb des Gesamtintervalls die *Null* vor.[1]) Das Verhalten von $F(x)$ in irgendeinem dieser einzelnen Intervalle gestattet also nicht den geringsten Schluß auf das Verhalten außerhalb.

4. Ehe wir das vorstehende Ergebnis in bezug auf seine prinzipielle Bedeutung weiter verfolgen, wollen wir den arithmetischen Ausdruck (10) zur Herstellung von Beispielen für gewisse früher besprochene Möglichkeiten benützen Wir setzen speziell:

$$a_\mu = \mu, \quad \text{wo:} \quad \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (\textit{in infinitum}),$$

also:

$$(12)\qquad F(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' f(2x - 2\mu - 1) \cdot \varphi_\mu(x),$$ [2])

d. h.:

$$(12\text{a})\qquad \begin{cases} F(x) = \varphi_\mu(x) & \text{für: } \mu < x < \mu + 1 \\ F(\mu) = \frac{1}{2}(\varphi_{\mu-1}(\mu) + \varphi_\mu(\mu)). \end{cases}$$

Über die noch willkürlich vorzuschreibenden rationalen Funktionen $\varphi_\mu(x)$ verfügen wir jetzt in der Weise, daß wir setzen:

$$(13)\qquad \varphi_{2\lambda-1}(x) = 2\lambda - x \quad \varphi_{2\lambda}(x) = -\varphi_{2\lambda-1}(x) = x - 2\lambda,$$

so daß der arithmetische Ausdruck (12), wenn wir die Glieder mit un-

---

1) An den Stellen $x = a_\mu$ $(\mu = 0, 1, \ldots, m + 1)$ ist, wie die letzten drei Gleichungen (11) zeigen, $F(x)$ im allgemeinen *unstetig*.

2) Der Übergang von der *endlichen* Reihe (10) zu der *unendlichen* (12) bietet keine Schwierigkeit, da ja, wie die Gleichungen (12a) zeigen, für jedes endliche x alle Glieder bis auf eins oder zwei *verschwinden*

Ein analoger Ausdruck kann auch zur Darstellung der in Fußn 2, S. 58 erwähnten Funktion dienen. Man hat nur zu setzen:

$$a_{2\lambda} = \frac{1}{2^\lambda}, \quad a_{2\lambda+1} = \frac{3}{2^{\lambda+2}} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

und für $\varphi_{2\lambda}(x)$, $\varphi_{2\lambda+1}(x)$ die linearen Ausdrücke für die Ordinaten der entsprechenden geraden Linien einzuführen.

geraden $\mu = 2\lambda - 1$ und mit geradem $\mu = 2\lambda$ trennen, die Form annimmt:

$$(14)\quad F(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda \{f(2x - 4\lambda + 1) - f(2x - 4\lambda - 1)\} \cdot (2\lambda - x),$$

wo:

$$(14\text{a})\quad \begin{cases} f(2x - 4\lambda + 1) \\ \quad \equiv \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{1 + (2x - 4\lambda + 1)^{2n}} \begin{cases} = 1 & \text{für: } 2\lambda - 1 < x < 2\lambda \\ = \frac{1}{2} & \text{„} \quad x = 2\lambda - 1, x = 2\lambda \\ = 0 & \text{„} \quad x < 2\lambda - 1, x > 2\lambda \end{cases} \\ f(2x - 4\lambda - 1) \\ \quad \equiv \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{1 + (2x - 4\lambda - 1)^{2n}} \begin{cases} = 1 & \text{für: } 2\lambda < x < 2\lambda + 1 \\ = \frac{1}{2} & \text{„} \quad x = 2\lambda, x = 2\lambda + 1 \\ = 0 & \text{„} \quad x < 2\lambda, x > 2\lambda + 1. \end{cases} \end{cases}$$

Dabei ist insbesondere nach Gl. (13)

$$(14\text{b})\quad \varphi_{2\lambda - 1}(2\lambda) = \varphi_{2\lambda}(2\lambda) = 0, \quad \varphi_{2\lambda}(2\lambda + 1) = \varphi_{2\lambda + 1}(2\lambda + 1) = 1,$$

so daß $F(x)$ auch an den Stellen $x = 2\lambda$ und $x = 2\lambda \pm 1$ *stetig* wird (und zwar $= 0$ für $x = 2\lambda$, dagegen $= 1$ für $x = 2\lambda \pm 1$). Man findet also schließlich:

$$(15)\quad \begin{cases} F(x) = 2\lambda - x & \text{für:} \quad 2\lambda - 1 \leqq x \leqq 2\lambda \\ F(x) = x - 2\lambda & \text{„} \qquad 2\lambda \leqq x \leqq 2\lambda + 1. \end{cases}$$

Hiernach ist $F(x)$ eine für: $-\infty < x < +\infty$ *stetige* Funktion, die an allen Stellen $x = 2\nu$ das *reale Minimum* 0, an allen Stellen $x = 2\lambda \pm 1$ das *reale Maximum* 1 besitzt.

Da die Gleichungen: $y = 2\lambda - x$ und $y = x - 2\lambda$ zwei Gerade darstellen, welche die Abszissenachse im Punkte $x = 2\lambda$ in der Weise schneiden, daß die erste mit der *negativen*, die zweite mit der *positiven* Abszissenrichtung einen Winkel von 45° bildet, so erscheint als geometrisches Bild der Funktion $y = F(x)$ eine aus rechten Winkeln gebildete Zickzacklinie, welche die Punkte $0, \pm 2, \pm 4, \ldots$ mit der Abszissenachse gemein hat und für die Abszissen $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$ die Höhe 1 erreicht.

Wir betrachten jetzt die Funktion:

$$\Phi(x) \equiv F\left(\frac{1}{x}\right).$$

Dieselbe ist nach dem Satze von § 6, Nr. 5 (S. 51) eine *stetige* Funktion von x, so lange $\frac{1}{x}$ stetig ist, d. h. für jedes x mit Ausnahme der Stelle $x = 0$, für welche $F\left(\frac{1}{x}\right)$ als *nicht definiert* erscheint. Wir könnten also zur Definition von $\Phi(0)$ irgendeine besondere Festsetzung treffen, indem wir z. B. setzen: $\Phi(0) = 0$. Doch läßt sich, falls man Wert darauf legt, diesen Schönheitsfehler zu beseitigen, auch leicht eine *einheitliche* Defini-

tionsformel herstellen, deren Brauchbarkeit auch die Stelle $x = 0$ umfaßt. Hierzu stellen wir zunächst einen Ausdruck $\Theta(x)$ her, der für $x = 0$ den Wert 1, für alle anderen x den Wert 0 hat. Dies würde z. B. der Ausdruck $E\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ leisten, falls man dem Funktionszeichen E die in Fußnote 1, S. 42, angegebene Bedeutung beilegt. Oder auch, um das in dem vorliegenden Zusammenhange fremdartige Funktionszeichen durch den Grenzwert einer (sehr einfachen) rationalen Funktion zu ersetzen:

$$\Theta(x) \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + nx^2} \begin{cases} = 1 & \text{für } x = 0 \\ = 0 & \text{„} \quad x \neq 0. \end{cases} \tag{16}$$[1]

---

1) Wir wollen die gelegentliche Erwähnung dieser Funktion benützen, um daran noch ein charakteristisches Beispiel für die überraschende Leistungsfähigkeit arithmetischer Ausdrücke zu knüpfen. Bedeutet a eine ganz beliebige Zahl, so hat man:

$$\Theta(x - a) \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + n(x - a)^2} \begin{cases} = 1 & (x = a) \\ = 0 & (x \neq a) \end{cases}$$

Denkt man sich die abzählbare Menge der *rationalen* Zahlen in eine Folge $a_0, a_1, \ldots, a_\nu, \ldots$ geordnet (vgl. I_1, § 25, Nr. 3, S. 152) und setzt:

$$\psi(x) = \sum_0^\infty {}_\nu \, \Theta(x - a_\nu), \tag{1}$$

so folgt:

$$\psi(a_\nu) = 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

d. h. $\psi(x) = 1$ für jedes *rationale* x Dagegen

$$\psi(x) = 0, \quad \text{falls:} \quad x \neq a_\nu$$

d. h. für jedes *irrationale* x Bezeichnet man sodann mit y_1, y_2 zwei ganz beliebige Konstanten oder auch Funktionen von x und setzt:

$$\Psi(x) = (y_1 - y_2)\psi(x) + y_2, \tag{2}$$

so wird $\Psi(x) = y_1$ für jedes *rationale* x, $\Psi(x) = y_2$ für jedes *irrationale* x. Es läßt sich also selbst eine so „phantastische“ Funktion, wie diese *Dirichlet*sche (vgl. § 4, Nr. 2, S. 28) durch einen arithmetischen Ausdruck darstellen — übrigens auch noch durch merklich anders konstruierte, z. B. mit Hilfe der im Text mit $F(x)$ bezeichneten (s Gl. (14), (15)). Ersetzt man nämlich x durch $x + 1$, so wird:

$$F(x+1) = 1 \quad \text{für} \quad x = 2\lambda$$

$$F(x+1) = 0 \quad \text{„} \quad x = 2\lambda - 1$$

und daher allgemein:

$$0 < F(x+1) < 1 \quad \text{falls:} \quad x \neq 2\lambda$$

Daraus folgt weiter:

$$\lim_{m \to \infty} (F(x+1))^m \begin{cases} = 1 & \text{für:} \quad x = 2\lambda \\ = 0 & \text{„} \quad x \neq 2\lambda. \end{cases}$$

Ist x *rational*, so wird: $n!\,x$ für hinlänglich großes n eine *ganze* und zwar sogar eine *gerade* Zahl. Für *jedes einzelne rationale* x wird also bei passender Wahl

Definiert man jetzt:

$$\Phi(x) \equiv F\left(\frac{1-\Theta(x)}{x+\Theta(x)}\right), \tag{17}$$

so wird: $\Phi(0) = F(0) = 0$, im übrigen: $\Phi(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$. Man hat nun nach Gl. (15):

$$\begin{cases} \Phi\left(\frac{1}{2\lambda-1}\right) = F(2\lambda-1) = 1 & (\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \\ \Phi\left(\frac{1}{2\lambda}\right) = F(2\lambda) = 0 & (\lambda = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots). \end{cases} \tag{18}$$

Die Funktion $\Phi(x)$ nimmt also bei unbegrenzter (links- oder rechtsseitiger) Annäherung von x an die Stelle $x = 0$ die Werte 0 und 1 und infolge der Stetigkeit auch alle Zwischenwerte *unbegrenzt oft* an Man bezeichnet dies mit dem Ausdrucke, die Funktion habe in der Umgebung von $x = 0$ *unendlich viele Maxima und Minima* oder mache daselbst *unendlich viele Oszillationen*, kürzer: sie *oszilliere*

Diese Funktion $\Phi(x)$ gibt, wie die in Fußn. 2), S. 58 und am Schlusse von Fußn. 3), S. 65 erwähnte, ein Beispiel für den in § 5, Nr. 9 (S. 43) behandelten „allgemeinen" Fall des Verhaltens einer Funktion bei der Annäherung von x an irgendeine (a. a. O. mit a bezeichnete) Stelle (hier für $a = 0$). Man hat im vorliegenden Falle:

$$\underline{\lim}_{x \to \pm 0} \Phi(x) = 0, \quad \overline{\lim}_{x \to \pm 0} \Phi(x) = 1, \tag{19}$$

die Funktion ist also für $x = 0$ *unstetig*. Da andererseits $\Phi(0) = 0$ und $\Phi(x)$ in jeder noch so kleinen Umgebung der Stelle $x = 0$, wie bereits bemerkt, *alle möglichen* Werte des Intervalls $[0, 1]$ annimmt, also vollständig *lückenlos* verläuft, so gibt diese Funktion zugleich ein weiteres Beispiel für die Richtigkeit der in § 7, Nr. 6 (S. 58) gemachten Bemerkung, daß die *Lückenlosigkeit* einer Funktion noch keineswegs deren *Stetigkeit* nach sich zu ziehen braucht.

---

von n.

$$\lim_{m \to \infty} [F(n!\,x + 1)]^m = 1, \tag{3}$$

während für jedes *irrationale* x, *wie groß* auch n sein mag:

$$\lim_{m \to \infty} [F(n!\,x + 1)]^m = 0. \tag{4}$$

Um zu erreichen, daß auch das Bestehen von Gl. (3) für *jedes beliebige rationale* x gesichert wird, braucht man nur n die Möglichkeit unbegrenzten Wachsens zu verschaffen und dies geschieht, in dem man setzt:

$$\psi(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} [F(n!\,x + 1)]^m. \tag{5}$$

Dieser neue Ausdruck für $\psi(x)$ leistet dann genau dasselbe, wie der in Gl. (1) angegebene.

Setzt man schließlich noch:

$$\varphi(x) = x \cdot \Phi(x), \tag{20}$$

so *oszilliert* auch diese Funktion in der Umgebung der Stelle $x = 0$, und zwar unbegrenzt oft zwischen den Grenzen 0 und x. Nichtsdestoweniger ist diese Funktion für $x = 0$ *stetig*, da:

$$\lim_{x \to \pm 0} \varphi(x) = 0 = \varphi(0)$$

(vgl. § 7, Nr. 6 am Schlusse und Fußn. 1, S. 59).

5. Kehren wir nach dieser Abschweifung zu dem am Schlusse von Nr. 3 ausgesprochenen Ergebnisse zurück, so zeigt sich dessen prinzipielle Bedeutung in der gewonnenen Erkenntnis, daß *Grenzwerte* von *rationalen Funktionen* einen von diesen letzteren völlig abweichenden Charakter haben können (natürlich nicht haben *müssen*) und daß sich hieraus die Notwendigkeit ergibt, den Umfang der für die Grenzwertbildung in Frage kommenden rationalen Funktionen erheblich einzuschrenken, wenn man darauf ausgeht, eine in dem oben angegebenen Sinne als *„analytisch"* zu bezeichnende Funktionsklasse aus der Menge solcher Grenzwerte auszusondern. Und da sich schon Grenzwerte von *gebrochenen* rationalen Funktionen *allereinfachster* Art für den in Aussicht genommenen Zweck als gänzlich ungeeignet erwiesen haben, so wird man zunächst festzustellen haben, ob *ganze* rationale Funktionen in dieser Hinsicht bessere Gewähr bieten. Das trifft indessen noch keineswegs zu, sofern man die allgemeinsten Möglichkeiten dieser Art in Betracht zieht.

Setzt man etwa:

$$\left\{\begin{array}{l} g_0(x) = a_0^{(0)} \\ g_1(x) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} x \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g_\nu(x) = a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} x + \cdots + a_\nu^{(\nu)} x^\nu \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right. \tag{21}$$

und sodann:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x) = g_0(x) + \sum_1^\infty (g_\nu(x) - g_{\nu-1}(x)), \tag{22}$$

so hat sich gezeigt (wie an dieser Stelle nur berichtet, nicht bewiesen werden soll), daß ein solcher *Grenzwert* bzw. die ihm gleichgeltende nach *Polynomen* fortschreitende *Reihe* bei passender Bestimmung der Koeffizienten $a_\mu^{(\nu)}$ dazu dienen kann, *jede beliebige stetige Funktion* darzustellen, z. B. wieder eine solche, die in verschiedenen Intervallen mit *verschiedenen* willkürlich vorgeschriebenen rationalen Funktionen zusammenfällt. Da hiernach die Grenzwerte ganzer rationaler Funktionen von der

Form $g_n(x) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x + \cdots + a_n^{(n)}x^n$, d. h. solcher, deren Koeffizienten als vom Index n abhängig mit diesem *variieren* können, den Charakter *„analytischer“* Funktionen *nicht* zu besitzen brauchen, so wird man dazu geführt, sich auf den Fall *konstanter* Koeffizienten zu beschränken, also schließlich Grenzwerte von folgender Form:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = \sum_0^\infty {}_\nu a_\nu x^\nu \tag{23}$$

den weiteren Betrachtungen zugrunde zu legen, d. h. *konvergierende, nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihen*, zumeist schlechthin (gewöhnliche) *Potenzreihen* genannt, denen man noch durch Einführung von $x - x_0$ (wo x_0 eine beliebige Konstante) an Stelle von x die etwas allgemeinere Form $\sum_0^\infty {}_\nu a_\nu (x - x_0)^\nu$ geben kann. Daß diese spezielle Gattung von Grenzwerten rationaler Funktionen auch wirklich geeignet ist, die Grundlage für die Definition einer als *„analytisch“* zu bezeichnenden Funktionsklasse abzugeben, wird sich später zeigen. Hier sollte zunächst nur deutlich gemacht werden, daß die getroffene Wahl keine zufällige oder willkürliche ist, sondern als eine durch das Wesen der Sache wohl begründete erscheint. Des weiteren ist aber noch auf eine prinzipielle Schwierigkeit hinzuweisen, die sich in dem vorliegenden Zusammenhange sehr bald einstellt, und zu zeigen, wie dieselbe durch Ausdehnung des Bereiches der unabhängigen und abhängigen Veränderlichen auf das *komplexe* Zahlengebiet behoben werden kann.

6. Eine Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ kann so beschaffen sein, daß sie für *jedes* endliche x *konvergiert* $\left(\text{z. B. } \sum \frac{1}{\nu!} x^\nu\right)$: sie definiert alsdann für jeden noch so großen endlichen Bereich eine eindeutige Funktion von x. Hat dagegen die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ nur ein *beschränktes* Konvergenzintervall, so entsteht die Frage, ob bzw. in welchem Sinne von einer *Fortsetzung* der zunächst nur für jenen beschränkten Bereich definierten *Funktion* die Rede sein kann. Betrachten wir z. B. die einfachste überhaupt existierende Potenzreihe, die unendliche geometrische Reihe $\sum x^\nu$. Man hat (s. I_1, § 44, Gl. (23), S. 301) für $|x| < 1$:

$$\sum_0^\infty {}_\nu x^\nu = \frac{1}{1 - x}. \tag{24}$$

Es steht also hier von vornherein fest, daß die für $|x| < 1$ in der Form $\sum_0^\infty {}_\nu x^\nu$ darstellbare, in dem angegebenen Sinne *„analytische“* (nämlich

rationale) Funktion auch für $x \geqq 1$ *existiert* (für $x = 1$ als ∞ noch „uneigentlich" definiert). Nehmen wir aber einmal an, dies sei uns nicht bekannt. Alsdann besteht die folgende Möglichkeit, eine „*analytische*" *Fortsetzung* von $\sum_0^\infty {}_\nu\, x^\nu$ herzustellen. Es sei x_0 irgendeine von 0 verschiedene Stelle im Innern des Intervalls $[-1, +1]$, also $-1 < x_0 < +1$, so hat man identisch:

$$(25)\quad \begin{cases} \sum_0^\infty {}_\nu\, x^\nu = \sum_0^\infty {}_\nu\, (x_0 + (x - x_0))^\nu \\ \qquad = \sum_0^\infty {}_\nu\, (x_0^\nu + (\nu)_1 x_0^{\nu-1}(x - x_0) + \quad + (x - x_0)^\nu). \end{cases}$$

Wird jetzt x so eingeschränkt, daß nicht allein die Reihe (25), sondern auch diejenige mit dem allgemeinen Gliede: $|x_0| + |x - x_0|$ konvergiert, was offenbar dann und nur dann der Fall ist, wenn:

$$(26)\qquad |x_0| + |x - x_0| < 1, \quad \text{also:} \quad |x - x_0| < 1 - |x_0|$$

(d. h für alle Punkte x, deren Abstand von x_0 kleiner ist, als die Strecke $\overline{|x_0|1}$, also, je nachdem $x_0 > 0$ bzw. $x_0 < 0$, für alle im Innern des Intervalls $[2x_0 - 1, 1]$ bzw $[-1, 2x_0 + 1]$ gelegenen Punkte), so hat man:

$$\sum_0^\infty {}_\nu\, (|x_0| + |x - x_0|)^\nu = \sum_0^\infty {}_\nu\, (|x_0|^\nu + (\nu)_1 |x_0|^{\nu-1} \cdot |x - x_0| + \cdots + |x - x_0|^\nu)$$

und da die rechts stehende Reihe, als aus lauter positiven Gliedern bestehend, beliebig, insbesondere nach Potenzen von $|x - x_0|$ geordnet werden darf, so gilt das letztere unter der Voraussetzung (26) nach dem sog. *Cauchy*schen Doppelreihensatze (s. I_2, § 58, Nr. 4, S. 411) auch für die Reihe auf der rechten Seite von Gl. (25). Eine einfache Rechnung (die wir an dieser Stelle übergehen, da es zweckmäßiger erscheint, sie erst späterhin[1]) unter allgemeineren Voraussetzungen im einzelnen durchzuführen) liefert alsdann das folgende Ergebnis:

$$(27)\qquad \sum_0^\infty {}_\nu\, x^\nu = \frac{1}{1 - x_0} \cdot \sum_0^\infty {}_\nu \left(\frac{x - x_0}{1 - x_0}\right)^\nu.$$

Der *Geltungs*bereich dieser Beziehung ist durch die Bedingung (26) festgelegt, dagegen der *Konvergenz*bereich der *rechts* stehenden Reihe durch die folgende:

$$(28)\qquad |x - x_0| < |1 - x_0|.$$

---

1) S. § 44, Nr. 4.

Ist nun $x_0 < 0$, also $x_0 = -|x_0|$ (liegt demnach die Stelle x_0 *links* vom Nullpunkt), so wird: $|1 - x_0| = 1 + |x_0|$, und die Konvergenzbedingung (28) nimmt daher die Form an:

$$(29) \qquad |x - x_0| < 1 + |x_0|,$$

der Konvergenzbereich umfaßt daher alle Punkte, deren Entfernung vom Punkte x_0 *kleiner* ist als $1 + |x_0|$, d. h. alle diejenigen, die im Innern des Intervalls $[-(1 + 2|x_0|), 1]$ liegen, so daß also seine *linke* Grenze um die Strecke $2|x_0|$ über die ursprüngliche Grenze (-1) *hinausragt*, während als *rechte* Grenze wieder die Stelle 1 erscheint. Die Reihe (27), deren Summe in dem engeren durch Ungl. (26) bezeichneten Bereiche mit derjenigen der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu x^\nu$ übereinstimmt, ist dann geeignet, nach *links* hin eine *„analytische" Fortsetzung* der letzteren zu liefern[1]), und wir wollen hiernach die durch die Gleichungen (25), (27) gekennzeichnete Transformation als die *Methode der analytischen Fortsetzung* bezeichnen. Diese Methode, die zur Herstellung der Reihe (27) geführt hat, läßt sich dann wieder mit entsprechendem Erfolge auf diese anwenden und in analoger Weise unbegrenzt wiederholen.

Ist dagegen $x_0 > 0$, also $x_0 = |x_0| < 1$, so hat die Konvergenzbedingung (28) dieselbe Bedeutung, wie die folgende:

$$(30) \qquad |x - x_0| < 1 - |x_0|,$$

sie stimmt also genau mit der Bedingung (26) überein, so daß in diesem Falle keinerlei Erweiterung des ursprünglichen Konvergenzbereiches erzielt wird.

Es erweist sich also als unmöglich, die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu x^\nu$ über die Stelle $x = 1$ hinaus „analytisch" fortzusetzen, was ja seine natürliche Erklärung darin findet, daß die Reihensumme für $x \to 1$ monoton nach $+\infty$ wächst.[2]) Nichtsdestoweniger steht ja im vorliegenden Falle fest,

---

1) Man kann sich durch Summation der geometrischen Progression (27) überzeugen, daß diese für den ganzen durch die Bedingung (28) bzw (29) definierten Konvergenzbereich die Summe $\frac{1}{1-x}$ liefert.

2) Nimmt man statt der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu x^\nu$ die folgende: $\sum_0^\infty{}_\nu x^{2\nu}$ (mit der Summe $\frac{1}{1-x^2}$ für $|x| < 1$), so besteht sogar an den *beiden* Grenzen $x = -1$ und $x = +1$ des Konvergenzbereiches die Unmöglichkeit einer „analytischen" Fortsetzung, wie schon daraus erschlossen werden kann, daß die Reihe an diesen *beiden* Stellen nach $+\infty$ divergiert.

daß die *analytische Funktion* $\frac{1}{1-x}$, deren Wert *links* von der Stelle $x = 1$ mit der Summe der Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu x^\nu$ und deren Fortsetzungen übereinstimmt, auch *rechts* von $x = 1$ *existiert*. Andererseits gibt es, wie leicht zu sehen, auch *rechts* von der Stelle $x = 1$ *konvergierende Potenzreihen* mit der Summe $\frac{1}{1-x}$. Man findet z. B. für $|x-2| < 1$, d. h. für $1 < x < 3$:

$$(31) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu (-1)^{\nu+1}(x-2)^\nu = -\frac{1}{1+(x-2)} = \frac{1}{1-x}.$$

Die beiden Reihen: $\sum_0^\infty{}^\nu x^\nu$ und $\sum_0^\infty{}^\nu (-1)^{\nu+1}(x-2)^\nu$ liefern also tatsächlich Darstellungen *derselben* analytischen Funktion, wir besitzen aber vorläufig keinerlei Möglichkeit, die eine durch analytische Fortsetzung in die andere überzuführen, da an der Stelle $x = 1$, wo ihre Konvergenzbereiche aneinander stoßen, die eine nach $+\infty$, die andere nach $-\infty$ divergiert. Die Erkenntnis, daß zwischen den beiden Reihen in Wahrheit ein intimer Zusammenhang besteht, beruht hier lediglich auf einer Art Glücksfall, nämlich auf dem Umstande, daß man in der Lage ist, ihre Summe durch ein und dieselbe *rationale* Funktion darzustellen.

7. Im Anschluß hieran betrachten wir nun aber zwei Reihen von der analogen Form:

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu \quad \text{und:} \quad \sum_0^\infty{}^\nu (-1)^{\nu+1} b_\nu (x-2)^\nu,$$

wo (a_ν), (b_ν) zwei Folgen *positiver* Zahlen bedeuten, von der Beschaffenheit, daß $\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{a_\nu} = \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{b_\nu} = 1$ und daß die beiden Reihen $\sum a_\nu$, $\sum b_\nu$ *divergieren*. Alsdann folgt aus dem *Cauchy*schen Fundamentalkriterium erster Art (s. I_2, § 50, Nr. 4, S. 341), daß:

$$\sum a_\nu x^\nu \quad \text{für} \quad |x| < 1, \quad \text{also für:} \quad -1 < x < +1,$$

$$\sum (-1)^{\nu+1} b_\nu (x-2)^\nu \quad \text{für} \quad |x-2| < 1, \quad \text{also für:} \quad 1 < x < 3,$$

konvergiert, während für die Stelle $x = 1$, wo die Konvergenzbereiche beider Reihen aneinanderstoßen, wieder *Divergenz* nach $+\infty$ bzw. $-\infty$ stattfindet. Dabei *kann* immerhin, wie der zuvor betrachtete *Spezialfall* $a_\nu = b_\nu = 1$ zeigt, ein „analytischer" Zusammenhang zwischen den beiden Reihen stattfinden: die Divergenzstelle $x = 1$ bietet aber für die Herstellung eines solchen Zusammenhanges ein mit den verfügbaren Hilfsmitteln nicht zu beseitigendes Hindernis. Eine Möglichkeit, dasselbe aus-

zuschalten, würde sich ergeben, wenn man der Veränderlichen x die Freiheit verschaffte, jene kritische Stelle $x = 1$ zu *umgehen.* Dies gelingt, wenn man von der Tatsache Gebrauch macht, daß in beliebiger Nähe der Zahl 1 außer den *reellen* auch unendlich viele *komplexe* Zahlen liegen. Setzt man hieran anknüpfend $x = \xi + \eta i$, d. h. dehnt man den Bereich der Veränderlichen x auf das *komplexe* Zahlengebiet aus, so lassen sich zwischen zwei Stellen $x = 1 - \delta$ und $x = 1 + \delta$ mit Hilfe der *beiden reellen Veränderlichen* ξ und η (unendlich viele) *stetige Wege* herstellen, welche die Stelle $x = 1$ nicht berühren. Damit ist zunächst jedenfalls die *Möglichkeit* gegeben, einen etwaigen Zusammenhang zweier Reihen von der Art der zuletzt betrachteten vermittelst der Methode der analytischen Fortsetzung herzustellen. Es wird sich im Laufe unserer weiteren Betrachtungen zeigen, daß die angedeutete Ausdehnung des Bereiches der Veränderlichen wirklich auch ausreicht, um nach dem Vorgange von *Weierstraß* und *Méray* auf dem Prinzip der analytischen Fortsetzung eine befriedigende Theorie der *„analytischen" Funktionen* aufzubauen.

Kapitel II

Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

§ 14. Geometrische Darstellung der komplexen Zahlen und der vier Spezies in komplexen Zahlen.

1. Da jedem *reellen Zahlenpaare* (ξ, η) eine und nur eine *komplexe* Zahl $x = \xi + \eta i$ entspricht[1]), andererseits mit Hilfe eines rechtwinkligen Koordinatensystems eine *umkehrbar eindeutige* Korrespondenz zwischen allen möglichen *Zahlenpaaren* (ξ, η) und den *Punkten* einer Ebene hergestellt werden kann (s. § 4, Nr. 3, S. 29), so ist damit zugleich die nämliche Art gegenseitigen Entsprechens auch für die *Punkte* einer Ebene und die *komplexen* Zahlen gegeben.

Der komplexen *Zahl* $x = \xi + \eta i$ wird als deren *Abbild* derjenige *Punkt* („Bildpunkt") x zugeordnet, welcher die *Koordinaten* ξ, η hat, und

---

1) Wir bezeichnen von jetzt ab Zahlen, die ausdrücklich als *reell* charakterisiert werden sollen, mit *griechischen* Buchstaben, während *lateinische* im allgemeinen *komplexe* Zahlen vorstellen sollen (die sich selbstverständlich unter Umständen auch auf *reelle* reduzieren können). Nur für den *absoluten Betrag* einer *komplexen* Zahl werden wir häufig die typisch gewordene Bezeichnung r oder R (= Radius Vektor) benützen, außerdem für *natürliche* (zumeist als *Indizes* oder *Exponenten* auftretende) Zahlen gewisse besonders dafür üblich gewordene *lateinische* Buchstaben, wie m, n, p usw. (vgl. I_2, § 72, Nr. 1, S 551).

umgekehrt entspricht dem *Punkte* x mit den *Koordinaten* ξ, η die *komplexe Zahl* $x = \xi + \eta i$. Auf Grund dieses Zusammenhanges werden die *reellen Komponenten* einer *komplexen* Zahl auch schlechthin als deren *Koordinaten*, der *reelle* Teil als *Abszisse*, der vom Faktor i befreite *imaginäre* als *Ordinate* bezeichnet und die Ausdrücke *komplexe Zahl* und *Punkt* (sc. *in der Ebene*, genauer gesagt: *Koordinatenebene*) als *äquivalent* von uns gebraucht.

Den *reellen* Zahlen entsprechen als Abbilder die Punkte der *Abszissenachse* („reellen" Achse), den *rein imaginären* diejenigen der *Ordinatenachse* („imaginären" Achse). Zwei *konjugierten* Zahlen, $\xi + \eta i$ und $\xi - \eta i$, entsprechen Punkte, die *symmetrisch* zur Abszissenachse liegen, zwei *entgegengesetzten*, $\xi + \eta i$ und $-\xi - \eta i$, solche Punkte, die auf derselben durch den *Nullpunkt* gehenden Geraden zu jenem *symmetrisch* liegen.

Der *absolute Betrag* der Zahl $x = \xi + \eta i$, also $|x| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ (die Quadratwurzel in diesem Zusammenhange ein für allemal *positiv* verstanden), ist gleich dem *Abstande* des Punktes x vom Nullpunkte, also der *Strecke* $\overline{Ox}$ (dem „*Radius Vektor*").

Die *komplexen Zahlen* gewinnen auf diese Weise in demselben Sinne eine „*reale*" (nämlich geometrisch anschauliche) Bedeutung[1]), wie die *reellen*: jede zwischen *komplexen Zahlen* bestehende *Beziehung* kann sofort in eine Beziehung zwischen *Punkten* übersetzt werden *und umgekehrt*. Können hiernach geometrische Wahrheiten aus Beziehungen zwischen komplexen Zahlen entnommen werden, so erweist sich andererseits (und das ist für uns der eigentlich leitende Gesichtspunkt!) die in dem vorliegenden Zusammenhange ermöglichte Heranziehung der geometrischen Anschauung und einer zum Teil daran anknüpfenden Ausdrucksweise als ein äußerst förderliches Hilfsmittel für die Herleitung und Darstellung funktionentheoretischer Erkenntnisse. Hierzu erscheint es zunächst erforderlich, die Ergebnisse der vier Spezies in komplexen Zahlen geometrisch darzustellen

2. *Addition.* Es sei:

$$a = \alpha + \beta i, \quad a' = \alpha' + \beta' i \tag{1}$$

und sodann:

$$c = a + a' = (\alpha + \alpha') + (\beta + \beta')i, \tag{2}$$

so ergibt sich, wie die in Fig. 11 vorgenommene Konstruktion unmittelbar erkennen läßt, der *Punkt* c als *vierter Eckpunkt* desjenigen *Parallelogramms*, das durch die Strecken $\overline{Oa}$ und $\overline{Oa'}$ als anliegende *Seiten* be-

1) Vgl. hierzu (insbesondere über das unzutreffende der Bezeichnung „imaginäre" Zahlen) I_2, § 70, Nr. 1, S. 532/3.

stimmt ist. Man überzeugt sich leicht, daß dieses Ergebnis von der in obiger Figur getroffenen Wahl, daß nämlich beide Punkte a, a' in *demselben*, und zwar im *ersten* Quadranten liegen, durchaus unabhängig ist.

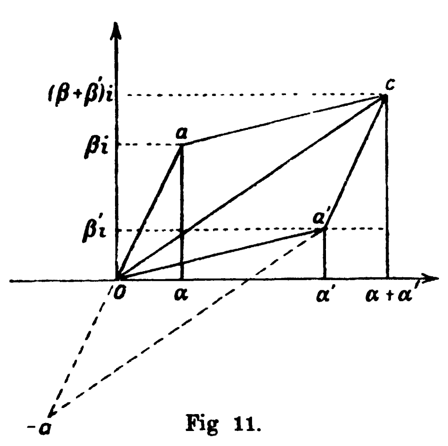


Fig 11.

Da der *absolute Betrag* von c also von $a + a'$ durch die Strecke $\overline{Oc}$ dargestellt wird, andererseits *der absolute Betrag der Summe zweier* komplexer Zahlen, abgesehen von einem sogleich zu erwähnenden Grenzfall, *stets kleiner ist, als die Summe der absoluten Beträge* $|a| + |a'|$[1]), so daß also:

$$\overline{Oc} < \overline{Oa} + \overline{Oa'} = \overline{Oa} + \overline{ac},$$

so ergibt sich auf diese Weise als erstes Beispiel für die oben gemachte Bemerkung betreffs der Möglichkeit, geometrische Sätze aus Beziehungen zwischen komplexen Zahlen herzuleiten, ein Beweis für den bekannten elementaren Satz, daß *in jedem Dreieck jede Seite kleiner ist als die Summe der beiden anderen.*

Der zunächst ausgeschlossene Grenzfall $|a + a'| = |a| + |a'|$ (anders geschrieben: $\overline{Oa} + \overline{ac} = \overline{Oc}$) tritt nur ein, wenn a' auf demselben durch O gehenden *Halbstrahl* liegt, wie a, also das *Parallelogramm*, bzw. jedes seiner beiden *Teildreiecke* sich in eine *Gerade* zusammenzieht.

Da eine der beiden Strecken $\overline{a'c}$, $\overline{ac}$ für die Konstruktion des Punktes c überflüssig ist, so läßt sich diese in der Weise vereinfachen, daß man die Strecke $\overline{ac}$ *gleich* und *parallel* mit $\overline{Oa'}$ an $\overline{Oa}$ bzw. $\overline{a'c}$ *gleich* und *parallel* mit $\overline{Oa}$ an $\overline{Oa'}$ ansetzt. Und da sich dieses Verfahren beim Hinzutreten eines weiteren Summanden a'' entsprechend wiederholen läßt, so ist damit zugleich der einfachste Weg zur Konstruktion der *Summe beliebig vieler Summanden* gegeben.

3. *Subtraktion.* Da aus Gl. (2) folgt:

$$(3) \qquad a' = c - a \quad (\text{bzw.} \quad a = c - a'),$$

so ist mit der in Fig. 11 dargestellten Konstruktion zugleich diejenige für die *Differenz* zweier komplexen Zahlen gegeben. Es erscheint dabei der Punkt a', welcher die *Differenz* $c - a$ vorstellt, wiederum als *vierter Eckpunkt* eines gewissen *Parallelogramms*, nämlich desjenigen, welches bestimmt wird durch $\overline{Oc}$ (also die den *Minuendus* c mit dem Nullpunkt

1) Vgl. I_3, § 72, Nr. 2 (S. 553).

verbindende Strecke) als *Diagonale* und durch $\overline{Oa}$ (die *Subtrahendus-Strecke*) als eine der beiden *Seiten*.

Man kann aber auch mit Hilfe der Beziehung $c - a = c + (-a)$ die fragliche Konstruktion nach dem in Nr. 2 gelehrten Verfahren als diejenige für die *Summe* von c und $(-a)$ ausführen Da der Punkt $(-a)$, entsprechend einer bereits in Nr. 1 gemachten Bemerkung, auf der rückwärtigen Verlängerung von $\overline{Oa}$ im Abstande $\overline{Oa}$ vom Nullpunkt liegt, so erscheint hier der Punkt $a' = c - a$ auf Grund der in Fig. 11 durch die gestrichelten Linien dargestellten Konstruktion.

An die Konstruktion der *Differenz* zweier komplexen Zahlen knüpft sich die folgende wegen ihrer häufigen Anwendung nützliche und wichtige Bemerkung.

Aus:

$$c - a = a'$$

folgt zunächst, daß:

$$|c - a| = |a'| = \overline{Oa'}.$$

Da andererseits:

$$\overline{Oa'} = \overline{ac},$$

so ergibt sich:

(4) $\quad |c - a| = \overline{ac}$ (selbstverständlich auch: $|a - c| = \overline{ac}$),

d. h. *der absolute Betrag der Differenz zweier komplexer Zahlen ist gleich dem Abstande der betreffenden Punkte.*

4. ***Multiplikation.*** Jede von Null verschiedene komplexe Zahl $a = \alpha + \beta i$ läßt sich in die Form setzen:

(5)
$$a = |a| \cdot \mathfrak{e},$$

wo $\mathfrak{e}$ eine eindeutig bestimmte Zahl mit dem Absolutwerte 1, den „*Einheitsfaktor*“ von a bedeutet.[1]) Setzt man: $\mathfrak{e} = \delta + \gamma i$, so folgt:

$$\alpha = |a| \cdot \delta, \quad \beta = |a| \cdot \gamma,$$

d. h der Punkt a liegt auf demselben *Halbstrahl*, wie der Punkt $\mathfrak{e}$. Aus diesem Grunde wird die Zahl $\mathfrak{e}$ auch als *Richtungskoeffizient* von a bezeichnet.

Es werde nun unter der Voraussetzung $|a| > 0$, $|a'| > 0$ gesetzt:

(6)
$$c = a \cdot a' = (|a| \cdot \mathfrak{e}) \cdot (|a'| \cdot \mathfrak{e}'),$$

so folgt zunächst:

(7)
$$|c| = |a| \cdot |a'|.$$

Da die Definition jeder Multiplikation auf der Anfangsgleichung:

$$|c| \cdot 1 = |c|$$

1) Vgl. I_3, § 72, Nr. 1, S. 552

beruht[1]), so muß naturgemäß bei der *Konstruktion* eines *Produkts* der *Einheitspunkt* bzw. die der betreffenden geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen zugrunde liegende Wahl der *Einheitsstrecke* eine wesentliche Rolle spielen. Aus:

$$|c| \cdot 1 = |a| \cdot |a'|$$

findet man:

(7a) $|c| : |a'| = |a| : 1$, anders geschrieben: $\overline{Oc} : \overline{Oa'} = \overline{Oa} : \overline{O1}$.

Setzt man noch:

$$c = |c| \cdot \mathfrak{e}'', \tag{8}$$

so folgt aus Gl. (6):

$$|c| \cdot \mathfrak{e}'' = |a| \cdot |a'| \cdot \mathfrak{e}\mathfrak{e}' = |c| \cdot \mathfrak{e}\mathfrak{e}'$$

und daher:

$$\mathfrak{e}'' = \mathfrak{e}\mathfrak{e}'. \tag{9}$$

Es mögen nun $\overline{O\mathfrak{e}}$, $\overline{O\mathfrak{e}'}$ mit der positiven Abszissenachse die Winkel ϑ, ϑ' bilden und es sei, um eine Festsetzung zu treffen, $\vartheta' \gtreqless \vartheta$. Subtrahiert man $\mathfrak{e}'$ von den beiden Seiten der Gleichung (9), so wird:

$$\mathfrak{e}'' - \mathfrak{e}' = \mathfrak{e}'(\mathfrak{e} - 1)$$

und daher:

$$|\mathfrak{e}'' - \mathfrak{e}'| = |\mathfrak{e} - 1|, \quad \text{anders geschrieben:} \quad \overline{\mathfrak{e}''\mathfrak{e}'} = \overline{\mathfrak{e}1}.$$

Die gleichschenkligen Dreiecke $\overline{\mathfrak{e}''O\mathfrak{e}'}$ und $\overline{\mathfrak{e}O1}$ sind daher *kongruent* und somit die Winkel bei O einander *gleich*, d. h. man hat: $\sphericalangle\, \mathfrak{e}''O\mathfrak{e}' = \vartheta$. Der Halbstrahl, auf welchem $\mathfrak{e}''$ liegt, bildet also mit der positiven Abszissenachse entweder den Winkel $\vartheta' + \vartheta$ oder den Winkel $\vartheta' - \vartheta$. Um zu entscheiden, welcher dieser beiden Werte der richtige ist, beachte man, daß es infolge der Kommutativität des Produkts $\mathfrak{e}\mathfrak{e}'$ freisteht, ϑ und ϑ' zu vertauschen. Danach muß der Halbstrahl, auf welchem der eindeutig bestimmte Punkt $\mathfrak{e}''$ liegt, einen der Winkel $\vartheta + \vartheta'$ oder $\vartheta - \vartheta'$ mit der positiven Abszissenachse bilden. In dem allgemeinen Falle $\vartheta' \neq \vartheta$ sind aber $\vartheta' - \vartheta$ und $\vartheta - \vartheta'$ verschieden, es bleibt also für den Winkel, welchen $\overline{O\mathfrak{e}''}$ mit der positiven Abszissenachse bildet, nur die Wahl $\vartheta + \vartheta'$. Dies gilt auch in dem Sonderfalle $\vartheta' = \vartheta$, in welchem

$$\vartheta' - \vartheta = \vartheta - \vartheta' = 0$$

ist: dann würde nämlich $\mathfrak{e}'' = \mathfrak{e}\mathfrak{e}'$ auf der *positiv reellen* Achse liegen, was unmöglich ist, da (wegen $\vartheta' = \vartheta$) $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{e}$ *nicht konjugiert* sind.

Aus Gl. (6) folgt schließlich:

$$c = (|a| \cdot |a'|) \cdot (\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{e}'), \tag{6a}$$

d. h. der Punkt $c = a\,a'$ besitzt den Richtungskoeffizienten $\mathfrak{e}\mathfrak{e}'$, liegt also

1) Vgl. I_1, § 4, Nr 1, Gl (A), S. 24.

auf dem Halbstrahle, welcher den Winkel $\vartheta + \vartheta'$ mit der positiven Abszissenachse bildet, und zwar so, daß die Strecke $\overline{Oc}$ sich gemäß der Proportion (7a) bestimmt. Die beiden Dreiecke $\overline{1\,Oa}$ und $\overline{a'Oc}$ sind also *ähnlich*[1]), und zwar *gleichstimmig* ähnlich (s. Fig. 12), d. h sie können durch bloße Verschiebung in der Koordinatenebene (nämlich durch *Drehung* um den Punkt O), insoweit zur Deckung gebracht werden, daß beim Aufeinanderfallen der Schenkel des mit ϑ bezeichneten Winkels die gegenüberliegenden Seiten *parallel* werden.

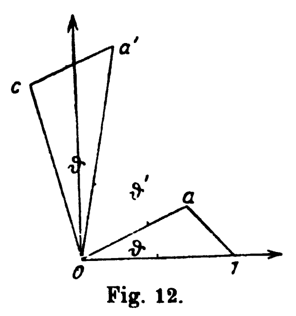


Fig. 12.

5 *Division.* Die Konstruktion des *Quotienten* zweier komplexer Zahlen kann ganz analog, wie zuvor die Konstruktion der Differenz aus derjenigen der Summe hergeleitet wurde, unmittelbar der vorstehenden Konstruktion eines *Produkts* entnommen werden. Bringt man Gl. (6) auf die Form:

$$a' = \frac{c}{a}$$

und setzt: $\sphericalangle\, c O 1 \equiv \vartheta + \vartheta' = \vartheta''$, also: $\vartheta' = \vartheta'' - \vartheta$, so folgt, daß der Punkt a' auf demjenigen Halbstrahl liegt, der mit der positiven Abszissenachse den Winkel $\vartheta'' - \vartheta$ bildet, und zwar so, daß die Strecke $\overline{Oa'}$ sich gemäß der Proportion $\overline{Oa'} : \overline{Oc} = \overline{O1} : \overline{Oa}$ bestimmt

Hieraus folgt speziell für $c = 1$, also $\vartheta'' = 0$, daß der Punkt $a' = \frac{1}{a}$. auf demjenigen Halbstrahle liegt, der mit der positiven Abszissenachse den Winkel $(-\vartheta)$ bildet, und zwar so, daß die Strecke $\overline{Oa'}$ sich gemäß der Proportion $\overline{Oa} : \overline{O1} = \overline{O1} : \overline{Oa'}$ bestimmt

§ 15. Komplexe Veränderliche $x = \xi + \eta i$. — Die Stelle $x = \infty$. — Definition und allgemeine Eigenschaften von Funktionen $f(x)$ einer komplexen Veränderlichen. — Zurückführung auf komplexe Funktionen zweier reellen Veränderlichen ξ, η. — Bemerkenswerte Darstellbarkeit jedes arithmetischen Ausdrucks $\Phi(\xi, \eta)$ durch einen solchen von der Form $f(x)$. — Aussonderung einer besonderen Klasse „analytischer" $f(x)$ aus der Menge der $\Phi(\xi, \eta)$ auf Grund zweier gänzlich verschiedenen Methoden („Méray-Weierstraß" und „Cauchy-Riemann").

1. Unter einer *komplexen Veränderlichen* verstehen wir ein *Zeichen*, z. B. $x \equiv \xi + \eta i$, welches dazu bestimmt ist, *jedes beliebige Element einer vorgeschriebenen Menge komplexer Zahlen* bzw. *einer* (auf Grund von Nr. 1

1) Sie werden geradezu *kongruent*, wenn $\overline{Oa'} = |a'| = 1$.

des vorigen Paragraphen) *damit äquivalenten ebenen Punktmenge* vorzustellen [1]) Die betreffende *Zahlen-* bzw. *Punktmenge* bezeichnen wir als den *Bereich* der Veränderlichen, jedes einzelne Element als einen der *Werte,* deren die Veränderliche fähig ist bzw. als eine *Stelle* oder einen *Punkt* ihres Bereichs. Da eine Punktmenge $\{x\}$, wo $x = \xi + \eta i$, identisch ist mit derjenigen, welche nach § 8, Nr 1 (S. 60) mit $\{\xi, \eta\}$ zu bezeichnen wäre, so gelten für solche Punktmengen ohne weiteres die dort gegebenen Definitionen und daran geknüpften Aussagen. Dabei gestattet das jetzt zur Verfügung stehende Zeichen $|x|$ für $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ gegebenenfalls eine entsprechende Abkürzung der Schreibweise. So läßt sich jetzt eine *Menge komplexer Zahlen* x als *beschränkt* durch eine Ungleichung von der Form charakterisieren:

$$(1) \qquad |x| < r,$$

und analog die *Umgebung* einer Stelle a durch:

$$|x - a| < \varrho \quad (\text{bzw.} \leqq \varrho),$$

eine Bedingung, welche auf Grund des Schlußsatzes von Nr. 3 des vorigen Paragraphen in der Tat die Gesamtheit aller Punkte x darstellt, deren Abstand von a *kleiner* (bzw. *nicht größer*) als ϱ ist, die also *innerhalb* (bzw. *nicht außerhalb*) eines Kreises um a mit dem Radius ϱ liegen

2. Jede *beschränkte unendliche Menge komplexer Zahlen* besitzt als äquivalent mit einer beschränkten ebenen Punktmenge nach § 8, Nr. 2 (S. 61) mindestens eine *Häufungszahl* (eine *Häufungsstelle,* einen *Häufungspunkt*).

Wir wollen jetzt eine neue Festsetzung treffen, welche es ermöglicht, diese Aussage auch auf jede *unbeschränkte* Menge komplexer Zahlen auszudehnen [2]) (welche ja im *Endlichen* gelegene *Häufungsstellen* besitzen *kann,* aber nicht *muß*). Wir ordnen einer *unbeschränkten* komplexen Menge $\{x\}$, die also zu jedem noch so großen $R > 0$ Zahlen x mit dem absoluten Betrage $|x| > R$ enthalten muß, von der wir vorläufig annehmen wollen, daß sie die Stelle $x = 0$ *nicht* enthält, diejenige Menge $\{x'\}$ zu, deren Elemente durch die Beziehung $x' = \frac{1}{x}$ definiert sind Jedem x entspricht dann ein und nur ein bestimmtes x', insbesondere entsprechen denjenigen x mit *hinlänglich großem* $|x|$ solche x', welche *in beliebiger Nähe der Stelle* $x' = 0$ liegen, also diese letztere zur *Häufungsstelle* haben Und wenn insbesondere die Menge $\{x\}$ *alle* durch eine Bezie-

---

1) Vgl. die vollkommene Analogie mit der Definition einer reellen Veränderlichen: § 4, Nr. 1 (S. 26).

2) In etwas anderer Weise, wie dies früher für unbeschrankte Mengen *reeller* Zahlen (*lineare* Punktmengen) ausgeführt wurde· vgl. § 1, Nr 5 (S. 7).

hung von der Form $|x| > R$ definierten Stellen enthält, so entspricht diesen die *gesamte Umgebung* $|x'| < \frac{1}{R}$ mit einziger Ausnahme der Stelle $x' = 0$. Um diese Ausnahmestellung von $x' = 0$ zu beseitigen, fügen wir zur Menge $\{x\}$ eine *„uneigentliche Zahl"*, die *„Stelle"* oder den *„Punkt"* $x = \infty$ (ohne Vorzeichen) als korrespondierend mit $x' = 0$ und betrachten diese in jedem der genannten Fälle als („im Unendlichen gelegene") *Häufungsstelle* der Menge $\{x\}$.[1]) Als *Umgebung* dieser Stelle $x = \infty$ gilt dann die Menge aller Zahlen x, welche den Zahlen x einer *Umgebung* von $x' = 0$, etwa $|x'| < \varrho$, entsprechen, d. h. schließlich *alle* Zahlen x, welche der Bedingung $|x| > \frac{1}{\varrho}$ genügen. Im Anschluß an diese Ausdrucksweise sagen wir, der Bereich $|x| > R$ (bzw. $|x| \geqq R$) enthalte die Stelle $x = \infty$ *im Innern*, der Bereich $\Re(x) > 0$ (bzw. $\Re(x) \geqq 0$) also die rechte Halbebene mit Ausschluß bzw. Einschluß der imaginären Achse enthalte die Stelle $x = \infty$ *auf der Begrenzung* (als *Randpunkt*).

Hätte die Menge $\{x\}$ die Stelle $x = 0$ enthalten, so wäre dieser nunmehr die Stelle $x' = \infty$ zuzuordnen

3. In vollkommener Analogie mit der Definition des Funktionsbegriffes für eine *reelle* Veränderliche (s § 4, Nr. 2, S. 26) verstehen wir unter einer *eindeutigen* oder *einwertigen Funktion der komplexen Veränderlichen* x eine *zweite komplexe Veränderliche* y von der Beschaffenheit, daß jedem x eines gewissen Bereiches $\{x\}$, des *„Definitionsbereiches"* der Funktion, eine eindeutig bestimmte Zahl y zugeordnet ist — in Zeichen etwa wieder:

$$(3) \qquad y = f(x) \quad \text{(oder ähnlich).}$$

Gehören zu jedem x *mehrere* (d. h. zwei bis unendlich viele) y, so heißt y eine *mehrdeutige* Funktion von x

Im folgenden soll unter $f(x)$, um die Ausdrucksweise nicht unnötig zu komplizieren, stets eine für den in Frage kommenden Bereich *eindeutig* definierte Funktion bedeuten, da die Übertragung auf mehrdeutige Funktionen gegebenen Falles keine besonderen Schwierigkeiten macht.

Auch die Definitionen des *Grenzwertes* und der *Stetigkeit* einer Funktion $f(x)$ bei *komplexem* x lassen sich den entsprechenden Definitionen für den Fall eines *reellen* x nachbilden.

Es sei $f(x)$ (eindeutig) definiert für einen komplexen Bereich $\mathfrak{B}$, den wir jetzt ausdrücklich als ein *Gebiet (zweidimensionales Kontinuum)*[2]) annehmen wollen, a eine Stelle dieses Bereiches, so sagen wir (analog mit

---

1) Vgl. I_3, § 73, Nr. 3 (S. 561)
2) S § 5, Nr. 4, VI (S. 65).

§ 5, Nr. 5, S. 39) $f(x)$ *habe für* $x \to a$ den *Grenzwert* b, *in Zeichen:*

(4) $$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ *ein* $\varrho > 0$ *existiert, derart, daß:*

(4a) $$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad 0 < |x - a| < \varrho,$$

soweit diese Umgebung $|x - a| < \varrho$ *dem Bereiche* $\mathfrak{B}$ *angehört* (nämlich bei hinlänglicher Verkleinerung von ϱ *vollständig*, wenn a ein *Innenpunkt*, nur *teilweise*, wenn a ein *Randpunkt* von $\mathfrak{B}$ ist).

Durch diese Festsetzung wird wiederum der Wert von $f(x)$ für die Stelle $x = a$ in keiner Weise präjudiziert. Ist aber $f(a)$ *eine bestimmte Zahl und besteht außerdem die Beziehung:*

(5) $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

so heißt $f(x)$ *stetig an der Stelle a oder für* $x = a$ (vgl. § 6, Nr. 1, Gl. (I), (II), S. 46). Dabei läßt sich die Definitionsgleichung (5) auf Grund von (4) und (4a) auch durch die folgenden Ungleichungen ersetzen (vgl. a. a. O. Ungl. (IIa)):

(5a) $$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad |x - a| < \varrho$$ [1]

(wiederum nur, soweit die Umgebung $|x - a| < \varrho$ dem Bereiche $\mathfrak{B}$ angehört).

Die als Vervollständigung von Gl. (4) (nämlich für $b = \infty$) anzusehende Beziehung:

(6) $$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad (\textit{ohne Vorzeichen})$$

definieren wir als gleichbedeutend mit der folgenden[2]):

(6a) $$\lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty,$$

und diese besagt schließlich, daß zu jedem *noch so großen positiven* B ein $\varrho > 0$ gehört, derart, daß:

(6b) $$|f(x)| > B \quad \text{für:} \quad 0 < |x - a| < \varrho.$$

Eine zweite Vervollständigung von Gl. (4) (nämlich für $a = \infty$) bildet die Beziehung:

(7) $$\lim_{x \to \infty} f(x) = b,$$

welche wir durch die folgende *definieren:*

(7a) $$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = b,$$

---

1) Beispiel $f(x) = x^n$, wo n eine natürliche Zahl. Der Beweis verläuft *buchstäblich genau*, wie für reelles x und a: vgl. § 6, Nr. 2, Beispiel 1, (S. 48).

2) Vgl I_3, § 73, Nr. 3, Gl (13), (14), S. 561/2.

und diese letztere besagt: zu jedem $\varepsilon > 0$ hat man bei *hinlänglich großem* $A > 0$:

(7b). $$|f(x) - f(b)| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad |x| > A.$$

Im übrigen unterscheiden wir ausdrücklich zwischen

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \quad \text{und} \quad f(\infty)$$

(geradeso wie zwischen $\lim_{x \to a} f(x)$ und $f(a)$). Wir definieren nämlich das *Zeichen* $f(\infty)$, also den *Wert* von $f(x)$ an der *Stelle* $x = \infty$ analog wie diese letztere (s. Nr. 2) durch die Beziehung:

(8) $$f(\infty) = \left(f\left(\frac{1}{x'}\right)\right)_{x'=0}$$ [1]

d. h. sofern das rechtsstehende Zeichen einen bestimmten Sinn besitzt, andernfalls ist $f(\infty)$ *überhaupt nicht definiert*. In diesem Falle pflegt man (nach Analogie von § 5, Nr. 4 am Ende, S. 38 und § 6, Nr. 2, Beispiele 5), S. 49), $f(\infty)$ als *„uneigentlich definiert"* anzusehen durch die Beziehung:

(8a) $$f(\infty) = \lim_{x \to \infty} f(x),$$

sofern dieser Grenzwert existiert.

Liefern die Ausdrücke $\lim_{x \to \infty} f(x)$ und $f(\infty)$ *dieselbe bestimmte Zahl*, so gilt $f(x)$ als *stetig* an der *Stelle* $x = \infty$.[2] Doch können $\lim_{x \to \infty} f(x)$ und $f(\infty)$ auch *verschieden* ausfallen.[3]

---

1) Das ist natürlich nicht so zu verstehen, daß das Zeichen $f\left(\frac{1}{x'}\right)$ ohne weiteres durch $f\left(\frac{1}{0}\right)$ zu ersetzen sei, da *dieses* Zeichen *sinnlos* ist. Vielmehr wird dabei angenommen, daß $f\left(\frac{1}{x'}\right)$ zunächst für $x' \neq 0$ auf eine Form $\varphi(x')$ gebracht werden kann, für welche $\varphi(0)$ einen *eindeutig bestimmten Sinn* hat (vgl. die Beispiele in Fußn. 2), 3)).

2) Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x^n}$ $(n > 0)$, also: $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$

$$\left(\text{wegen: } \lim_{x \to \infty} \left|\frac{1}{x^n}\right| = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{|x|^n} = 0\right).$$

Andererseits:

$$f\left(\frac{1}{x'}\right) = x'^n, \quad f\left(\frac{1}{x'}\right)_{x'=0} = 0,$$

also auch:

$$f(\infty) = 0$$

3) Beispiel: Es sei:

$$f_n(x) = \frac{nx}{n + x^2} = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{n}}$$

und:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x),$$

Im Anschluß an die vorstehende Definition erscheint es angemessen, auch zwischen der durch Gl. (6), (6a) bzw. Ungl. (6b) definierten Beziehung $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ und der folgenden:

$$(9) \qquad f(a) = \infty$$

eine Unterscheidung zu treffen, indem wir die letztere als gleichbedeutend mit der folgenden definieren:

$$(9a) \qquad \frac{1}{f(a)} = 0.$$ [1]

Sollte $f(a)$ *nicht definiert* sein, so pflegt man wiederum die Beziehung:

$$(9a) \qquad f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

als „*uneigentliche Definition*" gelten zu lassen.

4. Setzt man wieder: $x = \xi + \eta i$, so wird $f(\xi + \eta i)$ für jedes dem Definitionsbereich angehörige Wertepaar (ξ, η) einen gewissen *reellen* und *imaginären* Teil besitzen, deren erster eine *reelle* Funktion $\varphi(\xi, \eta)$, deren zweiter eine mit i multiplizierte ebensolche Funktion $\psi(\xi, \eta)$ ist, so daß also:

$$(10) \qquad f(\xi + \eta i) = \varphi(\xi, \eta) + i \cdot \psi(\xi, \eta)$$

---

also:

$$f(x) = x \quad \text{für jedes } x$$

und somit:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Dagegen:

$$f_n(\infty) = f_n\left(\frac{1}{x'}\right)_{x'=0} = \left(\frac{n x'}{n x'^2 + 1}\right)_{x'=0} = 0,$$

also auch:

$$f(\infty) = \lim_{n \to \infty} f_n(\infty) = 0.$$

1) Beispiele: $f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}$ $(n > 0)$, also:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

auch:

$$f(a) = \infty \quad \text{wegen:} \quad \frac{1}{f(a)} = 0.$$

Dagegen:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x),$$

wo: $f_n(x) = \frac{n(x-a)}{n(x-a)^2 + 1}$, also für $x \neq a$:

$$f(x) = \frac{1}{x-a}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Andererseits:

$$f_n(a) = 0,$$

also auch:

$$f(a) = \lim_{n \to \infty} f_n(a) = 0$$

Hiernach ist also $f(\xi + \eta i)$ schließlich nichts anderes, als eine (im allgemeinen[1])) *komplexe* Funktion der beiden *reellen* Veränderlichen ξ und η. Ja, es steht sogar frei, *jede beliebige* (sogar auch jede *reelle*) Funktion $\Phi(\xi, \eta)$ als Funktion der *komplexen* Veränderlichen $\xi + \eta i$ zu bezeichnen. Denn zu jedem $\xi + \eta i$ gehört ein und nur ein bestimmtes Wertepaar (ξ, η), zu diesem ein bestimmter Wert $\Phi(\xi, \eta)$, somit läßt die am Anfang von Nr. 3 gegebene Definition nicht den geringsten Zweifel, daß jedes (reelle oder komplexe) $\Phi(\xi, \eta)$ unter den Begriff einer Funktion $f(\xi + \eta i)$ fällt. Somit würden also schließlich die beiden Begriffe: (reelle oder komplexe) *Funktion der beiden reellen Veränderlichen* ξ, η und *Funktion der komplexen Veränderlichen* $\xi + \eta i$ genau denselben Umfang haben, sich vollständig decken, und der letztere wäre eigentlich überflüssig. Da dies doch sicherlich nicht der Zweck seiner Einführung gewesen sein kann, vielmehr dabei die Absicht vorlag, aus der Menge der Funktionen $\Phi(\xi, \eta)$ eine besondere Klasse herauszuheben, welche infolge eines noch genauer zu charakterisierenden *intimeren* Zusammenhanges mit der Verbindung $\xi + \eta i$ irgendwelche ausgezeichnete Eigenschaften besitzt, so ergibt sich daraus die Notwendigkeit, die ursprünglich gegebene Definition einer Funktion $f(\xi + \eta i)$ durch geeignete *Einschränkungen* für die Erreichung jenes Zieles brauchbar zu machen. Von der zweckmäßigen Wahl dieser Einschränkungen wird weiter unten die Rede sein (s. Nr. 7). Hier sollen zunächst noch gewisse Folgerungen abgeleitet werden, welche auch *ohne* jede Einschränkung der fraglichen Definition aus der Erkenntnis entspringen, daß *jede* Funktion $f(\xi + \eta i)$ nach dem Schema von Gl. (10) als komplexe Funktion der beiden *reellen* Veränderlichen ξ, η aufgefaßt werden kann.

5. Wir zeigen zunächst, *daß die Stetigkeit von* $f(x) \equiv f(\xi + \eta i)$ *vollständig mit derjenigen ihrer beiden Bestandteile* (s. Gl. (10)) $\varphi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$ *zusammenfällt.*

Ist $f(x)$ an der Stelle $a = \alpha + \beta i$ *stetig*, so hat man nach Gl. (5):

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

also mit Berücksichtigung von Gl. (10):

$$\lim_{\xi \to \alpha,\ \eta \to \beta} \{\varphi(\xi, \eta) + i \cdot \psi(\xi, \eta)\} = \varphi(\alpha, \beta) + i \cdot \psi(\alpha, \beta).$$

Da andererseits[2]):

$$\lim_{\xi \to \alpha,\ \eta \to \beta} \{\varphi(\xi, \eta) + i \cdot \psi(\xi, \eta)\} = \lim_{\xi \to \alpha,\ \eta \to \beta} \varphi(\xi, \eta) + i \cdot \lim_{\xi \to \alpha,\ \eta \to \beta} \psi(\xi, \eta),$$

---

1) Es könnte ja auch der Fall eintreten, daß $\psi(\xi, \eta)$ sich identisch auf *Null* reduziert, also $f(\xi + \eta i)$ *reell* ausfällt

2) Über die Begründung einer solchen Grenzwertbeziehung zwischen *kom-*

so folgt:

$$\lim_{\xi \to \alpha, \eta \to \beta} \varphi(\xi, \eta) = \varphi(\alpha, \beta), \quad \lim_{\xi \to \alpha, \eta \to \beta} \psi(\xi, \eta) = \psi(\alpha, \beta),$$

d. h. $\varphi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$ sind gleichfalls *stetig* an der Stelle (α, β).

Da man umgekehrt von den beiden *letzten* Gleichungen aufsteigend zur *ersten* der vorstehenden Gleichungen zurückgelangen kann, so ist damit die vollständige Äquivalenz der *Stetigkeit* von $f(x)$ und derjenigen von $\varphi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$ erwiesen.[1] Daraus ergibt sich die Möglichkeit, gewisse für *stetige* Funktionen von (ξ, η) bewiesene Sätze auf *stetige* Funktionen von $x = \xi + \eta i$ zu übertragen. So folgt z. B. ohne weiteres (vgl. § 12, Nr. 10, S. 116):

> *Die Summe und das Produkt beliebig vieler an der Stelle $x = a$ stetigen Funktionen von $x = \xi + \eta i$ ist daselbst gleichfalls stetig.*[2] *Dasselbe gilt für den Quotienten zweier solcher Funktionen, vorausgesetzt, daß der Nenner für $x = a$ von Null verschieden ist.*

Da ferner aus:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

folgt, daß:

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = |f(a)|,$$

so ist $|f(x)|$ allemal *stetig*, solange $f(x)$ diese Eigenschaft besitzt. Und da andererseits $|f(x)|$ eine *reelle*, übrigens *niemals negative* Funktion von ξ, η ist, so ergibt sich weiter, daß $|f(x)|$ für jeden abgeschlossenen und zusammenhängenden, aus Stetigkeitsstellen von $f(x)$ bestehenden Bereich $\mathfrak{B}$ ein (nicht negatives) *reales Maximum* und ein (nicht negatives) *reales Minimum* besitzt und daß $f(x)$ in $\mathfrak{B}$ *beschränkt* ist.

Die Übertragung des Satzes von der *gleichmäßigen* Stetigkeit einer punktweise stetigen Funktion erfordert zunächst die folgende Vorbemerkung. Die Begriffe der *oberen* und *unteren Grenze* sind nur für *reelle Zahlenmengen* bzw. *reelle Funktionen* definiert, und es scheint keinerlei Vorteil zu bieten, wenn man versuchen wollte, die fraglichen Definitionen in irgend einer entsprechend modifizierten Form auf *komplexe* Funktionen auszudehnen. Damit entfällt auch die Möglichkeit, den für *reelle*

---

plexen Zahlen vermittelst der definierenden Ungleichungen zwischen *reellen* Zahlen vgl. I_3, § 73, Nr. 2, S. 560/1.

1) Danach erkennt man z. B mit Benützung des binomischen Satzes die *Stetigkeit* von $x^n \equiv (\xi + \eta i)^n$ (n eine natürliche Zahl) auf Grund der in Fußn 1, S. 116 gemachten Bemerkung.

2) Hieraus folgt z. B. mit Benützung der vorigen Fußnote die *Stetigkeit* jeder *ganzen rationalen* Funktion $\sum_0^n a_\nu x^\nu$

Funktionen bestehenden Begriff der *Schwankung* ohne weiteres auf eine Funktion $f(\xi + \eta i)$ zu übertragen. Dagegen steht nichts im Wege, als „absolute Schwankung" von $f(x) = f(\xi + \eta i)$ für irgendeinen abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}$ die *obere Grenze* von $|f(x') - f(x'')|$ für alle möglichen x', x'' von $\mathfrak{B}$ einzuführen. Setzt man: $x' = \xi' + \eta' i$, $x'' = \xi'' + \eta'' i$, so folgt aus der Beziehung:

$$|f(x') - f(x'')|^2 = \{\varphi(\xi', \eta') - \varphi(\xi'', \eta'')\}^2 + \{\psi(\xi', \eta') - \psi(\xi'', \eta'')\}^2,$$

daß $|f(x') - f(x'')|$ gleichzeitig mit

$$|\varphi(\xi', \eta') - \varphi(\xi'', \eta'')| \quad \text{und} \quad |\psi(\xi', \eta') - \psi(\xi'', \eta'')|$$

beliebig klein wird *und umgekehrt.* Infolgedessen läßt sich jetzt der für reelle Funktionen zweier reeller Veränderlichen bewiesene Satz von der *gleichmäßigen* Stetigkeit (§ 12, Nr. 13, S. 118) folgendermaßen auf Funktionen $f(x)$ übertragen:

> *Ist $f(x)$ stetig für jede einzelne Stelle eines beschränkten, zusammenhängenden und abgeschlossenen Bereiches $\mathfrak{B}$, so ist $f(x)$ in $\mathfrak{B}$ gleichmäßig stetig, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, derart daß die absolute Schwankung von $f(x)$ kleiner als ε ausfällt für jedes dem Bereiche $\mathfrak{B}$ angehörige Quadrat von der Seitenlänge δ.*

6. Wir kommen jetzt auf die oben bereits berührte Frage zurück, welche Art von Einschränkungen erforderlich sei, um den als $f(\xi + \eta i)$ bezeichneten Funktionen eine besondere Stellung innerhalb der Gesamtheit der Funktionen $\varphi(\xi, \eta) + i \cdot \psi(\xi, \eta)$ zu sichern. Die Beantwortung dieser Frage *scheint* sehr einfach, wenn $\varphi(\xi, \eta) + i \cdot \psi(\xi, \eta)$ in Form eines *arithmetischen Ausdrucks* vorliegt. Man wird dann etwa verlangen, dieser letztere müsse sich, wenn wieder $\xi + \eta i = x$ gesetzt wird, mit Hilfe der bisher als zulässig angesehenen Rechnungsoperationen, nämlich der vier Spezies und der Limesbildung, so umformen lassen, daß er schließlich weder ξ noch η, sondern nur x enthält. Das klingt sicherlich äußerst annehmbar und erweist sich dennoch als inhaltlich völlig wertlos. Es läßt sich nämlich zeigen, daß sogar ξ und η *einzeln* und somit *jeder* arithmetische Ausdruck in ξ, η, ohne den Kreis der obengenannten rechnerischen Hilfsmittel zu überschreiten, als *arithmetische Ausdrücke in x* dargestellt werden können.

Es seien n, ν, p natürliche Zahlen, x eine komplexe Veränderliche, so hat man zunächst für $x = 0$:

$$\text{(11a)} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{n x^n}{n x^n + \left(\frac{\nu}{p}\right)^n} = 0$$

und für $|x| \neq 0$:

$$\text{(11b)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{nx^n}{nx^n + \left(\frac{\nu}{p}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}\left(\frac{\nu}{px}\right)^n} \begin{cases} = 1 \text{ für } |x| \geqq \frac{\nu}{p} \\ = 0 \text{ für } |x| < \frac{\nu}{p}. \end{cases}$$ [1]

Nimmt man $|x| < 1$ und verteilt das entsprechende Wertegebiet von x auf die Teilgebiete:

$$\text{(12)} \qquad \frac{k}{p} \leqq |x| < \frac{k+1}{p}, \quad \text{wo: } k = 0, 1, \ldots, p-1,$$

so findet man für jedes einzelne dieser Teilgebiete durch Summation des mit $\frac{\nu}{p^2}$ multiplizierten Ausdrucks (11a, b) über $\nu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\text{(13)} \qquad \frac{1}{p^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_1^p{}_\nu \frac{\nu n x^n}{nx^n + \left(\frac{\nu}{p}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{p^2} \sum_1^k{}_\nu \nu = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{p} \cdot \frac{k+1}{p} \begin{cases} \leqq \frac{1}{2}|x| \cdot \left(|x| + \frac{1}{p}\right) \\ > \frac{1}{2}\left(|x| - \frac{1}{p}\right) \cdot |x| \end{cases}$$

und somit für $p \to \infty$:

$$\text{(14)} \qquad |x|^2 = 2 \lim_{p\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^2} \sum_1^p{}_\nu \frac{\nu n x^n}{nx^n + \left(\frac{\nu}{p}\right)^n}$$

zunächst für $|x| < 1$, jedoch, wie mit Benützung der ersten Gleichung (11b) unmittelbar ersichtlich ist, auch noch gültig für $|x| = 1$.

Durch Substitution von $\frac{x}{r}$ an Stelle von x läßt sich dieses Ergebnis auch auf den Bereich $|x| \leqq r$ übertragen, unter r jede noch so große positive Zahl verstanden. Man findet auf diese Weise:

$$\text{(15)} \qquad |x|^2 = 2r^2 \lim_{p\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^2} \sum_1^p{}_\nu \frac{\nu n x^n}{nx^n + \left(\frac{\nu r}{p}\right)^n} \quad \text{für } |x| \leqq r.$$ [2]

---

1) Man hat nämlich in diesem Falle:

$$\left|\frac{\nu}{px}\right| = 1 + \delta, \quad \text{wo: } \delta > 0$$

und daher für $n > 2$:

$$\frac{1}{n}\left|\frac{\nu}{px}\right|^n > \frac{1}{n}\left(1 + n\delta + \frac{n(n-1)}{2}\delta^2\right) > \frac{n-1}{2}\delta^2,$$

also:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\frac{\nu}{px}\right|^n = +\infty$$

2) Multipliziert man Gl. (11b) nur mit dem Faktor $\frac{1}{p}$, so gelangt man durch

Wegen: $|x|^2 = (\xi + \eta i)(\xi - \eta i) = x(\xi - \eta i)$ folgt hieraus, zunächst unter der Voraussetzung $x \neq 0$, durch Division mit x:

$$(16) \qquad \xi - \eta i = 2r^2 \lim_{p\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^2} \sum_1^p{}_\nu \frac{\nu n x^{n-1}}{n x^n + \left(\frac{\nu r}{p}\right)^n},$$

und diese Gleichung gilt dann, wie unmittelbar ersichtlich, auch für $x = 0$. Durch Kombination mit $\xi + \eta i = x$ ergibt sich schließlich:

$$(17) \qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{x}{2} + r^2 \lim\limits_{p\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{p^2} \sum\limits_1^p{}_\nu \dfrac{\nu n x^{n-1}}{n x^n + \left(\frac{\nu r}{p}\right)^n} \\ \eta = -\dfrac{xi}{2} + r^2 i \lim\limits_{p\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{p^2} \sum\limits_1^p{}_\nu \dfrac{\nu n x^{n-1}}{n x^n + \left(\frac{\nu r}{p}\right)^n} \end{cases}$$

als die oben angekündigte Darstellung von ξ und η durch arithmetische Ausdrücke in x, gültig für $0 \leqq |x| \leqq r$ bei beliebig großem r, also in jedem noch so großen endlichen Bereiche (schließlich auch für $r \to +\infty$ und $0 \leqq |x| < \infty$).

7. Das wesentliche bei den vorstehenden Darstellungen von $|x|^2$, ξ und η durch arithmetische Ausdrücke in $x = \xi + \eta i$ benützte rechnerische Hilfsmittel besteht in dem *iterierten* Grenzwerte einer (von zwei Parametern abhängigen) *rationalen* Funktion von x. Man wird also dieses Hilfsmittel als nicht zuverlässig für die Gewinnung einer *mit Sicherheit* brauchbaren Definitionsform für $f(x)$ ausschließen müssen und, wenn man überhaupt über die *rationalen* Funktionen hinauskommen will, sich etwa auf *einfache* Grenzwerte *rationaler* Funktionen beschränken. Damit würde man in der Tat dem gewünschten Ziele etwas näher kommen (wie spätere Untersuchungen noch genauer erkennen lassen werden: s. § 49, Nr. 1, 2), doch ergibt sich hier derselbe Übelstand, welcher bei der Betrachtung derartiger Grenzwerte unter der Voraussetzung einer *reellen* Veränderlichen sich schon gezeigt hat, daß nämlich ein arithmetischer Ausdruck dieser Art in verschiedenen Gebieten z. B. *verschiedene rationale* Funktionen darstellen kann (s. § 13, Nr. 3). Analoge Überlegungen, wie sie bei jener früheren Gelegenheit angestellt wurden (§ 13, Nr. 5—7) führen dann dazu, die *Potenzreihe* als *einfachste* Form eines auf die vier Spezies und einen einfachen Grenzübergang beschränkten arithmetischen

---

das gleiche (etwas einfacher verlaufende) Verfahren wie im Text, zu der Beziehung:

$$|x| = r \lim_{p\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p} \sum_1^n{}_\nu \frac{n x^n}{n x^n + \left(\frac{\nu r}{p}\right)^n}.$$

Ausdrucks zugrunde zu legen, um *möglicherweise* eine in jeder Beziehung zweckmäßigen Definition einer Funktion $f(x)$ zu erzielen. Mit anderen Worten, man gelangt hier wieder zu dem am Schluß von § 13 skizzierten *Méray-Weierstraß*schen Ausgangspunkte für die Theorie der *analytischen* Funktionen.

Eine andere Methode, die *Cauchy-Riemann*sche, erzielt die zur Gewinnung einer zweckmäßigen Definition für $f(x)$ erforderliche Einschränkung *nicht* durch Zugrundelegung einer bestimmten *arithmetischen Ausdrucksform*, sondern davon gänzlich unabhängig durch die Forderung einer besonderen *Eigenschaft*, nämlich der Existenz eines bestimmten *Differentialquotienten* oder, was (abgesehen von gewissen Zusatzbedingungen) auf dasselbe hinausläuft, der Erfüllung gewisser *Differentialgleichungen* durch den *reellen* und *imaginären* Teil von $f(x)$. Es ist hier noch nicht der Ort, den Sinn dieser Forderungen entsprechend zu erläutern: das wird erst später in ausreichender Weise geschehen (s. § 50—54).

Dagegen mögen die folgenden Bemerkungen zu einer vorläufigen Orientierung über die gegenseitige Stellung dieser beiden Methoden dienen. Beide führen zu demselben Ziele, d. h. jede in dem *einen* Sinne *analytische* Funktion ist es auch (sc. *cum grano salis*[1]) in dem *anderen*. Ohne Zweifel hat sich gerade die zweite Methode für die Forschung als besonders förderlich bewährt. Sie führt wesentlich schneller *in medias res* und verfügt in der *komplexen Integration* über ein Forschungs- und Beweisinstrument von erstaunlicher Wirksamkeit. Diesen ihren Vorzügen stehen aber auch entsprechende Nachteile gegenüber. Insbesondere besitzt ihr Ausgangspunkt einen im hohen Grade *willkürlichen* Charakter, und seine Wahl wird in Wahrheit nur durch den *Erfolg* gerechtfertigt. Zugleich setzt er die Beherrschung erheblicher, anderen Untersuchungen zu entnehmender Vorkenntnisse und Hilfsmittel voraus. Für einen wirklich *systematischen* Aufbau der Lehre von den Funktionen einer komplexen Veränderlichen dürfte er deshalb kaum geeignet erscheinen. Wir ziehen daher vor, die *Méray-Weierstraß*sche Definitionsform unserer Darstellung zugrunde zu legen, werden jedoch im Laufe unserer Betrachtungen an die *Cauchy-Riemann*sche Methode in dem Sinne Anschluß gewinnen, daß die dort zur *Definition* dienende Funktionseigenschaft als ein wertvolles *Erkennungszeichen* für den anderweitig definierten *analytischen* Charakter zum Vorschein kommt (vgl § 52, insbesondere Fußn 1). Auch die *kom-*

---

1) Die *Cauchy-Riemann*sche Definition bedarf noch einer auf *Weierstraß* zurückzuführenden Einschränkung: Vgl. § 53, Nr 4 am Ende mit der zugehörigen Fußnote.

plexe Integration wird im Rahmen dieser Darstellung an geeigneter Stelle Platz finden[1]), aber erst dann, wenn die bis dahin verwendeten wesentlich elementareren Hilfsmittel nicht mehr ausreichen.

§ 16. Die durch eine Funktion $y = f(\xi + \eta i)$ vermittelte Abbildung. — Die ganze lineare Funktion $y = ax + b$. — Ähnlichkeitstransformationen.

1. Es sei $y = f(x)$ eine für irgendeinen Bereich $\mathfrak{B}_x$ der komplexen Veränderlichen $x = \xi + \eta i$ *eindeutig* definierte und *stetige* Funktion im Sinne der im vorigen Paragraphen Nr. 3 gegebenen allgemeinsten Definition, also schließlich nichts anderes als eine (in entsprechendem Umfange *eindeutige* und *stetige*) *komplexe* Funktion der beiden *reellen* Veränderlichen ξ und η, etwa $y = \varphi + \psi i$, wo: $\varphi \equiv \varphi(\xi, \eta)$, $\psi \equiv \psi(\xi, \eta)$.

Einem beliebig angenommenen Punkte x_0 wird dann ein bestimmter Punkt y_0 und *jedem* Punkte x einer gewissen *Umgebung* von x_0 infolge der Eindeutigkeit und Stetigkeit von $y = f(x)$ *je ein* Punkt aus der *Umgebung* von y_0 entsprechen. Wir wollen nun ausdrücklich die Annahme machen, daß auch umgekehrt *jedem* Punkte y einer gewissen *Umgebung* von y_0 *ein* und *nur* ein Punkt x aus der *Umgebung* von x_0 entspricht, und daß die Annahme eines derartigen *umkehrbar eindeutigen* gegenseitigen Entsprechens sich auf zwei bestimmte die Punkte x_0 und y_0 umgebende *Bereiche* $\mathfrak{B}_x$ und $\mathfrak{B}_y'$ ausdehnen läßt. Wir sagen dann, *der Bereich* $\mathfrak{B}_x$ *werde durch die Funktion* $y = f(x)$ *in den Bereich* $\mathfrak{B}_y'$ *transformiert* oder auf den letzteren *abgebildet*. Um von einer solchen *Abbildung* ein übersichtliches geometrisches Bild herzustellen, pflegt man mit Rücksicht darauf, daß die Bereiche $\mathfrak{B}_x$ und $\mathfrak{B}_y'$ auch ganz oder teilweise übereinander greifen können, *zwei* Zeichenebenen, eine x- und eine y-Ebene zu Hilfe zu nehmen und im Anschluß hieran zu sagen, *es wird durch die Funktion* $y = f(x)$ *die x-Ebene* (bzw. ein Teil derselben) *auf die y-Ebene* (bzw. einen Teil derselben) *abgebildet*.

Diese, wie bemerkt, auf beliebige d. h. insbesondere auch auf *nichtanalytische*[2]) Funktionen $f(x)$ sich beziehende Betrachtungsweise wollen wir jetzt auf die einfachsten (auf Grund der in § 13, am Schlusse von Nr. 2 getroffenen vorläufigen Festsetzung) als *analytisch* zu bezeichnenden Funktionen, nämlich die *linearen ganzen* und *gebrochenen* anwenden,

1) In der zweiten Abteilung dieses Bandes.

2) Einfache Beispiele dieser Art: $y = \xi - \eta i$

und:
$$y = \frac{1}{\xi - \eta i} = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{\eta i}{\xi^2 + \eta^2}$$

um daraus gewisse Anhaltspunkte zur Feststellung einer allen analytischen Funktionen zukommenden Abbildungseigenschaft zu gewinnen.

2 Für die Beurteilung der Abbildung, welche durch die *lineare ganze* Funktion $y = ax + b$ hergestellt wird, erscheint es zweckmäßig, zunächst die beiden Spezialfälle $a = 1$ und $b = 0$ in Betracht zu ziehen.

Sei also zunächst:

$$x = y + b, \tag{1}$$

wo $b = \beta + \gamma i$, und daher, wenn wieder $y = \varphi + \psi i$ gesetzt wird:

$$\varphi = \xi + \beta, \quad \psi = \eta + \gamma \tag{1a}$$

Der Punkt y, der irgendeinem bestimmten $x = \xi + \eta i$ entspricht, entsteht somit aus dem letzteren durch *Verschiebung* um die Strecke β in *horizontaler* Richtung (nach *rechts*, wenn $\beta > 0$, nach *links*, wenn $\beta < 0$) und (entsprechend) um die Strecke γ in *vertikaler* Richtung. Die gleiche *Parallelverschiebung* erleidet also jeder von einem einfach geschlossenen Wege begrenzter x-Bereich beim Übergange in den entsprechenden y-Bereich. Die durch die Funktion $y = x + b$ vermittelte *Abbildung* ist also eine *kongruente*, die einer beliebigen x-Figur entsprechende y-Figur geht durch bloße *Parallelverschiebung* aus der ersteren hervor.

3. Es sei jetzt:

$$y = ax = |a| \cdot e x \tag{2}$$

(wo also e den Einheitsfaktor von a bedeutet). Bildet der Halbstrahl, auf welchem a liegt, mit der positiven Abszissenachse den Winkel ϑ, derjenige, auf welchem x liegt, den Winkel ϑ', so bildet $\overline{Oy}$ nach § 14, Nr. 4 mit der positiven Abszissenachse den Winkel $\vartheta + \vartheta'$, erscheint daher gegen die Richtung von $\overline{Ox}$ um den Winkel ϑ (in der Richtung der wachsenden Winkel) *gedreht*. Zugleich zeigt die Strecke $\overline{Oy}$ gegenüber der Strecke $\overline{Ox}$ (sofern nicht gerade $|a| = 1$ ist) eine *Proportionaländerung* (Vergrößerung oder Verkleinerung im Verhältnis $|a| : 1$, also gemäß der Proportion $\overline{Oy} : \overline{Ox} = \overline{Oa} : \overline{O1}$). Beschreibt dann x irgendeine Figur, so ist die von y beschriebene Figur der ersteren *ähnlich* (nur im Falle $|a| = 1$ ihr *kongruent*). Diese *Ähnlichkeit* ist eine *gleichstimmige* in dem Sinne, daß insbesondere jedes x-Dreieck in ein *gleichstimmig* ähnliches y-Dreieck übergeführt wird, wie ohne weiteres daraus entnommen werden kann, daß das letztere lediglich durch *Drehung* und *Proportionaländerung* aus dem ersteren hervorgeht. Zugleich erkennt man, daß es auf das Endergebnis keinen Einfluß übt, wenn man die Reihenfolge jener beiden Operationen *vertauscht*.

4. Um den allgemeinen Fall $y = ax + b$ auf die vorstehenden zwei Spezialfälle zurückzuführen, werde gesetzt:

$$x' = ax, \tag{3a}$$

$$y = x' + b \quad \text{(also schließlich} = ax + b). \tag{3b}$$

Faßt man die geometrische Bedeutung von Gl. (3a) auf als Abbildung der x-Ebene auf eine vermittelnde x'-Ebene, sodann diejenige von Gl. (3b) als Abbildung dieser x'-Ebene auf die y-Ebene, so liefert Gl. (3a) eine durch *Proportionaländerung* und *Drehung* hervorgebrachte *ähnliche* Abbildung, sodann Gl. (3b) eine noch hinzutretende *Parallelverschiebung*, bei welcher die (übrigens *gleichstimmige*) *Ähnlichkeit* erhalten bleibt. Dabei ist zu bemerken, daß die Reihenfolge der beiden in Betracht kommenden Operationen, nämlich erstens *Proportionaländerung* und *Drehung*, zweitens *Parallelverschiebung nicht* ohne weiteres *vertauscht* werden darf. Denn aus:

$$x' = x + b, \quad y = ax'$$

würde folgen:

$$y = ax + ab \quad (\text{nicht: } y = ax + b).$$

Dagegen läßt sich die Reihenfolge der beiden Operationen in der Weise vertauschen, daß man setzt:

$$(4) \qquad x' = x + \frac{b}{a}, \quad y = ax' \text{ (also schließlich } = ax + b)$$

Sind x_1, x_2, x_3 irgend drei nicht in gerader Linie liegende x-Punkte, y_1, y_2, y_3 deren Abbilder in der y-Ebene, so hat man:

$$y_1 = ax_1 + b$$
$$y_2 = ax_2 + b$$
$$y_3 = ax_3 + b$$

und daher:

$$(5) \qquad \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x}$$

Die Eckpunkte der beiden *gleichstimmig ähnlichen* Dreiecke $\overline{x_1 x_2 x_3}$ und $\overline{y_1 y_2 y_3}$ genügen also der Bedingung (5), falls jene *gleichstimmige Ähnlichkeit* durch eine Beziehung von der Form $y = ax + b$ hervorgebracht worden ist. Wir wollen nun zeigen, daß die Beziehung (5) geradezu die *notwendige und hinreichende* Bedingung für die *gleichstimmige Ähnlichkeit* zweier Dreiecke $\overline{x_1 x_2 x_3}$ und $\overline{y_1 y_2 y_3}$ ist, wenn man sich dieselben ganz willkürlich in einer Ebene verzeichnet denkt.

5. Es mögen außer *drei* nicht in einer Linie liegenden Punkten x_1, x_2, x_3 noch *zwei* Punkte y_2, y_3 willkürlich angenommen werden. Dann läßt sich mit Hilfe einer linearen Beziehung $y = ax + b$ ein dritter Punkt y_1 so bestimmen, daß das Dreieck $\overline{x_1 x_2 x_3}$ dem Dreieck $\overline{y_1 y_2 y_3}$ *gleichstimmig ähnlich* wird. Bestimmt man nämlich zwei Konstanten a, b auf Grund der Bedingungen:

$$y_2 = ax_2 + b$$
$$y_3 = ax_3 + b,$$

also:

(6) $$a = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}, \quad b = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{x_2 - x_3}$$

und setzt:

(7) $$y = ax + b = \frac{1}{x_2 - x_3} \{(y_2 - y_3)x + x_2 y_3 - x_3 y_2\},$$

so wird:

$$y - y_3 = \frac{1}{x_2 - x_3} \{(y_2 - y_3)x - (y_2 - y_3)x_3\}$$

oder auch:

(7a) $$\frac{y - y_3}{y_2 - y_3} = \frac{x - x_3}{x_2 - x_3}.$$

Diese lineare Beziehung zwischen x und y, welche keine andere ist, als die Gleichung (7), wenn man den Konstanten a und b die Werte (6) gibt, liefert eine Abbildung, vermöge deren, wie in der vorigen Nummer bewiesen, jedem Dreieck $\overline{x x_2 x_3}$ ein *gleichstimmig ähnliches* $\overline{y y_2 y_3}$ entspricht. Nimmt man also speziell $x = x_1$ und bestimmt sodann y_1 gemäß der Gleichung (7a), so daß also:

$$\frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3}$$

(gleichlautend mit Gl. (5)), so erkennt man zunächst, daß diese Bedingung für die *gleichstimmige Ähnlichkeit* der Dreiecke $\overline{x_1 x_2 x_3}$ und $\overline{y_1 y_2 y_3}$ *hinreichend* ist.[1])

Daß sie aber auch *notwendig* ist, ergibt sich einfach daraus, daß bei gegebenem y_2, y_3 nur *ein* Punkt y_1 existiert, für welchen das Dreieck $\overline{y_1 y_2 y_3}$ dem gegebenen $x_1 x_2 x_3$ gleichstimmig ähnlich ist. Dieser Punkt muß also mit dem durch Gleichung (5) gelieferten identisch sein.

Da hiernach, wenn man wieder x, y statt x_1, y_1 schreibt, die Gleichung (7a) sich als *notwendig* und *hinreichend* dafür erweist, daß nach willkürlich vorgenommener gegenseitiger Zuordnung der Strecken $\overline{x_2 x_3}$ und $\overline{y_2 y_3}$ *jedem* Dreieck $\overline{x x_2 x_3}$ ein *gleichstimmig ähnliches* $y y_2 y_3$ entspricht, so folgt, daß die *ganze lineare Funktion*, also jede von der Form $y = ax + b$, die einzige ist, welche eine *gleichstimmig ähnliche Abbildung* (*gleichstimmige Ähnlichkeitstransformation*) hervorbringt.

---

1) Man kann dieser Bedingung (5) auch die Form geben:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(d. h. $(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) = 0$).

Es sei daran erinnert, daß diese nämliche Gleichung, wenn man die Zahlenpaare (x_ν, y_ν) $(\nu = 1, 2, 3)$ *reell* annimmt und als Punkte in der Cartesischen Koordinatenebene deutet, die Bedingung dafür angibt, daß jene drei Punkte in einer *Geraden* liegen.

Selbstverständlich gibt es auch eine und nur eine Funktionsgattung, welche eine *ungleichstimmige ähnliche Abbildung* erzeugt. Bezeichnet man nämlich wieder[1]) allgemein mit $\tilde{z}$ die zu irgendeiner Zahl z *konjugierte,* so erkennt man, daß die Dreiecke $\overline{x_1 x_2 x_3}$ und $\overline{\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3}$ zwar *kongruent* sind, aber *symmetrisch* zur reellen Achse liegen (so daß ein jedes als das *Spiegelbild* des anderen erscheint, und daß daher nicht durch bloße Verschiebung die Eckpunkte mit gleichen Indizes zur Deckung gebracht werden können. Daraus folgt weiter, daß die Funktion:

$$y = \tilde{a}\tilde{x} + \tilde{b} \tag{8}$$

(welche als lineare Funktion von $\xi - \eta i$ keine „analytische“ von $x = \xi + \eta i$ ist) eine Abbildung liefert, welche das *Spiegelbild* der zur Funktion $y = ax + b$ gehörigen längs der reellen Achse darstellt und somit eine *ungleichstimmig ähnliche* ist. Auch folgt aus der Reziprozität zwischen den Funktionen $ax + b$ und $\tilde{a}\tilde{x} + \tilde{b}$, daß sie die *einzige* dieser Art sein muß.

§ 17. Die reziproke Transformation: $y = \frac{1}{x}$. — Konforme Abbildung. — Die allgemeinste lineare Funktion $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$ (Kreisverwandtschaft).

1. Einen von der zuvor betrachteten wesentlich verschiedenen Charakter zeigt diejenige Abbildung, welche durch die Funktion:

$$y = \frac{1}{x} \tag{1}$$

vermittelt wird. Bezeichnet man die Koordinaten von y mit φ und ψ so daß also:

$$y \equiv \varphi + \psi i = \frac{1}{\xi + \eta i} = \frac{\xi - \eta i}{\xi^2 + \eta^2}, \tag{2}$$

so ergibt sich:

$$\varphi = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \psi = -\frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \tag{3a}$$

und infolge der zwischen x und y bestehenden Reziprozität auch umgekehrt:

$$\xi = \frac{\varphi}{\varphi^2 + \psi^2}, \quad \eta = -\frac{\psi}{\varphi^2 + \psi^2}. \tag{3b}$$

Daraus ersieht man zunächst, das ξ und φ *gleiches*, η und ψ entgegengesetztes Vorzeichen haben. Es wird somit die *rechte* bzw. *linke* x-Halbebene auf die *gleichnamige* y-Halbebene, dagegen die *obere* bzw *untere* x-Halbebene auf die *ungleichnamige* y-Halbebene abgebildet, so daß also

den Quadranten	1	2	3	4	der x-Ebene
die Quadranten	4	3	2	1	der y-Ebene

entsprechen.

1) Vgl I_2, § 110, Nr. 3 (S 845).

Beschreibt x eine durch den *Nullpunkt* gehende *Gerade*, besteht also eine Beziehung von der Form: $\eta = \alpha \xi$, so wird $\left(\text{da } \frac{\psi}{\varphi} = -\frac{\eta}{\xi} \text{ nach Gl. (3a)}\right)$: $\psi = -\alpha\varphi$. Es beschreibt also auch y eine durch den Nullpunkt gehende *Gerade*, jedoch mit entgegengesetztem Richtungskoeffizienten, d. h. bildet die x-Gerade mit der positiven Abszissenachse den Winkel ϑ in der Richtung der wachsenden Winkel, so bildet die entsprechende y-Gerade den nämlichen Winkel in der entgegengesetzten Richtung.

Beschreibt x von dem reellen Punkte $x = \varrho > 0$ ausgehend um den *Nullpunkt* einen *Kreis* mit dem Radius ϱ etwa in „*positiver*" Richtung (d. h. in der Richtung nach oben beginnend), so hat man, wegen $|x| = \varrho$, durchweg: $|y| = \frac{1}{\varrho}$, es beschreibt also y mit dem Radius $\frac{1}{\varrho}$ gleichfalls einen Kreis um den Nullpunkt, jedoch vom Punkte $y = \frac{1}{\varrho}$ ausgehend in *entgegengesetzter* Richtung, da ja der *oberen* x-Halbebene die *untere* y-Halbebene entspricht. Nimmt man speziell $|x| = 1$, so wird auch $|y| = 1$.

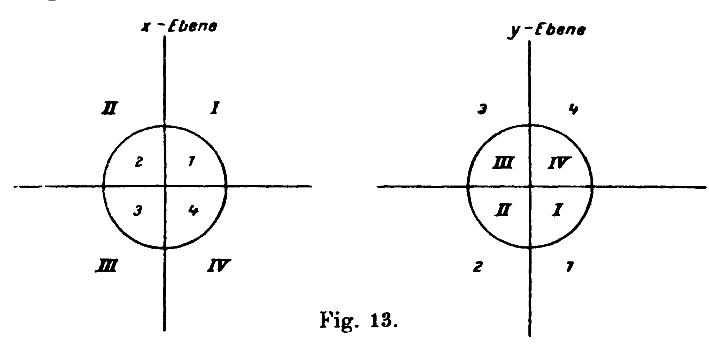


Fig. 13.

Dem *x-Kreise* um den *Nullpunkt* mit dem *Radius* 1 oder, wie man kürzer zu sagen pflegt, dem *Einheitskreise* in der x-Ebene, entspricht also auch der *Einheitskreis* in der y-Ebene, und zwar (wegen: $|y| > 1$ für $|x| < 1$ und: $|y| < 1$ für $|x| > 1$) dem *Inneren* des x-Einheitskreises das *Äußere* des y-Einheitskreises, dem *Äußeren* des x-Einheitskreises das *Innere* des y-Einheitskreises (speziell der Stelle $x = 0$ die Stelle $y = \infty$, der Stelle $x = \infty$ die Stelle $y = 0$). Im übrigen wird das gegenseitige Entsprechen der zwei Gruppen von je acht Teilgebieten, in welche die x- und die y-Ebene durch den Einheitskreis und die beiden Koordinatenachsen zerlegt wird, durch die in der Fig. 13 angebrachte Numerierung übersichtlich zur Anschauung gebracht.

2. Des weiteren wollen wir jetzt untersuchen, wie ein x-Kreis, dessen Mittelpunkt *nicht* der Nullpunkt ist, dessen Gleichung also die Form hat:

$$(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 = \varrho^2 \tag{4}$$

(wo mindestens eine der beiden Zahlen α, β *von Null verschieden* ist), auf die y-Ebene abgebildet wird. Schreibt man Gl. (4) folgendermaßen:

$$\xi^2 + \eta^2 - 2(\alpha\xi + \beta\eta) + \alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2 = 0,$$

so liefert sie mit Berücksichtigung von Gl. (3b) für φ, ψ die Beziehung:

$$\frac{1}{\varphi^2 + \psi^2} - 2\frac{\alpha\varphi - \beta\psi}{\varphi^2 + \psi^2} + \alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2 = 0 \tag{5}$$

als Gleichung für das Abbild des Kreises Gl. (4) in der y-Ebene.

Wir behandeln zunächst den *Spezialfall*, daß $\alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2 = 0$, daß also der durch Gl. (4) dargestellte x-Kreis durch den *Nullpunkt* geht. In diesem Falle reduziert sich die Gl. (5) auf die folgende:

$$2\alpha\varphi - 2\beta\psi = 1, \tag{6}$$

d. h. auf die Gleichung einer *Geraden* mit dem Richtungskoeffizienten $\frac{\alpha}{\beta}$, welche also mit der positiven Abszissenachse denselben Winkel bildet, wie die Mittelpunktsordinate β mit dem Radius vom Mittelpunkt zum Nullpunkt, und welche die φ-Achse im Punkte $\left(\frac{1}{2\alpha}, 0\right)$, die ψ-Achse im Punkte $\left(0, -\frac{1}{2\beta}\right)$ schneidet.[1]) Für ihren *Abstand* vom Nullpunkt findet man: $\frac{1}{\sqrt{4(\alpha^2+\beta^2)}} = \frac{1}{2\varrho}$, derselbe wächst also mit unbegrenzt abnehmenden ϱ ins Unendliche.

In dem *allgemeinen Falle:* $\alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2 \neq 0$ läßt sich die in Frage kommende Gl. (5) durch Multiplikation mit dem Faktor $\frac{\varphi^2+\psi^2}{\alpha^2+\beta^2-\varrho^2}$ zunächst in die folgende überführen:

$$\varphi^2 + \psi^2 - \frac{2\alpha\varphi}{\alpha^2+\beta^2-\varrho^2} + \frac{2\beta\psi}{\alpha^2+\beta^2-\varrho^2} = -\frac{1}{\alpha^2+\beta^2-\varrho^2},$$

und nimmt, wenn auf beiden Seiten $\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2-\varrho^2)^2}$ addiert wird, die Form an:

$$\left(\varphi - \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2-\varrho^2}\right)^2 + \left(\psi + \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2-\varrho^2}\right)^2 = \frac{\varrho^2}{(\alpha^2+\beta^2-\varrho^2)^2},$$

kürzer geschrieben:

$$(\varphi - \alpha')^2 + (\psi - \beta')^2 = \varrho'^2, \tag{7}$$

---

1) In den besonderen Fällen $\beta = 0$ bzw. $\alpha = 0$ reduziert sich Gl. (6) auf:

$$\varphi = \frac{1}{2\alpha} \quad \text{bzw.} \quad \psi = -\frac{1}{2\beta},$$

d. h. liegt der Mittelpunkt des (durch den Nullpunkt gehenden) x-Kreises auf der reellen bzw imaginären Achse, so beschreibt y eine Vertikale bzw Horizontale im Abstande $\frac{1}{2\alpha}$ bzw. $-\frac{1}{2\beta}$ von der entsprechenden Achse.

wo:

$$(7a) \qquad \alpha' = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2-\varrho^2}, \quad \beta' = -\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2-\varrho^2}, \quad \varrho' = \frac{\varrho}{|\alpha^2+\beta^2-\varrho^2|}.$$

Es beschreibt also y gleichfalls einen *Kreis*, dessen *Radius* außer von ϱ nur von $|\alpha^2+\beta^2-\varrho^2|$ abhängt, während die *Mittelpunkskoordinaten* gleichzeitig mit $\alpha^2+\beta^2-\varrho^2$ das Vorzeichen wechseln. Da gleichzeitig mit $\alpha^2+\beta^2-\varrho^2 \neq 0$ auch: $\alpha'^2+\beta'^2-\varrho'^2 = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2-\varrho^2} \neq 0$, so geht der betreffende y-Kreis *niemals* durch den *Nullpunkt*.[1]) Dieser Fall würde, wie auf Grund des zuvor behandelten Spezialfalles aus der zwischen x und y bestehenden Reziprozität hervorgeht, nur dann eintreten, wenn x statt des Kreises eine *nicht* durch den Nullpunkt gehende *Gerade* beschreibt. Zugleich erscheint der eben erwähnte Spezialfall in dem vorliegenden Zusammenhange als Grenzfall für $\alpha^2+\beta^2-\varrho^2 \to 0$. Der Mittelpunkt (α', β') und der Radius ϱ' des y-Kreises rückt dann ins Unendliche und die beiden Scharen von y-Kreisen, welche für $\alpha^2+\beta^2-\varrho^2 \gtrless 0$ bei Festhaltung von (α, β) und Variation von ϱ entstehen, arten in die durch Gl. (6) dargestellte Gerade aus.[2])

3. Nach dem Gesagten entsprechen bei der Abbildung durch die Funktion $y = \frac{1}{x}$ *Kreisen* in der x-Ebene mit Einschluß des eben betrachteten Grenzfalles stets auch *Kreise* in der y-Ebene. Aber gerade jener Grenzfall macht evident, daß die Abbildung *keineswegs* eine *ähnliche* sein kann (was übrigens schon aus Nr. 5 des vorigen Paragraphen hervorgeht). Einem *geradlinigen* Dreieck $\overline{x_0x_1x_2}$ entspricht nämlich danach im allgemeinen ein aus drei *Kreisbögen* gebildetes Dreieck $\overline{y_0y_1y_2}$ (von dem *eine* Seite *geradlinig* ausfällt, wenn die Verlängerung einer Seite des x-Dreiecks durch den *Nullpunkt* geht[3])) — damit ist die Möglichkeit einer Ähnlichkeit von vornherein ausgeschlossen. Dennoch besitzt die fragliche Abbildung eine Eigenschaft, die mit der (gleichstimmigen) Ähnlichkeit in engster Beziehung steht und die sich überdies als geradezu cha-

---

1) Ist $\alpha^2+\beta^2-\varrho^2 > 0$, enthält also der x-Kreis den Punkt $x=0$ *nicht* im Innern, so muß das dem letzteren entsprechende y-Gebiet ganz im Endlichen liegen, besteht also aus dem *Inneren* des y-Kreises (dagegen aus dem *Äußeren*, wenn $\alpha^2+\beta^2-\varrho^2 < 0$)

2) Wegen: $\frac{\alpha'}{\beta'} = -\frac{\alpha}{\beta}$ liegen die Mittelpunkte aller dieser Kreise auf demjenigen Strahle, welcher die Grenzgerade (6) rechtwinklig schneidet.

3) Der Fall, daß *zwei* Seiten des x-Dreieckes *geradlinige* Bilder liefern, würde nur eintreten, wenn einer der drei Punkte x_0, x_1, x_2 der *Nullpunkt* wäre, also der entsprechende y-Punkt *ins Unendliche* rückt und ein y-Dreieck im gewöhnlichen Sinne gar nicht existiert.

rakteristisch für jede „analytische" Funktion erweisen wird (vgl. § 50, Nr. 2, Fußnote).

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die gleichstimmige Ähnlichkeit zweier Dreiecke $\overline{x_0 x_1 x_2}$ und $\overline{y_0 y_1 y_2}$ lautet nach Nr. 3 des vorigen Paragraphen (wenn man in Gl. (5), S. 153, x_3, y_3 durch x_0, y_0 ersetzt und auf beiden Seiten die reziproken Werte nimmt):

$$\frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}. \tag{8}$$

Im vorliegenden Falle hat man:

$$\frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_0}}{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0}} = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_0 - x_2}{x_0 - x_1} = \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}(1 + k)^{1)}, \tag{9}$$

wo:

$$k = \left(\frac{x_1}{x_2} - 1\right) = \frac{x_1 - x_2}{x_2} = \frac{(x_1 - x_0) - (x_2 - x_0)}{x_0 + (x_2 - x_0)}, \tag{9a}$$

und daher:

$$|k| \leqq \frac{|x_1 - x_0| + |x_2 - x_0|}{|x_0| - |x_2 - x_0|}. \tag{10}$$

Da $y = \infty$ für $x = 0$, so kommt der Wert $x = 0$ in dem vorliegenden Zusammenhange nicht in Betracht. Es sei etwa:

$$|x_0| = \varrho > 0, \tag{11}$$

außerdem sollen x_1, x_2 von vornherein verhältnismäßig *nahe* bei x_0 angenommen werden, genauer gesagt: wird $\delta > 0$ nicht nur *an sich*, sondern auch *im Verhältnis zu* ϱ *sehr klein* angenommen, so soll sein:

$$|x_1 - x_0| < \delta, \quad |x_2 - x_0| < \delta. \tag{12}$$

---

1) Es existieren also bei dieser Abbildung *keine* drei Punkte x_0, x_1, x_2, derart, daß die Bildpunkte y_0, y_1, y_2 ein dem Dreieck $\overline{x_0 x_1 x_2}$ *gleichstimmig ähnliches* Dreieck $\overline{y_0 y_1 y_2}$ liefern — so in der durch die Folge der Indizes bestimmten Anordnung. Ohne diesen Zusatz wäre die vorstehende Aussage unrichtig.

In der Tat wird z. B. das Dreieck $\overline{y_0 y_2 y_1}$ (in dieser Anordnung) bei passender Wahl von x_0, x_1, x_2 dem Dreieck $\overline{x_0 x_1 x_2}$ gleichstimmig *ähnlich*. Man hat nämlich:

$$\frac{y_1 - y_0}{y_2 - y_0} = \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_0}} = \frac{x_2}{x_1} \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_2},$$

also, wenn

$$x_0^2 = x_1 x_2$$

gesetzt wird:

$$\frac{y_1 - y_0}{y_2 - y_0} = \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}$$

und daher:

$$\Delta \overline{y_0 y_2 y_1} \sim \Delta \overline{x_0 x_1 x_2}.$$

Alsdann folgt aus Ungl. (10), daß:

$$(13) \qquad |k| < \frac{2\delta}{\varrho - \delta},$$

d. h. gleichzeitig mit δ *beliebig klein* wird, und der Inhalt von Gl. (9), verglichen mit demjenigen von Gl. (8), läßt sich dahin aussprechen, daß in diesem Falle die Dreiecke $\overline{x_0 x_1 x_2}$ und $\overline{y_0 y_1 y_2}$ [1]) *„nahezu“ ähnlich* werden. Um dieser Aussage eine schärfere Fassung zu geben, schreiben wir Ungl. (9) folgendermaßen:

$$(14) \qquad \frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} \cdot \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} = 1 + k$$

Verkürzen wir jetzt sukzessive die Dreiecksseiten $\overline{x_0 x_1}$, $\overline{x_0 x_2}$ proportional $\left(\text{also in der Weise, daß } \left|\frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}\right| \text{ konstant bleibt}\right)$, indem wir x_1 und x_2 immer näher an x_0 heranrücken lassen, derart, daß die Verbindungslinie $\overline{x_1 x_2}$ sich beständig parallel verschiebt, so läßt sich bei unbegrenzter Fortsetzung dieses Verfahrens die Gl. (14) durch die folgende ersetzen:

$$(15) \qquad \lim_{x_1, x_2 \to x_0} \frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} \cdot \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} = 1,$$

als Ausdruck dafür, daß der Zustand der beiden Dreiecke sich *unbegrenzt* demjenigen der *Ähnlichkeit* nähert, wenn man x_1, x_2 in der angegebenen Art gegen die Stelle x_0 *konvergieren* läßt. Dabei muß insbesondere, wie aus Gl. (14) leicht geschlossen werden kann, die Größe des (veränderlichen) *Sehnenwinkels* $\overline{y_1 y_0 y_2}$ sich unbegrenzt derjenigen des (festen) *Winkels* $\overline{x_1 x_0 x_2}$ nähern, also für $x_1, x_2 \to x_0$ gegen den letzteren *konvergieren*. Da andererseits gleichzeitig mit $x_1, x_2 \to x_0$ auch $y_1, y_2 \to y_0$, so gehen bei diesem Grenzprozeß die *Sehnen* $\overline{y_0 y_1}$, $\overline{y_0 y_2}$ in die *Tangenten* der betreffenden beiden Kreisbögen im Punkte x_0 über, und da der *Tangentenwinkel* als das Maß des von den zugehörigen beiden *Kreisbögen* gebildeten *Winkels* gilt, so besagt schließlich Gl. (15), daß der *Kreisbogenwinkel* [2]) $\widehat{y_1 y_0 y_2}$, also das *Abbild* des *geradlinigen* Winkels $\overline{x_1 x_0 x_2}$ diesem letzteren *gleich* ist. Infolge der zwischen x und y bestehenden Reziprozität würde auch umgekehrt einem *geradlinigen Winkel* $\overline{y_1 y_0 y_2}$ (mit der Beschränkung $y_0 \neq 0$) ein ihm *gleicher Kreisbogenwinkel* [3]) $\widehat{x_1 x_0 x_3}$ entsprechen.

---

1) Unter $\overline{y_0 y_1 y_2}$ ist selbstverständlich nicht das als Abbild auftretende *Kreisbogendreieck*, sondern das zugehörige *Sehnendreieck* zu verstehen

2) bzw. der aus einer *Geraden* und einem *Kreisbogen* gebildete Winkel, welcher zum Vorschein kommt, wenn die Verlängerung von $\overline{x_0 x_1}$ oder $\overline{x_0 x_2}$ durch den Nullpunkt geht

3) Mit der analogen Modifikation wie in Fußn. 2).

Das vorstehende Ergebnis bleibt der Sache nach bestehen, wenn man an die Stelle des *geradlinigen* Winkels $\overline{x_1 x_0 x_2}$ denjenigen zweier beliebiger bei x_0 mit bestimmten *Tangenten* versehenen *Kurvenbögen* $\widehat{x_0 x_1}$, $\widehat{x_0 x_2}$ treten läßt, während dann die *Kreisbögen* $\widehat{y_0 y_1}$, $\widehat{y_0 y_2}$ durch die auf Grund der Beziehung $y = \frac{1}{x}$ sich ergebenden, gleichfalls mit *Tangenten* im Punkte y_0 versehenen *Kurvenbögen* zu ersetzen sind. Auch in diesem Falle werden zunächst die *Sehnendreiecke* $\overline{x_0 x_1 x_2}$, $\overline{y_0 y_1 y_2}$ bei hinlänglicher Verkleinerung von $|x_1 - x_0|$, $|x_2 - x_0|$ *„nahezu" ähnlich*, und die bei $x_1 \to x_0$, $x_2 \to x_0$ als Grenzlage der Sehnenwinkel zum Vorschein kommenden *Tangentenwinkel* müssen dann einander *gleich* sein. Bei der vorliegenden Abbildung schneiden sich also entsprechende, im Schnittpunkte[1]) mit Tangenten versehene Kurvenpaare *unter gleichen Winkeln* („isogonal"). Eine solche Abbildung heißt *winkeltreu*, *konform* oder auch (mit Rücksicht auf die Grenzbetrachtung, welche zu dem vorstehenden Ergebnis geführt hat) *„in den kleinsten Teilen" ähnlich*[2])

4. Die bezüglich der Abbildung vermittelst der Funktionen $y = ax + b$ und $y = \frac{1}{x}$ gefundenen Ergebnisse setzen uns in den Stand, auch den Fall der allgemeinsten linearen Funktion:

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'} \tag{16}$$

vollständig zu beherrschen. Ist dabei insbesondere; $a' = 0$, also:

$$y = \frac{a}{b'}\, x + \frac{b}{b'},$$

so kommt der bereits in § 16, Nr. 4 (S. 153) erledigte Fall der *ganzen* linearen Funktion zum Vorschein.

Wird jetzt zunächst angenommen, daß außer $a' \neq 0$ auch $a \neq 0$ (wobei *eine* der beiden Zahlen b, b' auch *Null* sein könnte), so findet man:

$$y = \frac{a}{a'} \cdot \frac{x + \frac{b}{a}}{x + \frac{b'}{a'}} = \frac{a}{a'}\left(1 - \frac{\frac{b'}{a'} - \frac{b}{a}}{x + \frac{b'}{a'}}\right) = \frac{a}{a'} - \frac{ab' - a'b}{a'^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{b'}{a'}}. \tag{17}$$

---

1) Die Punkte $x = 0$, $y = 0$ scheiden in diesem Zusammenhange aus.

2) Eigentlich hätte man jede dieser Bezeichnungen noch durch den Zusatz *„gleichstimmig"* genauer zu präzisieren. Denn selbstverständlich gibt es auch *ungleichstimmig konforme* Abbildungen. Eine solche wird im Anschluß an den zunächst vorliegenden Fall durch die Beziehung $y = \frac{1}{\xi - \eta i}$, und allgemein, wenn $y = f(x) = \varphi(\xi, \eta) + i \cdot \psi(\xi, \eta)$ eine *gleichstimmig konforme* Abbildung hervorbringt, durch die Funktion $y = \varphi(\xi, \eta) - i \cdot \psi(\xi, \eta)$ erzeugt. Doch pflegt man unter *konformer* Abbildung schlechthin stets eine *gleichstimmig konforme* zu verstehen.

Diese Umformung zeigt zunächst, daß $ab' - a'b \neq 0$ sein muß, wenn y sich nicht auf die Konstante $\frac{a}{a'}$ reduzieren soll. Zugleich erkennt man, daß das Endresultat von Gl. (17) auch noch für $a = 0$ gültig bleibt, da es in diesem Falle in das folgende sichtlich zutreffende übergeht:

$$y = \frac{b}{a'} \cdot \frac{1}{x + \frac{b}{a'}}.$$

Setzt man sodann:

$$x' = x + \frac{b'}{a'}, \quad x'' = \frac{1}{x'}, \quad y = -\frac{ab' - a'b}{a'^2} \cdot x'' + \frac{a}{a'}, \tag{18}$$

so besteht zwischen y und x die durch Gl. (18) geforderte Beziehung.

Die fragliche Abbildung setzt sich also zusammen aus: Parallelverschiebung, reziproker Transformation und Ähnlichkeitstransformation (bestehend aus Drehung mit Proportionaländerung und nochmaliger Parallelverschiebung). Sie ist also eine *konforme* und wird insbesondere, da hierbei *Kreisen* in der x-Ebene stets *Kreise* in der y-Ebene entsprechen (mit dem am Anfang von Nr. 3 gemachten Vorbehalt), als allgemeine *Kreisverwandtschaft* bezeichnet (von der die Ähnlichkeitstransformation, sowie die in Nr. 2 behandelte Beziehung $y = \frac{1}{x}$ nur besondere Fälle darstellen).

Da aus $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$ folgt:

$$x = \frac{-b'y + b}{a'y - a}, \tag{19}$$

so erscheint x auch als eindeutige, nämlich lineare Funktion von y, die vorliegende Abbildung ist also eine *umkehrbar* eindeutige, d. h. es entspricht nicht nur jedem Punkte x ein *einziger* Punkt y, sondern auch jedem Punkte y ein *einziger* Punkt x.

5. Zur Bestimmung der linearen Funktion $y = \frac{ax + b}{a'x + c'}$ stehen *vier* Konstanten (die nur der Bedingung $ab' - a'b \neq 0$ zu genügen haben) zur Verfügung. Da es aber freisteht, Zähler und Nenner durch eine dieser Konstanten zu dividieren, z. B. (unter vorläufiger Ausscheidung des Falles $a' = 0$, in welchem die Funktion sich auf eine *ganze* lineare reduziert) durch a', so hängt y außer von x schließlich nur von den Werten der *drei* Konstanten $\frac{a}{a'}, \frac{b}{a'}, \frac{b'}{a'}$ ab, über die man so verfügen kann, daß die fragliche Abbildung *drei* willkürlichen (unter sich widerspruchsfreien) Bedingungen genügt. Man kann z. B. verlangen, daß *drei* willkürlich angenommenen Punkten x_0, x_1, x_2 *drei* gleichfalls willkürlich angenommene Punkte y_0, y_1, y_2 (in der durch die Folge der Indizes fixierten Anordnung) entsprechen, mit der Einschränkung, daß das Dreieck $\overline{y_0 y_1 y_2}$ dem Dreieck $\overline{x_0 x_1 x_2}$ *nicht*

gleichstimmig ähnlich sein darf.[1]) Wird im übrigen zunächst angenommen, daß die fraglichen sechs Punkte sämtlich im Endlichen liegen und setzt man zur Abkürzung $\frac{a}{a'} = A$, $\frac{b}{a'} = B$, $\frac{b'}{a'} = B'$, so hat man zur Herstellung der fraglichen Funktion $y = \frac{Ax + B}{x + B'}$ die drei Bedingungen:

$$\frac{Ax_\nu + B}{x_\nu + B'} = y_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2), \tag{20}$$

anders geschrieben:

$$x_\nu A - y_\nu B' + B = x_\nu y_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2) \tag{20a}$$

zu erfüllen, welche in der Tat zur eindeutigen Bestimmung der Konstanten A, B, B' genau ausreichen.[2])

Kommt unter den Punkten x_ν oder (bzw. und) y_ν die Stelle ∞ vor, so hat man bei der erforderlichen Abänderung der Bedingungsgleichungen (20) nur zu berücksichtigen, daß nach der früher gegebenen Definition (s. § 15, Nr. 3, S. 143) $f(\infty) = \left(f\left(\frac{1}{x'}\right)\right)_{x'=0}$ zu setzen ist und $f(x) = \infty$ die Bedeutung von $\frac{1}{f(x)} = 0$ hat. Hiernach tritt also an die Stelle der Bedingungsgleichung (20)

$$(21) \begin{cases} \text{im Falle } x_\nu = \infty \text{ die folgende: } \left(\frac{A + Bx'_\nu}{1 + B'x'_\nu}\right)_{x'_\nu = 0} = y_\nu, \text{ d. h. } A = y_\nu, \\ \text{im Falle } y_\nu = \infty \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \frac{x_\nu + B'}{Ax_\nu + B} = 0, \quad \text{d. h. } B' = -x_\nu. \end{cases}$$

Die Annahme, daß für irgendein ν *gleichzeitig:* $x_\nu = \infty$, $y_\nu = \infty$, kommt hier nicht in Betracht (s. die erste der vorstehenden Gleichungen), sie entspricht dem zuvor ausgeschlossenen Falle $a' = 0$, in welchem y sich auf eine *ganze* lineare Funktion reduziert, die dann in der Tat für $x = \infty$ auch $y = \infty$ liefert.[3]) Bei jeder anderen, *eine* der beiden Stellen

---

1) Vgl. Nr. 3, Fußn. 1), S. 159: die daselbst am Anfang gemachte Aussage bleibt hier gültig, da die Wirkung der in der vorliegenden Transformation enthaltenen reziproken Transformation durch das Hinzutreten von Ähnlichkeitstransformationen keine wesentliche Änderung erleidet.

2) Eine Ausnahme würde nur eintreten, wenn:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

was aber ausgeschlossen ist, da ja diese Beziehung die gleichstimmige Ähnlichkeit der Dreiecke $\overline{x_0 x_1 x_2}$ und $\overline{y_0 y_1 y_2}$ nach sich ziehen würde (vgl. S. 154, Fußn. 1).

3) Es steht dann nur noch frei *zwei* Punkten x_0, x_1 *zwei* Punkte y_0, y_1 willkürlich zuzuordnen. Da die Funktion jetzt die Form hat: $y = Ax + B$, so findet

$x_\nu = \infty$, $y_\nu = \infty$ oder auch *beide* enthaltenden Zuordnung erweisen sich die nach Erfordernis gemäß der Vorschrift (21) abzuändernden drei Bedingungsgleichungen (20) ohne jede Einschränkung gerade als ausreichend zur eindeutigen Bestimmung der Konstanten A, B, B'. Als einfaches Beispiel wollen wir diese Bestimmung für den Fall durchführen, daß:

$$y = 0 \quad \text{für} \quad x = x_0,$$
$$y = \infty \quad ,, \quad x = x_1,$$
$$y = c \neq 0 \quad ,, \quad x = \infty.$$

Die erste dieser Bedingungsgleichungen liefert zunächst:

$$\frac{Ax_0 + B}{x_0 + B'} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{B}{A} = -x_0.$$

Aus der zweiten und dritten folgt mit Berücksichtigung der beiden Ergebnisse (21):

$$B' = -x_1, \quad A = c,$$

so daß sich schließlich ergibt:

$$y = c \cdot \frac{x - x_0}{x - x_1}, \tag{22}$$

eine lineare Funktion, welche in der Tat den vorgeschriebenen Bedingungen genügt Da aus Gl. (22) folgt:

$$|y| = |c|, \quad \text{wenn:} \quad |x - x_0| = |x - x_1|,$$

so beschreibt y einen Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $|c|$, wenn x den geometrischen Ort derjenigen Punkte durchläuft, welche von den beiden Punkten x_0, x_1 *gleichen Abstand* haben, also diejenige unbegrenzte *Gerade*, welche die Verbindungslinie $\overline{x_0 x_1}$ in deren Mittelpunkte rechtwinklig schneidet. Durch die fragliche Funktion werden also die beiden durch jene unbegrenzte Gerade begrenzten *Halbebenen* auf das Innere und Äußere des Kreises $|y| = |c|$ abgebildet, und zwar, da $y = 0$ für $x = x_0$, diejenige Halbebene, welche den Punkt x_0 enthält, auf das *Innere* des Kreises.

Setzt man $c = |c| \cdot \mathfrak{e}$, wo $\mathfrak{e}$ einen beliebigen Einheitsfaktor bedeutet, so erkennt man, daß man durch geeignete Wahl von $\mathfrak{e}$ noch erzielen kann, daß einem beliebig vorgeschriebenen Punkt der begrenzenden x-Geraden ein gleichfalls beliebig vorzuschreibender Punkt des Kreises $|y| = |c|$ entspricht.

---

man aus den beiden Bedingungsgleichungen:

$$Ax_0 + B = y_0$$
$$Ax_1 + B = y_1$$

ohne jede weitere Einschränkung

$$A = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad B = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}.$$

Setzt man speziell:

$$x_0 = 1\,, \quad x_1 = -1\,, \quad c = 1\,,$$

also:

$$y = \frac{x-1}{x+1}\,, \tag{23}$$

so erscheint als diejenige Gerade, welche die Strecke $\overline{x_0 x_1}$ im Mittelpunkte rechtwinklich schneidet, die *imaginäre Achse*, und es wird somit (wegen: $y = 0$ für $x = 1$) die *rechte x-Halbebene* auf das *Innere*, also die *linke* auf das *Äußere* des *y-Einheitskreises* abgebildet

Da andererseits aus Gl. (23) folgt:

$$x = -\frac{y+1}{y-1}\,, \tag{24}$$

so wird der *Kreis* $|x| = 1$ auf die *imaginäre y*-Achse abgebildet, und zwar

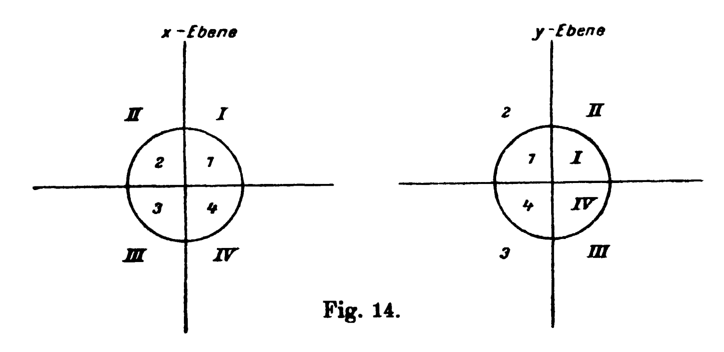


Fig. 14.

das *Innere* des *x-Einheitskreises* auf die *linke y-Halbebene* (wegen: $x = 0$ für $y = -1$).

Wird wieder gesetzt: $x = \xi + \eta i$, $y = \varphi + \psi i$, so hat man zunächst:

$$\begin{cases} |y| < 1 \quad \text{für:} \quad \xi > 0, \quad |x| < 1 \quad \text{für:} \quad \varphi < 0, \\ |y| > 1 \quad \;\;,, \quad\;\; \xi < 0, \quad |x| > 1 \quad \;\;,, \quad\;\; \varphi > 0, \end{cases} \tag{25}$$

außerdem nach Gl. (23):

$$\varphi + \psi i = \frac{\xi - 1 + \eta i}{\xi + 1 + \eta i} = \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1 + 2\eta i}{(\xi+1)^2 + \eta^2}\,,$$

und daher:

$$\psi = \frac{2\eta}{(\xi+1)^2 + \eta^2} \begin{cases} > 0, \quad \text{wenn:} \quad \eta > 0, \\ < 0, \quad \;\;,, \quad\quad\;\; \eta < 0. \end{cases} \tag{26}$$

Es entspricht also die *obere* y-Halbebene der *oberen* x-Halbebene, die *untere* der *unteren*. Durch Kombination der in (25) und (26) enthaltenen Angaben ergibt sich, daß die 8 Teilgebiete, in welche jede der beiden Ebenen durch die Koordinatenachsen und den Einheitskreis zerlegt wird, sich in der Weise gegenseitig entsprechen, wie durch die Numerierung in Fig. 14 angezeigt wird.

§ 18. Die Funktion $y = x^2$ und deren Umkehrung.

1. Die *lineare* Funktion besitzt, wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, die Eigenschaft, eine *umkehrbar* eindeutige Abbildung hervorzubringen (vgl. a. a. Nr. 4, Gl. (19)). Sie ist übrigens, wie hier nicht bewiesen, nur erwähnt werden soll, die einzige „analytische" Funktion, welcher diese Eigenschaft zukommt, anders ausgesprochen, welche eine in der ganzen Ebene *eindeutige Umkehrung* besitzt. Um an dieser Stelle wenigstens *ein* Beispiel des entgegengesetzten (also „allgemeinen") Typus zu diskutieren, wollen wir als einfachstes dieser Art die durch die Funktion:

$$y = x^2 \tag{1}$$

vermittelte Abbildung etwas näher betrachten.

Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen ergibt sich aus Gl. (1) durch Trennung des Reellen und Imaginären:

$$\begin{cases} \varphi = \xi^2 - \eta^2 \\ \psi = 2\xi\eta. \end{cases} \tag{2}$$

Durchläuft x vom Nullpunkte ausgehend die *positive* Hälfte der *reellen* Achse, also die Punkte $\xi \geqq 0$, $\eta = 0$, so wird auch $\varphi \geqq 0$, $\psi = 0$, d. h. auch y durchläuft die *positive* Hälfte der *reellen* Achse. Das letztere findet aber offenbar ganz ebenso für $\xi \leqq 0$, $\eta = 0$ statt, es entspricht also der *ganzen reellen* x-Achse *doppelt zählend* die *positiv-reelle* y-*Halb*achse.

Es beschreibe jetzt x eine *Parallele* zur reellen Achse, etwa im Abstande β und in der *oberen* Halbebene, so daß man also zu setzen hat:

$$\eta = \beta > 0, \quad x = \xi + \beta i \qquad (-\infty \leqq \xi \leqq +\infty)$$

und die Gleichungen (2) die Werte:

$$\begin{cases} \varphi = \xi^2 - \beta^2 \\ \psi = 2\beta\xi \end{cases} \tag{3}$$

für die Koordinaten des y-Bildes jener x-Geraden liefern. Um die Gleichung der fraglichen Bildkurve zu gewinnen, hat man lediglich ξ aus den beiden obigen Gleichungen zu eliminieren, indem man aus der zweiten den Wert $\xi = \frac{\psi}{2\beta}$ in die erste einführt. Man findet:

$$\psi^2 = 4\beta^2\varphi + 4\beta^4, \tag{4}$$

also die Gleichung einer *Parabel*, welche die *reelle* Achse zur *Symmetrieachse*, den Punkt $(-\beta^2, 0)$ zum *Scheitel* hat (wegen: $\psi = 0$ für $\varphi = -\beta^2$) und ihre *Öffnung* nach *rechts* erstreckt (wegen: $\psi^2 > 0$ für $\varphi > -\beta^2$). Da sie den *Parameter* $2\beta^2$ besitzt und andererseits die Entfernung des *Brennpunktes* vom *Scheitel* $(-\beta^2, 0)$ bekanntlich gleich dem *halben Parameter*, also $= \beta^2$ ist, so folgt, daß der *Brennpunkt* im *Nullpunkt* liegt. Da

$\psi = 2\beta\xi$ (nach der zweiten Gl. (3)), also ψ dasselbe Vorzeichen hat, wie ξ, so entspricht der *obere* Parabelast der *rechten* Hälfte der Geraden $x = \xi + \beta i$, der *untere* der linken Hälfte.

Legt man β alle möglichen positiven Werte bei, so entspricht der kontinuierlichen, die *obere x-Halb*ebene bedeckenden *Parallelenschar* eine kontinuierliche[1]) Schar *konfokaler Parabeln* (nämlich mit dem gemeinsamen Brennpunkt $y = 0$), welche die *ganze y*-Ebene bedeckt und für $\beta \to 0$ in die *doppelt* zählende *positiv* reelle *y-Halb*achse ausartet. Es wird also schon die *halbe x*-Ebene einschließlich der begrenzenden reellen Achse auf die *ganze y*-Ebene abgebildet, und zwar, abgesehen von den Punkten der reellen x-Achse (außer $x = 0$), *umkehrbar eindeutig*: in dem letztgenannten Falle entspricht *zwei* Punkten: $x = \xi > 0$ und $x = -\xi$ ein *einziger* Punkt $y = \xi^2$.

Ersetzt man β durch $-\beta$, läßt man also x eine *Parallele* zur reellen Achse im Abstande β und in der *unteren* Halbebene beschreiben, so bleibt die lediglich von β^2 abhängende Gleichung (4) ungeändert, es erscheint also als Abbild *dieser Parallelen* wieder *dieselbe Parabel*, wie in dem zuvor betrachteten Falle, mit dem einzigen Unterschiede, daß jetzt wegen $\psi = -2\beta\xi$ (s. Gl. (3)) die *rechte* Hälfte der Geraden $x = \xi - \beta i$ den *unteren*, die *linke* den *oberen* Parabelast erzeugt (entsprechend dem Umstande, daß zwei Punkte x und $-x$, welche dasselbe y erzeugen, in bezug auf den Nullpunkt sich *diagonal* gegenüberliegen). Bei veränderlichem $\beta > 0$ erzeugt dann wieder die unendliche Schar der die *untere x-Halb*ebene bedeckenden *Parallelen* die bereits zuvor gewonnene, die *ganze y*-Ebene bedeckende Schar *konfokaler Parabeln*, welche für $\beta \to 0$ in die *doppelt zählende* positiv reelle *y-Halb*achse ausartet.

Die Zusammenfassung dieser beiden Ergebnisse zeigt (wie übrigens sehr viel einfacher erkannt werden kann: vgl. Nr 4 am Anfang), daß durch Abbildung der x-Ebene vermittelst der Funktion $y = x^2$ die gesamte y Ebene genau *zwei*mal erzeugt wird mit Ausnahme des Punktes $x = 0$, welchem ja nur der *eine* Punkt $y = 0$ entspricht (übrigens auch der „Stelle“ $x = \infty$, welche ja ebenfalls nur die *eine* Stelle $y = \infty$ erzeugt)

2. Es beschreibe jetzt x eine *Parallele* zur *imaginären* Achse, etwa *rechts* davon und im Abstande α, so daß also:

$$\xi = \alpha > 0, \quad x = \alpha + \eta i \quad (-\infty \leqq \eta \leqq +\infty).$$

Die Bestimmungsgleichungen für die Koordinaten der entsprechenden y-Kurve nehmen dann die Form an:

$$(5) \qquad \begin{cases} \varphi = \alpha^2 - \eta^2 \\ \psi = 2\alpha\eta \end{cases}$$

1) „Kontinuierlich“, da ja $y = x^2$ eine *stetige* Funktion von x

und liefern durch Elimination von η die Beziehung:

$$\psi^2 = -4\alpha^2\varphi + 4\alpha^4 \tag{6}$$

als Gleichung der Bildkurve, also (wie die Vergleichung mit Gl. (4) ohne weiteres erkennen läßt) einer *Parabel* mit dem *Scheitel* $(\alpha^2, 0)$, der *reellen* Achse als *Symmetrieachse*, dem *Brennpunkte* $(0, 0)$ und nach *links* gerichteter Öffnung. Der unendlichen, für alle möglichen $\alpha > 0$ resultierenden Schar von *Vertikalen* entspricht also wiederum eine Schar von (unter sich und mit den zuvor betrachteten) *konfokalen* Parabeln, die aber für $\alpha \to 0$ in die *doppelt* zählende *negativ* reelle *y-Halb*achse (als Abbild der *imaginären* x-Achse) ausartet. Es wird also auf diese Weise die *rechte x-Halb*ebene auf die *ganze* y-Ebene abgebildet Das gleiche geschieht mit der *linken* Halbebene, wenn man α durch $-\alpha$ ersetzt.

3. Wir zeigen jetzt, daß auch die durch die Funktion $y = x^2$ vermittelte Abbildung eine *konforme* ist. Allerdings steht bereits soviel fest, daß dies bezüglich des Punktes $x = 0$ *nicht* zutrifft. Denn den beiden an der Stelle $x = 0$ unter einem Winkel von 180^0 zusammentreffenden Hälften der reellen Achse entspricht in der y-Ebene die *doppelt* zählende positiv reelle *Halb*achse, d. h. zwei *zusammenfallende*, also im Nullpunkt keinen sichtbaren Winkel, in Wahrheit einen solchen von 360 Grad[1]) bildende Strecken. Der Punkt $x = 0$ erweist sich aber als der einzige (im Endlichen gelegene) Ausnahmepunkt. Werden wieder mit y_0, y_1, y_2 diejenigen Punkte bezeichnet, welche auf Grund der Beziehung $y = x^2$ drei willkürlich angenommenen Punkten x_0, x_1, x_2 entsprechen, so findet man:

$$\frac{y_2 - y_0}{y_1 - y^0} = \frac{x_2^2 - x_0^2}{x_1^2 - x_0^2} = \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x_2 + x_0}{x_1 + x_0} = \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}\left(1 + \frac{x_2 - x_1}{x_1 + x_0}\right). \tag{7}$$

Ist sodann:

$$|x| = \varrho > 0,$$

ferner $\delta > 0$ nicht nur *an sich*, sondern auch *im Verhältnis zu ϱ sehr klein* und werden x_1, x_2 so *nahe* bei x_0 angenommen, daß:

$$|x_1 - x_0| < \delta, \quad |x_2 - x_0| < \delta,$$

so ergibt sich:

$$\left|\frac{x_2 - x_1}{x_1 + x_0}\right| = \left|\frac{(x_2 - x_0) - (x_1 - x_0)}{2x_0 + (x_1 - x_0)}\right| < \frac{2\delta}{2\varrho - \delta}, \tag{8}$$

d. h. gleichzeitig mit δ *beliebig klein*. Die fragliche Abbildung ist also, wie behauptet, für jedes endliche, von Null verschiedene x eine *konforme*.

Die Anwendung dieses Ergebnisses auf das vorhergehende, wonach den beiden Scharen sich *rechtwinklig* schneidender Horizontalen und Vertikalen zwei Scharen konfokaler Parabeln mit derselben Symmetrieachse entsprechen, liefert einen überaus einfachen Beweis des Satzes, daß

---

1) Vgl. Nr. 4 dieses Paragraphen.

zwei solche Parabelscharen sich *rechtwinklig* schneiden (anders ausgesprochen, daß jede der beiden Scharen die *orthogonalen Trajektorien* der anderen liefert).

4. Da je zwei Zahlen x und $-x$ denselben Wert $y = x^2$ erzeugen und da andererseits, wie die vorhergehenden Betrachtungen gezeigt haben, schon die ganze y-Ebene erzeugt wird, wenn man x auf eine *Halb*ebene z. B. die *rechte* oder *linke* beschränkt, also auch umgekehrt zu jedem endlichen y *zwei* zugehörige x vorhanden sind (abgesehen von $y = 0$, dem lediglich $x = 0$ zugeordnet ist), so ist die „*Umkehrung*" der Funktion $y = x^2$, d. h. x als Funktion von y eine *zweiwertige* Funktion, die mit $x = \sqrt{y}$ bezeichnet wird. Übrigens lassen sich, wie in I_3, § 70, Nr. 4 gezeigt wurde, die beiden Werte von $x = \sqrt{y} = \sqrt{\varphi + \psi i}$ mit Hilfe *positiver* Quadratwurzeln aus *positiv* reellen Zahlen explizite darstellen, nämlich (s. a. a. O. S. 539, Gl. (13)) unter der Voraussetzung $\psi \neq 0$:

$$(9)\quad x = \pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\varphi^2+\psi^2}+\varphi\right)} + \frac{\psi}{|\psi|}\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\varphi^2+\psi^2}-\varphi\right)}\cdot i\right).^{1)}$$

Dabei stellt offenbar der Faktor $\frac{\psi}{|\psi|}$ die *Einheit* mit dem *Vorzeichen* von ψ vor. Die Formel (9) umfaßt auch noch den zunächst ausgeschlossenen Fall $\psi = 0$, wenn man dem Symbol $\frac{\psi}{|\psi|}$ für $\psi = 0$ die Bedeutung von 1 beilegt. Alsdann wird nämlich:

$$(9a)\quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{\varphi}, & \text{wenn: } \varphi > 0, \\ x = \pm i\cdot\sqrt{-\varphi}, & \text{wenn: } \varphi < 0. \end{cases}$$

Man pflegt den aus der Formel (9) bei Wahl des *Plus*zeichens hervorgehenden Wert (also denjenigen mit *positiv* reellem Teil bzw., wenn der reelle Teil *Null* ist, den *positiv* imaginären) als den *Hauptwert* von $x = \sqrt{y}$ zu bezeichnen. Geben wir diesem Werte von x zur Unterscheidung das Zeichen x', dem anderen das Zeichen x'', so hat man also:

$$(10)\quad x' = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\varphi^2+\psi^2}+\varphi\right)} + \frac{\psi}{|\psi|}\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\varphi^2+\psi^2}-\varphi\right)}\cdot i,\quad x'' = -x'$$

und es gehören also zu jedem $y = \varphi + \psi i$ diese beiden *verschiedenen* Werte von x, die nur für $y = 0$, also wenn *gleichzeitig* $\varphi = 0$ und $\psi = 0$, in den *einen* $x' = x'' = 0$ zusammenfallen.

Diese beiden durchaus eindeutigen Funktionen x', x'' der beiden reellen Veränderlichen φ und ψ laufen völlig unverbunden nebeneinander

---

1) Alle Quadratwurzeln als *positiv* zu verstehen! (Genau genommen müßten sie durchweg in die üblichen Absolutwertstriche eingeschlossen werden, was lediglich zur Vereinfachung der Schreibweise unterblieben ist, da die obige Bemerkung genügt, um jedes Mißverständnis auszuschließen.)

her und, wenn sie auch in dem einen Punkte $\varphi = 0$, $\psi = 0$ zusammentreffen, so gehen sie auf Grund der Definitionsgleichungen (10) sofort wieder auseinander, wenn mindestens eine der beiden Veränderlichen φ und ψ den Wert 0 verläßt.

Dabei verlaufen die als Bestandteile von x', x'' auftretenden Quadratwurzeln: $\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\varphi^2 + \psi^2} \pm \varphi)}$, durchaus *stetig.*[1]) Dennoch wird (wegen $\frac{\psi}{|\psi|} = +1$ für $\psi \geqq 0$, dagegen $\frac{\psi}{|\psi|} = -1$ für $\psi < 0$) der *imaginäre* Teil für $\varphi < 0$, $\psi = 0$, also längs der *negativ reellen* y-Achse *unstetig*, indem z. B. derjenige von x' für $\varphi < 0$, $\psi = 0$ den Wert $\sqrt{|\varphi|} \cdot i$ erreicht[2]), während er für numerisch *hinlänglich kleine* $\psi < 0$ dem Werte $(-\sqrt{|\varphi|}\, i)$ *beliebig nahe* kommt.

Diese lediglich von dem willkürlichen Auseinanderreißen der beiden mit x', x'' bezeichneten „*Zweige*" der Funktion $x = \sqrt{y}$ herrührende Unstetigkeit verschwindet vollständig, wenn man sich durch Zurückgreifen auf die Gleichung $y = x^2$ von dem zwischen jenen beiden *Zweigen* tatsächlich bestehenden *Zusammenhange* Rechenschaft gibt. Läßt man etwa, nach Annahme einer Zahl $r > 0$, vom Punkte $x = +\sqrt{r}$ ausgehend, x einen im Punkte $x = -\sqrt{r}$ endigenden Halbkreis um den Nullpunkt in der Richtung der wachsenden Winkel, also in der oberen Halbebene beschreiben, so wird $y = x^2$, wegen $|y| = r$ sich auf einer Kreisbahn um den Nullpunkt bewegen, die im Punkte $y = r$ beginnt und ebendaselbst wieder endigt. Dabei durchläuft y diesen Kreis genau *ein*mal, und zwar gleichfalls in der Richtung der wachsenden Winkel. Denn, wie aus dem in § 14, Nr. 4 (S. 139) über die geometrische Darstellung der Multiplikation komplexer Zahlen gesagten hervorgeht, muß $y = x^2$ den Winkel 2ϑ beschreiben, wenn x den Winkel ϑ beschreibt. Hiernach wird also der

---

1) Um die *Stetigkeit* einer solchen Quadratwurzel zu erkennen, genügt es offenbar diejenige von $\sqrt{\varrho}$ für $\varrho \geqq 0$ festzustellen. Daß für $\varrho = 0$ *Stetigkeit* (sc nach rechts) besteht, ist unmittelbar ersichtlich, denn, um $\sqrt{\varrho} < \varepsilon$ zu machen, braucht man ja nur $\varrho < \varepsilon^2$ anzunehmen. Ist andererseits $\varrho > \varrho_0 > 0$, so kann man $h > 0$ von vornherein so annehmen, daß auch noch $\varrho - h \geqq \varrho_0$. Alsdann hat man:

$$\sqrt{\varrho \pm h} - \sqrt{\varrho} = \frac{\pm h}{\sqrt{\varrho \pm h} + \sqrt{\varrho}},$$

also:

$$|\sqrt{\varrho \pm h} - \sqrt{\varrho}| < \frac{h}{2\sqrt{\varrho_0}},$$

d. h. gleichzeitig mit h *beliebig klein*.

2) Der *reelle* Teil von x' ist übrigens gleichzeitig $= 0$, so daß geradezu: $x' = \sqrt{|\varphi|} \cdot i$ wird (in Übereinstimmung mit der ohne weiteres ersichtlichen Tatsache, daß für *negativ* reelle Werte von y die Quadratwurzel aus y *rein imaginär* ausfällt).

von x beschriebene *Halbkreis* mit dem Radius $\sqrt{r}$ auf den *ganzen* von y mit dem Radius r beschriebenen Kreis abgebildet. Sieht man jetzt umgekehrt diesen letzteren als den *primären* an, macht also y zur *unabhängigen* Veränderlichen und ordnet dem *Anfangs*werte $y = r$ als *Anfangs*wert den Wert $x = +\sqrt{r}$ zu, so hat x, wenn y nach Umlaufung des ganzen Kreises $|y| = r$ wieder in seinen *Anfangs*wert *zurückgekehrt* ist, statt dessen den Wert $x = -\sqrt{r}$ angenommen, ist also von einem Werte, der dem zuvor mit x' bezeichneten Zweige angehört, zu dem entsprechenden (d. h. zur nämlichen Stelle $y = r$ gehörigen) des Zweiges x'' übergegangen. Dieser Übergang von einem Zweige zum andern vollzieht sich vollkommen *stetig* gerade da, wo nach dem zuvor gesagten der Zweig x' eine *Unstetigkeit* erleiden würde, nämlich, sobald y die *negativ* reelle Achse, also den Wert $(-r)$ erreicht bzw. überschreitet. In der Tat wird ja für $y = -r$ zunächst $x = \sqrt{r} \cdot i$ und tritt, sobald y seine Kreisbahn weiter verfolgt, in den *zweiten* Quadranten ein, bekommt also einen *negativen reellen* Teil und geht somit in den Zweig x'' über.

Der Hauptpunkt des vorstehenden Ergebnisses, daß nämlich x als Funktion von y *nicht* in den Anfangswert $+\sqrt{r}$ zurückkehrt, sondern in den *anderen* (einzig noch möglichen) Wert $(-\sqrt{r})$ übergegangen ist, wenn y seinen Anfangswert r wieder erreicht hat, bleibt offenbar bestehen, wenn man den Radiusvektor $\overline{Oy}$ *nicht* als *konstant*, sondern als *veränderlich* annimmt, und zwar in der Weise, daß er gleichzeitig mit dem stetig wachsenden Winkel ϑ, den er mit der positiv reellen y-Achse bildet, sich irgendwie *stetig* ändert, mit der einzigen Beschränkung, für $\vartheta = 360^0$ wieder denselben Wert r anzunehmen, wie für $\vartheta = 0^0$. Da der entsprechende Radiusvektor $\overline{Ox}$ dann allemal mit der reellen x-Achse nur den Winkel $\frac{\vartheta}{2}$ bildet, so erscheint gerade so wie zuvor $(-\sqrt{r})$ als Endwert von x. Es hat keine Schwierigkeit, dieses Ergebnis auf den Fall auszudehnen, daß man die Annahme *beständigen* Wachsens des Winkels ϑ fallen läßt, auch kann als Anfangs- und Endwert von y statt des positiv reellen Wertes $y = r$ ein ganz beliebiger: $y = y_0 + 0$, als Anfangswert von x ein beliebiger der beiden zugehörigen Werte von $\sqrt{y_0}$ gewählt werden. Beschreibt also y von irgendeiner Stelle y_0 ausgehend und dahin wieder zurückkehrend eine *stetige einfach geschlossene Kurve um den Nullpunkt* und legt man x zunächst *einen* beliebig gewählten der beiden möglichen Werte von $\sqrt{y_0}$ bei, so ist x nach Vollendung des genannten y-Weges *stetig* in den *anderen* Wert von $\sqrt{y_0}$ übergegangen.

Das vorstehende Beispiel (das einfachste seiner Art) dürfte vorläufig genügen, um erkennen zu lassen, daß durch die Ausdehnung des Bereiches der *unabhängigen* Veränderlichen (im vorliegenden Falle also y) auf

das *komplexe* Zahlengebiet ein ganz neues Licht auf die Natur der *mehrdeutigen* Funktionen geworfen wird: durch Aufzeigung eines inneren gesetzmäßigen Zusammenhanges zwischen den verschiedenen Werten bzw. „Zweigen" einer solchen Funktion, welcher bei Beschränkung auf *reelle* Werte der unabhängigen Veränderlichen gänzlich verborgen bleibt, werden diese erst zu einem *einheitlichen analytischen Gebilde* vereinigt.

Kapitel III.

Rationale Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

§ 19. Algebraische Definition der Derivierten einer ganzen (rationalen) Funktion $g(x)$. — Die Taylorsche Formel für ganze Funktionen. — Die erste Derivierte eines Produkts von ganzen Funktionen. — Die Derivierten als Differentialquotienten.

1. Um weitere Anhaltspunkte für den Aufbau einer Theorie der analytischen Funktionen zu gewinnen, beschäftigen wir uns jetzt mit deren grundlegendem Vorbilde (vgl. § 13, Nr. 2, S. 123), den *rationalen* Funktionen, insbesondere mit denjenigen ihrer Eigenschaften, welche mit der Einführung einer *komplexen* Veränderlichen zusammenhängen.

Wir betrachten zunächst *ganze rationale* oder, wie wir weiterhin zumeist kürzer sagen werden, *ganze* Funktionen einer komplexen Veränderlichen x, also Ausdrücke von der Form:

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{1}$$

wo n eine *natürliche*, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *beliebige komplexe* Zahlen (einschließlich der Null) bedeuten. Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der *Grad* der ganzen Funktion mit den *Koeffizienten* $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Man erkennt auf Grund der elementaren Rechnungsregeln ohne weiteres, daß Summen und Produkte beliebig vieler *ganzer* Funktionen stets wieder *ganze* Funktionen liefern.

Aus den allgemeinen, die *Stetigkeit* einer Funktion der komplexen Veränderlichen x betreffenden Sätzen hat sich bereits die *Stetigkeit* der Funktion $g(x)$ für jede im Endlichen gelegene Stelle ergeben[1]) und daraus folgt weiter die *gleichmäßige* Stetigkeit für jeden abgeschlossenen endlichen Bereich.[2]) Um aber die Veränderung von $g(x)$ beim Übergange von

1) Vgl. § 15, Nr. 5, S. 146, Fußn. 2.
2) A. a. O. S. 147.

x in $x + h$ genauer abschätzen zu können, wollen wir den Ausdruck:
$g(x+h) = a_n(x+h)^n + a_{n-1}(x+h)^{n-1} + \cdots + a_\nu(x+h)^\nu + \cdots + a_1(x+h) + a_0$
in der Weise umformen, daß wir jedes Glied nach dem binomischen Satze entwickeln und sodann alles nach steigenden Potenzen von h ordnen. Man findet zunächst, wenn man die aus der Entwicklung von $(x + h)^n$, $(x + h)^{n-1}, \ldots, (x + h)^\nu, \ldots$ hervorgehenden Gliedes als 1te, 2te, ..., $(n - \nu + 1)$te, ... Kolonne anordnet:

$$
\begin{aligned}
(2)\ g(x+h) = {} & a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_\nu x^\nu + \cdots \\
& \qquad + a_1 x \\
& + (n)_1 a_n x^{n-1} h + (n-1)_1 a_{n-1} x^{n-2} h^2 + \cdots + (\nu)_1 a_\nu x^{\nu-1} h + \cdots \\
& \qquad + (1)_1 a \\
& + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
& + (n)_\nu a_n x^{n-\nu} h^\nu + (n-1)_\nu a_{n-1} x^{n-\nu-1} h^\nu + \cdots + (\nu)_\nu a_\nu \cdot h^\nu \\
& + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
& + (n)_{n-1} a_n x\, h^{n-1} + (n-1)_{n-1} a_{n-1} \cdot h^{n-1} \\
& + (n)_n a_n \cdot h^n.
\end{aligned}
$$

Bringt man den Koeffizienten von h^ν, nämlich:

$$(n)_\nu a_n x^{n-\nu} + (n-1)_\nu a_{n-1} x^{n-\nu-1} + \cdots + (\nu)_\nu a_\nu$$

auf die Form:

$$\frac{1}{\nu!}\{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)a_n x^{n-\nu} + (n-1)(n-2)\cdots(n-\nu)a_{n-1}x^{n-\nu-1} + \cdots + \nu(\nu-1)\cdots 1 \cdot a_\nu\}$$

und setzt:

$$
\begin{aligned}
(3)\ g^{(\nu)}(x) = {} & n(n-1)\cdots(n-\nu+1)a_n x^{n-\nu} \\
& + (n-1)(n-2)\cdots(n-\nu)a_{n-1}x^{n-\nu-1} + \cdots + \nu(\nu-1)\cdots 1 \cdot a_\nu
\end{aligned}
$$

$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, also insbesondere

$$
(3\mathrm{a})\left\{
\begin{aligned}
g'(x) &= n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 3 \cdot a_3 x^2 + 2 \cdot a_2 x + 1 \cdot a_1 \\
g''(x) &= n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x \\
& \qquad + 2 \cdot 1 \cdot a_2 \\
& \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
g^{(n-1)}(x) &= n(n-1)\cdots 2 \cdot a_n x + (n-1)(n-2)\cdots 1 \cdot a_{n-1} \\
g^{(n)}(x) &= n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 \cdot a_n = n!\, a_n \quad (\text{also } \textit{konstant}),
\end{aligned}
\right.
$$

so geht die Entwicklung (2), wenn man sie nach Zeilen summiert, in die folgende (die „*Taylorsche Formel*" für eine ganze Funktion) über:

$$(4)\qquad g(x+h) = g(x) + \frac{g'(x)}{1} \cdot h + \frac{g''(x)}{2!} \cdot h^2 + \cdots + \frac{g^{(n)}(x)}{n!} \cdot h^n$$

oder, kürzer geschrieben:

(4a) $$g(x+h) = g(x) + \sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, g^{(\nu)}(x) \cdot \frac{h^\nu}{\nu!} = \sum_{0}^{n}{}_{\nu}\, g^{(\nu)}(x)\ \frac{h^\nu}{\nu!}$$

(falls man im letzten Ausdruck $g^{(0)}(x)$ die Bedeutung von $g(x)$ und dem Symbol $0!$ diejenige von 1 beilegt).

Setzt man in Gl. (1) und (3) speziell $x = 0$, so folgt:

(5) $$\begin{cases} g(0) = a_0 \\ g'(0) = 1!\,a_1 \\ g''(0) = 2!\,a_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ g^{(n-1)}(0) = (n-1)!\,a_{n-1} \\ g^{(n)}(0) = n!\,a_n. \end{cases}$$

2. Um nun zunächst aus der Entwicklung (4) einen neuen Beweis für die Stetigkeit von $g(x)$ zu gewinnen, bringe man Gl. (4) zunächst auf die Form:

(6) $$g(x+h) = g(x) = h\left\{\frac{g'(x)}{1!} + \frac{g''(x)}{2!}h + \cdots + \frac{g^{(n)}(x)}{n!}h^{n-1}\right\}.$$

Für jedes bestimmte x werden die absoluten Beträge der Zahlen $\frac{g^{(\nu)}(x)}{\nu!}$ eine gewisse endliche Zahl M nicht übersteigen, und man hat daher, wenn $|h| = \varrho < 1$ angenommen wird:

(7) $$|g(x+h) - g(x)| \leqq M \cdot \varrho(1 + \varrho + \cdots + \varrho^{n-1}) < \frac{M\varrho}{1-\varrho}.$$

Ist jetzt $\varepsilon > 0$ beliebig vorgelegt, so hat man sicher:

(8a) $$|g(x+h) - g(x)| < \varepsilon,$$

wenn:

(8b) $$\frac{M\varrho}{1-\varrho} \leqq \varepsilon, \quad \text{d. h. wenn:} \quad \varrho \leqq \frac{\varepsilon}{M+\varepsilon},$$

so daß also jeder bestimmten Stelle x eine gewisse Umgebung (ϱ) zugeordnet werden kann, derart, daß für alle dieser Umgebung angehörigen Stellen $x+h$ die Ungleichung (7) befriedigt wird.[1])

---

1) Man kann übrigens auf diese Weise auch die *gleichmäßige* Stetigkeit von $g(x)$ für jeden endlichen abgeschlossenen Bereich L direkt erschließen.

Ist nämlich zunächst die Stetigkeit von $g(x)$ also auch von $g^{(\nu)}(x)$ für jede einzelne Stelle x erwiesen, so folgt, daß *jede* der Zahlen $\left|\frac{g^{(\nu)}(x)}{\nu!}\right|$, also auch ihre Gesamtheit für den Bereich $\mathfrak{B}$ eine *endliche obere Grenze* (sogar ein reales Maximum) G besitzt. Man hat alsdann nur, um zu dem fraglichen Resultate zu gelangen, in Ungl. (6), (8) G statt M zu substituieren.

3. Die oben (Gl. (3)) mit $g^{(\nu)}(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ bezeichnete ganze Funktion $(n-\nu)^{\text{ten}}$ Grades, welche den Koeffizienten von $\frac{h^\nu}{\nu!}$ in der Entwicklung von $g(x+h)$ nach ganzen Potenzen von h darstellt, wird die ν^{te} *Ableitung* oder ν^{te} *Derivierte*[1]) von $g(x)$ genannt und generell auch folgendermaßen bezeichnet:

$$(9a) \qquad g^{(\nu)}(x) = D_x^\nu g(x), \quad \text{speziell:} \quad g'(x) = D_x^1 g(x) = D_x g(x),$$

oder, falls kein Mißverständnis möglich, kürzer:

$$(9b) \qquad g^{(\nu)}(x) = D^\nu g(x) \quad \text{bzw.} \quad g'(x) = Dg(x).$$

Die Definitionsgleichungen für die $1^{\text{te}}, 2^{\text{te}}, \ldots, \nu^{\text{te}}$ Derivierte lassen deren einfaches Bildungsgesetz deutlich erkennen: die 1te Derivierte entsteht offenbar aus $g(x)$, indem man jedes Glied mit seinem *Exponenten multipliziert*, diesen selbst *um eine Einheit erniedrigt* und *das konstante Glied durch Null ersetzt (also wegläßt)*. Da sodann, wie ein Blick auf die zweite der Gleichungen (3a) lehrt, die 2te Derivierte von $g(x)$ durch das eben beschriebene Verfahren aus $g'(x)$ gebildet werden kann, so läßt sich dieselbe auch auffassen als die 1te Derivierte von $g'(x)$. Und man erkennt hiernach allgemein, daß man die $(\mu+\nu)^{\text{te}}$ Derivierte von $g(x)$ auch erhält, wenn man die ν^{te} Derivierte von $g^{(\mu)}(x)$ oder die μ^{te} Derivierte von $g^{(\nu)}(x)$ bildet, in Zeichen:

$$(10a) \qquad g^{(\mu+\nu)}(x) = (g^{(\mu)})^{(\nu)}(x) = (g^{(\nu)})^{(\mu)}(x)$$

oder auch:

$$(10b) \qquad D^{\mu+\nu} g(x) = D^\mu (D^\nu g(x)) = D^\nu (D^\mu g(x)).$$

Ferner wird man mit Zugrundelegung desjenigen Gesetzes, welches allgemein die $(\nu+1)^{\text{te}}$ Derivierte aus der ν^{ten} bilden lehrt, sagen können, daß die $(n+1)^{\text{te}}$ Derivierte von $g(x)$ als 1te Derivierte der *Konstante* $g^{(n)}(x)$ (somit die Derivierte *jeder Konstante*) und um so mehr jede von noch höherer Ordnung den Wert 0 hat: dies steht auch mit der ursprünglichen Definition von $g^{(\nu)}(x)$ $\left(\text{als Koeffizient von } \frac{h^\nu}{\nu!}\right.$ in der Entwicklung von $\left.g(x+h)\right)$ völlig im Einklange, da ja die Koeffizienten von h^{n+1}, $h^{n+2}, \ldots$ in der Entwicklung von $g(x+h)$ sämtlich *Null* sind.

Reduziert sich die ganze Funktion $g(x)$ auf das eine Glied ax^n, so folgt daß:

$$(11) \qquad D^\nu ax^n = n(n-1)\cdots(n-\nu+1)\cdot ax^{n-\nu}.$$

---

1) Ich werde mich im folgenden ausschließlich des *zweiten* Ausdruckes statt des im allgemeinen üblicheren *ersten* bedienen, weil es bei der Ausdehnung des vorliegenden Begriffes auf *Potenzreihen* zweckmäßig erscheint, den Ausdruck „*abgeleitete*" Reihe in anderem Sinne zu gebrauchen als den Ausdruck „*derivierte*" Reihe.

Es gilt auch, wenn x_0 irgendeine Konstante bedeutet, die analoge Formel:

(12) $$D^\nu a(x-x_0)^n = n(n-1)\cdots(n-\nu+1)\cdot a(x-x_0)^{n-\nu},$$

wie sich ohne weiteres aus der Entwicklung:

$$(x+h-x_0)^n = \{(x-x_0)+h\}^n = (x-x_0)^n$$
$$+\frac{n}{1}(x-x_0)^{n-1}h+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)}{1\cdot 2\cdots\nu}(x-x_0)^{n-\nu}h^\nu+\cdots+h^n$$

ergibt.

Hat man ferner *zwei* ganze Funktion $g_1(x)$, $g_2(x)$ von den Graden n_1 und n_2, so lehrt die Multiplikation der beiden Entwicklungen:

$$g_1(x+h) = g_1(x)+g_1'(x)\cdot\frac{h}{1}+g_1''(x)\cdot\frac{h^2}{2!}+\cdots+g_1^{(n_1)}(x)\cdot\frac{h^{n_1}}{n_1!}$$

$$g_2(x+h) = g_2(x)+g_2'(x)\cdot\frac{h}{1}+g_2''(x)\cdot\frac{h^2}{2!}+\cdots+g_2^{(n_2)}(x)\cdot\frac{h^{n_2}}{n_2!}$$

daß:

(13) $$D(g_1(x)\cdot g_2(x)) = g_1(x)\cdot g_2'(x)+g_1'(x)\cdot g_2(x).$$

[Hieraus speziell: $D(a\cdot g(x)) = a\cdot g'(x)$].

Uud analog (bzw. durch vollständige Induktion) ergibt sich, wenn gesetzt wird:

(14) $$g(x) = g_1(x)\cdot g_2(x)\cdots g_k(x),$$

(wo die $g_\nu(x)$ ($\nu = 1, 2, \ldots, k$) sämtlich wiederum ganze Funktionen bedeuten), daß:

(15) $$g'(x) = Dg(x) = g_1(x)\cdots g_{k-1}(x)\cdot g_k'(x)$$
$$+g_1(x)\cdots g'_{k-1}(x)\cdot g_k(x)+\cdots+g_1'(x)\cdot g_2(x)\cdots g_k(x),$$

oder kürzer geschrieben (NB. unter der Voraussetzung, daß keine der Funktionen $g_1(x), \ldots, g_k(x)$ für die gerade betrachtete Stelle x den Wert 0 hat):

(16) $$g'(x) = g(x)\left\{\frac{g_1'(x)}{g_1(x)}+\frac{g_2'(x)}{g_2(x)}+\cdots+\frac{g_k'(x)}{g_k(x)}\right\}.$$

Ist speziell:

(17) $$g(x) = a(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\cdots(x-x_k)^{n_k},$$

also etwa:

$$g_1(x) = a(x-x_1)^{n_1},\qquad g_1'(x) = a\cdot n_1(x-x_1)^{n_1-1}$$

und für $\nu > 1$:

$$g_\nu(x) = (x-x_\nu)^{n_\nu},\qquad g_\nu'(x) = n_\nu\cdot(x-x_\nu)^{n_\nu-1}$$

so wird:

(18) $$g'(x) = g(x)\left\{\frac{n_1}{x-x_1}+\frac{n_2}{x-x_2}+\cdots+\frac{n_k}{x-x_k}\right\}$$ [1].

---

1) Es verdient bemerkt zu werden, daß die Herleitung und folglich auch Gültigkeit der Formel (18) unabhängig davon ist, ob die $x_1, x_2, \ldots, x_k$ durchweg

4. Die Einführung der *Derivierten* einer ganzen Funktion $g(x)$ gibt noch zu folgender Betrachtung Anlaß. Setzt man zunächst Gl. (4) in die Form:

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - g'(x) = h\left\{\frac{g''(x)}{2!} + \frac{g'''(x)}{3!}h + \cdots + \frac{g^{(n)}(x)}{n!}h^{n-2}\right\}$$

und bezeichnet bei festgehaltenem x mit M die obere Grenze der endlichen Zahlen:

$$\left|\frac{g''(x)}{2!}\right|, \ldots, \left|\frac{g^{(n)}(x)}{n!}\right|,$$

so wird für $|h| = \varrho < 1$:

$$(19)\qquad \left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - g'(x)\right| \leqq M\varrho(1+\varrho+\cdots+\varrho^{n-2}) < \frac{M\varrho}{1-\varrho}.$$

Betrachtet man also h als (komplexe) Veränderliche, so lehrt die Ungleichung (19), daß bei Anwendung des Limesbegriffs in dem früher[1]) definierten allgemeinsten Sinne, insbesondere also, wenn man h auf einem beliebigen *Wege* gegen Null konvergieren läßt:

$$(20)\qquad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$$

wird — eine Relation, der man auch die Form geben kann:

$$(21)\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = g'(x),$$

wenn man mit $\Delta x = h$ das *Inkrement* oder die *Änderung* von x und dem entsprechend mit $\Delta g(x)$ das *zugehörige Inkrement* (die durch den Übergang von x zu $x+\Delta x$ hervorgebrachte *Änderung*) des Funktionswertes $g(x)$ bezeichnet, so daß also:

$$(22)\qquad \Delta g(x) = g(x+\Delta x) - g(x).$$

Man pflegt sodann die Gleichung (21) kürzer folgendermaßen zu schreiben:

$$(23)\qquad \frac{dg(x)}{dx} = g'(x)\quad (= D_x g(x)).$$

---

voneinander verschieden sind oder nicht. Wäre etwa $g(x)$ statt in der Form (17) folgendermaßen vorgelegt: $g(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, wo nur x_1, $x_2, \ldots, x_k$ voneinander verschieden, dagegen jede der Zahlen $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ mit irgendeiner jener früheren identisch sein möge, so daß $g(x)$ durch Zusammenfassung der gleichen Faktoren zu Potenzen die Form (17) annimmt, so würde die Anwendung der Formel (18) auf die *jetzige* Schreibweise von $g(x)$ ergeben:

$$g'(x) = g(x)\left\{\frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \cdots + \frac{1}{x-x_n}\right\}.$$

Dabei würde aber jetzt jeder der Summanden $\frac{1}{x-x_1}, \frac{1}{x-x_2}, \ldots, \frac{1}{x-x_k}$ bzw. n_1-, n_2-, ..., n_k-mal vorkommen, so daß das Resultat mit dem in Gl. (18) enthaltenen gleichwertig ist.

1) Vgl. § 15, Nr. 3 (S. 142) und § 12, Nr. 2, 3 (S. 106/7).

Dabei bedeutet also $\frac{dg(x)}{dx}$ nichts anderes als den *Grenzwert* für das Verhältnis der Inkremente $\Delta g(x)$ und Δx, falls Δx — und vermöge der *Stetigkeit* von $g(x)$ auch $\Delta g(x)$ — gegen *Null* konvergiert. Dieser *Grenzwert* des „*Differenzenquotienten*" $\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$ wird nun als *Differentialquotient* von $g(x)$ bezeichnet, und man kann daher den Inhalt der Gl. (23) jetzt folgendermaßen aussprechen:

> *Die ganze Funktion $g(x)$ besitzt für jeden endlichen Wert x einen eindeutig bestimmten, d. h. lediglich von der Wahl des Wertes x, nicht aber von der besonderen Art des Grenzüberganges* (geometrisch gesprochen: *vom „Differentiationswege"*, weniger korrekt: von der *„Fortschreitungsrichtung"*[1]) *abhängigen Differentialquotienten Sein Wert ist gleich der Derivierten $g'(x)$.*

Ich bemerke ausdrücklich, daß die Begriffe *„Differentialquotient"* und *„Derivierte"*, also auch die *Operationssymbole* $\frac{d}{dx}$ und D_x, in dem vorliegenden Zusammenhange an sich *durchaus verschiedene Bedeutung* haben. Der *Differentialquotient* bezeichnet ein für allemal das Resultat eines bestimmten *Grenzüberganges*, des *„Differentiationsprozesses"*, und seine Definition ist offenbar in keiner Weise an den gerade hier vorliegenden Fall der ganzen rationalen Funktion gebunden. Dagegen bedeutet die *Derivierte* lediglich eine aus einer gegebenen *ganzen Funktion* nach *bestimmter Vorschrift* zu bildende *ganze Funktion*, und dieser Begriff wird späterhin nur insofern eine *Erweiterung* erfahren, als er sich unmittelbar auf eine *gewöhnliche Potenzreihe* (d. h. eine konvergierende, nach ganzen positiven Potenzen von x bzw. $(x - x_0)$ fortschreitende Reihe) übertragen läßt.

Da die *zweite* Derivierte von $g(x)$ mit der *ersten* von $g'(x)$ identisch ist, und die letztere wiederum den *Differentialquotienten* von $g'(x)$ darstellt, so hat man zunächst:

$$g''(x) = \frac{dg'(x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dg(x)}{dx}\right)}{dx}.$$

---

1) Man hat nämlich bei jenem Grenzprozesse nicht nur an ein Fortschreiten in bestimmter *Richtung*: d. h. in *gerader Linie*, sondern auf einem ganz *beliebig anzunehmenden Wege* zu denken, d. h. der Quotient $\frac{g(x') - g(x)}{x' - x}$ besitzt einen ganz bestimmten, lediglich von x abhängigen Grenzwert, wenn x' im Sinne der allgemeinen Grenzwertdefinition eine ganz beliebige Wertereihe mit dem Grenzwerte x durchläuft, insbesondere also, geometrisch gesprochen, wenn der *bewegliche* Punkt x' eine *ganz beliebige* dem *festen* Punkte x zustrebende *Jordan*sche Kurve beschreibt. (Dieselbe darf z. B. auch den Punkt x in unendlich vielen Windungen spiralförmig umlaufend oder mit unendlich vielen Oszillationen sich ihm nähernd gedacht werden.)

Man nennt alsdann den durch *zweimalige* Anwendung des Differentiationsprozesses aus $g(x)$ hervorgehenden Grenzwert den *zweiten Differentialquotienten* von $g(x)$ und bezeichnet ihn kürzer durch das Symbol: $\frac{d^2 g(x)}{dx^2}$, so daß also die letzte Gleichung jetzt folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$(24)\qquad \frac{d^2 g(x)}{dx^2} = g''(x) \quad (= D_x^2 g(x)),$$

d. h. der *zweite Differentialquotient* von $g(x)$ ist gleich der *zweiten Derivierten*. Und analog ergibt sich allgemein:

$$(25)\qquad \frac{d^\nu g(x)}{dx^\nu} = g^\nu(x) \quad (= D_x^\nu g(x)),$$

wenn man mit $\frac{d^\nu g(x)}{dx^\nu}$ den ν^{ten} Differentialquotienten von $g(x)$ d. h. den durch ν-malige Anwendung des Differentiationsprozesses resultierenden Grenzwert bezeichnet.

Insbesondere ergibt sich aus Gl. (25), daß:

$$(26)\qquad \frac{d^n g(x)}{dx^n} = n!\,a_n, \quad \frac{d^{n+\mu} g(x)}{dx^{n+\mu}} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

5. Legt man in Gl. (4) der Veränderlichen x einen beliebigen, aber als irgendwie *fixiert* zu denkenden Wert x_0 bei, so daß also:

$$(27)\quad g(x_0 + h) = g(x_0) + g'(x_0)\cdot\frac{h}{1!} + g''(x_0)\frac{h^2}{2;} + \cdots + g^{(n)}(x_0)\cdot\frac{h^n}{n!},$$

und betrachtet sodann h als komplexe Veränderliche, so geht die letzte Beziehung, wenn man noch:

$$x_0 + h = x, \quad \text{also} \quad h = x - x_0$$

setzt, in die folgende über:

$$(28)\qquad g(x) = g(x_0) + g'(x_0)\cdot\frac{x - x_0}{1!} + g''(x_0)\cdot\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + g^{(n)}(x_0)\cdot\frac{(x - x_0)^n}{n!}.$$

Diese Gleichung, welche offenbar die Umformung einer ganzen Funktion von x in eine solche von $(x - x_0)$ liefert, lehrt aber, daß der Wert von $g(x)$ für *jede beliebige* Stelle x eindeutig bestimmt ist, wenn für *irgendeine bestimmte* Stelle $x = x_0$ die Werte von $g(x_0)$ und $g^{(\nu)}(x_0)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ bekannt sind.

Nimmt man speziell $x_0 = 0$, so ergibt sich die Beziehung (die *„Mac-Laurinsche Formel“*):

$$(29)\qquad g(x) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

welche in der Tat mit der ursprünglichen Definition von $g(x)$, nämlich:

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

zusammenfällt, da ja nach (5) die Beziehungen bestehen:

$$(30) \qquad a_0 = g(0),\ a_1 = \frac{g'(0)}{1!},\ a_2 = \frac{g''(0)}{2!},\ \ldots,\ a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}.$$

In diesem Zusammenhange erscheint also Gl. (28) als eine Verallgemeinerung des (selbstverständlichen) Satzes, daß eine ganze Funktion n^{ten} Grades durch ihre $n + 1$ Koeffizienten eindeutig bestimmt ist.

§ 20. Verhalten einer ganzen Funktion für relativ große und relativ kleine Werte von $|x|$.

1. Hilfssatz. *Bedeuten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ beliebig vorgelegte komplexe Zahlen (die auch teilweise $= 0$ sein können), so lassen sich jeder positiven Zahl α zwei positive Zahlen R, r so zuordnen, daß:*

$$\text{(I)} \quad |a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}| \leqq \alpha \{|x|^n - 1\} < \alpha \cdot |x|^n \quad \text{für } |x| \geqq R.$$

$$\text{(II)} \quad |a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n| \leqq \alpha \{1 - |x|^n\} < \alpha \qquad \text{für } |x| \leqq r.$$

Beweis zu (I). Es sei A die größte unter den Zahlen $|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|$, so hat man:

$$(1) \qquad |a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}| \leqq A(1 + |x| + \cdots + |x|^{n-1})$$

d h.

$$\leqq A \cdot \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}.$$

Bestimmt man nun $|x|$ so, daß:

$$0 < \frac{A}{|x| - 1} \leqq \alpha$$

d. h. nimmt man:

$$(2) \qquad |x| \geqq 1 + \frac{A}{\alpha},$$

so folgt aus Ungl. (1), daß:

$$(3\text{a}) \qquad a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}| \leqq \alpha \cdot \{|x|^n - 1\}$$

und *a fortiori*

$$(3\text{b}) \qquad |a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}| < \alpha \cdot |x|^n$$

für alle x, welche der Bedingung genügen:

$$(4) \qquad |x| \geqq R, \quad \text{wo:} \quad R = 1 + \frac{A}{\alpha}, \quad \text{q. e. d.}$$

Beweis zu II. Es sei A' die größte der Zahlen $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|$, so ist wiederum:

$$(5). \qquad |a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n| \leqq A' \cdot |x| \cdot \frac{1 - |x|^n}{1 - |x|}.$$

Bestimmt man jetzt $|x|$, so daß:

$$0 \leqq \frac{A' \cdot |x|}{1 - |x|} \leqq \alpha,$$

d. h. nimmt man:

$$(6) \qquad |x| \leqq \frac{\alpha}{A' + \alpha},$$

so folgt aus Ungl. (5), daß:

$$(7\text{a}) \qquad |a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n| \leqq \alpha \{1 - |x|^n\}$$

und *a fortiori*

$$(7\text{b}) \qquad |a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n| < \alpha$$

für alle x, welche der Bedingung genügen:

$$(8) \qquad |x| \leqq r, \quad \text{wo:} \quad r = \frac{\alpha}{A' + \alpha}, \quad \text{q. e. d.}$$

2. Ist jetzt wiederum die ganze Funktion n^{ten} Grades vorgelegt:

$$g(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

so hat man zunächst:

$$(9) \qquad |g(x)| \geqq \big| |a_n x^n| - |a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0| \big|.$$

Nun folgt aus Ungl. (3a) und (4), wenn man speziell $\alpha = |a_n|$ setzt:

$$\left.\begin{array}{l} |a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}| \leqq |a_n x^n| - |a_n| \\ \text{oder anders geschrieben:} \\ |a_n x^n| - |a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0| \geqq |a_n| \end{array}\right\} \quad \text{für:} \quad |x| \geqq 1 + \frac{A}{|a_n|},$$

so daß aus Ungl. (9) sich ergibt:

$$(10) \qquad |g(x)| \geqq |a_n| \quad \text{für:} \quad |x| \geqq R,$$

wo:

$$(11) \qquad R = 1 + \frac{A}{|a_n|} \quad \text{und:} \quad A \geqq |a_\nu| \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Aus diesem Ergebnisse läßt sich nun der folgende wichtige Schluß ziehen:

Besitzt die ganze Funktion $g(x)$ Nullstellen, d. h. gibt es Werte x_ν, für welche $g(x_\nu) = 0$ wird, so muß stets $|x_\nu| < R = 1 + \frac{A}{|a_n|}$ sein.

Oder auch, da man eine Gleichung von der Form $g(x) = 0$ als *algebraische Gleichung* (n^{ten} Grades) und demgemäß jeden bestimmten Wert x_ν, für welchen $g(x_\nu) = 0$ wird, als *Lösung* oder *Wurzel* dieser algebraischen Gleichung zu bezeichnen pflegt:

Alle etwaigen Wurzeln x_ν der algebraischen Gleichung $g(x) = 0$ müssen der Bedingung $|x_\nu| < R$ genügen, d. h., geometrisch gesprochen, im Innern eines um den Nullpunkt mit dem Radius $R = 1 + \frac{A}{|a_n|}$ beschriebenen Kreises liegen.

3. Setzt man in Ungl. (3b) und (4) $\alpha = \varepsilon \cdot |a_n|$, wo ε eine nach Bedarf beliebig klein anzunehmende positive Zahl bedeutet, so findet man:

$$(12) \qquad |a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}| < \varepsilon \cdot |a_n x^n|,$$

oder. anders geschrieben:

$$(13) \qquad |g(x) - a_n x^n| < \varepsilon \cdot |a_n x^n|$$

für alle x, welche der Bedingung genügen:

$$(14) \qquad |x| \geqq R = 1 + \frac{A}{\varepsilon\ |a_n|}, \quad \text{wo } A \geqq |a_\nu| \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Setzt man Ungl. (13) in die Form:

$$(15) \qquad \left|\frac{g(x)}{a_n x^n} - 1\right| < \varepsilon,$$

so erkennt man, daß der Quotient $\frac{g(x)}{a_n x^n}$ sich beliebig wenig von der Einheit unterscheidet, wenn ε hinlänglich klein und sodann $|x| \geqq R$ angenommen wird. Und da mit unbegrenzt abnehmenden Werten von ε die Zahl R über alle Grenzen wächst, so ergibt sich:

$$(16) \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{a_n x^n} = 1\ ^{1)},$$

eine Beziehung, deren Inhalt man folgendermaßen auszusprechen pflegt:

Die ganze Funktion $g(x)$ wächst gleichzeitig mit x in derselben Weise ins Unendliche, wie $a_n x^n$.

Bezeichnet man ferner das Unendlichwerden von x^n für $x \to \infty$ als ein solches von der n^{ten} *Ordnung* und bemerkt außerdem, daß $g(x)$ für jeden bestimmten endlichen Wert von x selbst einen bestimmten endlichen Wert besitzt, so erscheint es angemessen, den Inhalt von Gl. (16) (einschließlich der Tatsache, daß $g(x)$ für jedes *endliche* x selbst einen *endlichen* Wert besitzt) folgendermaßen auszusprechen:

Eine ganze Funktion n^{ten} Grades wird nur für $x \to \infty$, und zwar von der n^{ten} Ordnung unendlich.[2])

---

1) Also mit Übertragung der in I_1, § 37, Nr. 6 (S. 237) eingeführten Schreibweise auf das komplexe Gebiet:

$$g(x) \cong a_n x^n \qquad (x \to \infty)$$

oder auch weniger scharf:

$$|g(x)| \underset{e}{\sim} |x|^n \qquad (x \to \infty).$$

2) Übrigens hat man im vorliegenden Falle nicht nur:

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty,$$

sondern auf Grund der in § 15, Nr 3 (S. 143) getroffenen Festsetzungen auch:

$$g(\infty) = \infty,$$

Man kann die Grenzen, innerhalb deren $|g(x)|$ sich bewegt, falls $|x|$ eine gewisse positive Zahl R erreicht oder übersteigt, mit Hilfe von Ungl. (13) noch genauer angeben. Aus Ungl. (13) folgt nämlich *a fortiori*, daß:

$$\big|\, |g(x)| - |a_n x^n| \,\big| < \varepsilon \cdot |a_n x^n|,$$

und daher:

$$(17) \qquad (1-\varepsilon)\cdot|a_n x^n| < |g(x)| < (1+\varepsilon)\cdot|a_n x^n|$$

für alle x, welche der Bedingung (14) genügen, d. h.:

$$|x| \geqq R = 1 + \frac{A}{\varepsilon\cdot|a_n|}, \quad \text{wo} \quad A \geqq |a_\nu| \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Nimmt man etwa speziell $\varepsilon = \frac{1}{2}$, so folgt aus dem ersten Teile der Ungl. (17), daß:

$$(18) \qquad |g(x)| > \frac{1}{2}\cdot|a_n x^n|, \quad \text{falls:} \quad |x| \geqq R' = 1 + \frac{2A}{|a_n|}.$$

Bedeutet dann G eine beliebig vorgelegte positive Zahl, so wird:

$$\frac{1}{2}\cdot|a_n x^n| \geqq G, \quad \text{falls:} \quad |x| \geqq \sqrt[n]{\frac{2G}{|a_n|}} = R''$$

und daher:

$$(19) \qquad |g(x)| > G \quad \text{für:} \quad |x| \geqq R, \quad \text{wo:} \quad R \geqq \begin{cases} R' \\ R''. \end{cases}$$

4. Zu den bisher aus Ungl. (I) abgeleiteten Folgerungen, die sich auf das Verhalten von $g(x)$ für *relativ große* Werte von $|x|$ bezogen, fügen wir noch eine unmittelbar auf Ungl. (II) beruhende, welche das Verhalten einer ganzen Funktion für *relativ kleine* Werte von $|x|$ charakterisiert.

Ersetzt man in Ungl. (7b) und (8) α durch $\frac{1}{K}\cdot|a_0|$, wo K eine (beliebig groß anzunehmende) *positive*, $a_0 \neq 0$ eine *beliebige komplexe* Zahl bedeutet, und multipliziert unter Hinzufügung der Bedingung: $|x| > 0$ die ganze Ungleichung mit $K\cdot|x|^m$ (wo m eine pos. ganze Zahl, bzw. Null) so folgt:

$$(20) \quad |a_0 x^m| > K\cdot|a_1 x^{m+1} + a_2 x^{m+2} + \cdots + a_n x^{m+n}| \quad \text{für:} \quad 0 < |x| \leqq r,$$

wo:

$$(21) \qquad r = \frac{|a_0|}{K\cdot A' + |a_0|} \quad \text{und:} \quad A' \geqq |a_\nu| \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

---

wegen:

$$g\left(\frac{1}{x'}\right) = \frac{a_n + a_{n-1}x' + \cdots + a_0 x'^n}{x'^n}$$

und:

$$\left(\frac{1}{g\left(\frac{1}{x'}\right)}\right)_{x'=0} = 0, \quad \text{also:} \quad \left(g\left(\frac{1}{x'}\right)\right)_{x'=0} = \infty$$

In Worten: *Man kann stets eine Zahl r so fixieren, daß für $0 < |x| \leqq r$ der absolute Betrag des niedrigst potenzierten Gliedes eines Aggregates von der Form: $a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + \cdots + a_n x^{m+n}$ den absoluten Betrag des übrigen Aggregates beliebig oft übertrifft.*

§ 21. Über etwaige Maxima und Minima des absoluten Betrages einer ganzen Funktion.

1. Wir gehen jetzt darauf aus, den für die Funktionentheorie wie für die Algebra fundamentalen Satz zu beweisen, daß jede *ganze Funktion* mindestens *eine* bestimmte im Endlichen gelegene *Nullstelle* besitzt, oder anders ausgesprochen, daß jeder *algebraischen Gleichung* mit *einer* Unbekannten mindestens *eine* komplexe (d. h. reelle, imaginäre oder eigentlich komplexe) *Wurzel* zukommt.

Wir schicken hier zunächst den folgenden *Hilfssatz* voraus:

> *Sind $\alpha + \beta i$, $|h|$ und die positive ganze Zahl m beliebig vorgelegt, so läßt sich der Einheitsfaktor von h stets so bestimmen, daß der reelle Teil von $(\alpha + \beta i) \cdot h^m$ ein bestimmt vorgeschriebenes Vorzeichen besitzt.*

Beweis: Es werde wieder der *reelle Teil* einer komplexen Zahl x mit $\Re(x)$ bezeichnet, und es sei zunächst verlangt, daß

$$\Re((\alpha + \beta i) \cdot h^m) > 0$$

ausfallen soll. Setzt man $|h| = \varrho$ und $h = \varrho \cdot z$, so wird:

$$(\alpha + \beta i) \cdot h^m = (\alpha \varrho^m + \beta \varrho^m i) \cdot z^m,$$

und man genügt daher im Falle $\alpha > 0$ der gestellten Forderung ohne weiteres, wenn $z = 1$ gesetzt wird.

Ist dagegen $\alpha < 0$, so hat man z so zu bestimmen, daß:

$$z^m = -1$$

wird.

Ist endlich $\alpha = 0$ und zugleich $\beta > 0$, so müßte:

$$iz^m = 1, \quad \text{also:} \quad z^m = -i,$$

dagegen im Falle $\alpha = 0$, $\beta < 0$:

$$iz^m = -1, \quad \text{also:} \quad z^m = i$$

werden. Es kommt also in allen nach Ausschluß des bereits erledigten Falles $\alpha > 0$ noch übrig bleibenden Fällen nur darauf an, die Zahl z so zu bestimmen, daß sie *eine* der drei Gleichungen befriedigt:

$$(4) \qquad z^m = -1, \quad z^m = -i, \quad z^m = i.$$

Hierzu genügt es aber, eine Lösung der *letzten* dieser Gleichungen zu kennen. Denn ist etwa $(z_1)^m = i$, so hat man:

$$(z_1^2)^m = (z_1^m)^2 = -1, \quad (z_1^3)^m = (z_1^m)^3 = -i,$$

so daß also z_1^2 eine Lösung der *ersten*, z_1^3 eine solche der *zweiten* Gleichung liefert.

Ist nun m *ungerade*, so findet man ohne weiteres:

$$z_1 = i \quad, \text{ wenn } m \text{ von der Form } 4k+1,$$
$$z_1 = -i, \quad \text{,, ,, ,, ,, ,, } 4k+3$$

(wegen: $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+3} = -i$).

Ist dagegen m *gerade*, etwa $m = 2^n \cdot m'$ (wo m' eine *ungerade* Zahl, bzw. $= 1$), so kann man nach dem eben gesagten zunächst eine Zahl z_0 angeben, so daß $z_0^{m'} = i$ (nämlich $z_0 = i$ oder $= -i$) und sodann (nach I_1, § 70, Gl (14), S. 539) eine Zahl z_1 so bestimmen, daß:

$$z_1^{(2^n)} = z_0,$$

und daher:

$$z_1^m = (z_1^{(2^n)})^{m'} = z_0^{m'} = i,$$

womit die fragliche Aufgabe gelöst ist (d. h. man hat dann schließlich nur noch z einen der drei Werte z_1^2, z_1^3, z_1 beizulegen, um je eine Lösung der Gleichungen (4) zu erhalten).

Hätte die Aufgabe dahin gelautet, daß

$$\Re((\alpha + \beta i) \cdot h^m) < 0$$

werden sollte, so ist diese Forderung offenbar gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\Re(-(\alpha + \beta i) \cdot h^m) > 0,$$

so daß also die Lösung der fraglichen Aufgabe unmittelbar auf diejenige der zuvor behandelten zurückgeführt ist.

2. Es sei jetzt wiederum die ganze Funktion n^{ten} Grades

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (\text{wo: } |a_n| > 0)$$

vorgelegt. Ferner sei x_0 irgendein Wert von x, für welchen $g(x)$ *nicht* verschwindet. Dann soll gezeigt werden:

Es gibt in der Umgebung der Stelle x_0 stets sowohl solche Werte $x_0 + h$, für welche

$$|g(x_0 + h)| > |g(x_0)|,$$

als auch solche, für welche:

$$|g(x_0 + h)| < |g(x_0)|.$$

Beweis Man hat zunächst nach § 19, Gl. (4) (S. 173):

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + \frac{g'(x_0)}{1!} h + \frac{g''(x_0)}{2!} h^2 + \cdots + \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} h^n \tag{5}$$

Dabei könnte der Fall eintreten, daß $g'(x_0)$ und eventuell auch noch eine Anzahl daran sich anschließender Derivierten: $g''(x_0), \ldots, g^{(m-1)}(x_0)$ sämtlich verschwinden: *Keinesfalls* könnten aber *alle* Derivierten für $x = x_0$ verschwinden, da ja $g^{(n)}(x_0) = n!\,a_n$ sicher von Null verschieden ist. Sei also $g^{(m)}(x_0)$ — wo: $1 \leqq m \leqq n-1$ — die *erste* nicht verschwindende Derivierte, so tritt an die Stelle der Gl. (5) die folgende:

$$(6)\quad g(x_0+h) = g(x_0) + \frac{g^{(m)}(x_0)}{m!}\,h^m + \frac{g^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!}\,h^{m+1} + \cdots + \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot h^n,$$

wo jetzt $g^{(m)}(x_0)$ sicher *von Null verschieden* (während unter den Ausdrücken $g^{(m+1)}(x_0), \ldots, g^{(n-1)}(x_0)$ noch beliebig viele verschwinden können).

Dividiert man die ganze Gleichung durch $g(x_0)$ und setzt:

$$(7)\qquad \frac{1}{\nu!}\cdot\frac{g^{(\nu)}(x_0)}{g(x_0)} = b_\nu \qquad (\nu = m, m+1, \ldots, n),$$

so wird:

$$(8)\qquad \frac{g(x_0+h)}{g(x_0)} = 1 + b_m h^m + b_{m+1} h^{m+1} + \cdots + b_n h^n$$

(wo $|b_m| > 0$). Setzt man sodann:

$$(9)\qquad |h| = \varrho, \quad h = \varrho\cdot z,$$

so läßt sich nach dem zuvor bewiesenen Hilfssatze der Einheitsfaktor z so bestimmen, daß der reelle Teil von $b_m h^m$ von Null verschieden ist und ein *vorgeschriebenes Vorzeichen* erhält. Wird also allgemein die Bezeichnung eingeführt:

$$(10)\qquad b_\nu h^\nu \equiv (b_\nu z^\nu)\cdot\varrho^\nu = (\alpha_\nu + \beta_\nu i)\cdot\varrho^\nu,$$

so hat man insbesondere:

$$(11)\qquad b_m h^m = (\alpha_m + \beta_m i)\cdot\varrho^m = (\sigma|\alpha_m| + \beta_m i)\cdot\varrho^m,$$

wo $|\alpha_m|$ von Null verschieden und, je nach Wahl des Einheitsfaktors z, $\sigma = +1$ oder $\sigma = -1$ wird.

Hiernach nimmt Gl. (8) jetzt die folgende Form an:

$$(12)\quad \frac{g(x_0+h)}{g(x_0)} = 1 + (\sigma\cdot|\alpha_m| + \beta_m i)\cdot\varrho^m + (\alpha_{m+1} + \beta_{m+1} i)\cdot\varrho^{m+1} + \cdots + (\alpha_n + \beta_n i)\cdot\varrho^n,$$

und daraus folgt weiter:

$$(13)\quad \left|\frac{g(x_0+h)}{g(x_0)}\right|^2 = \{1 + \sigma\cdot|\alpha_m|\varrho^m + \alpha_{m+1}\varrho^{m+1} + \cdots + \alpha_n\varrho^n\}^2 + \{\beta_m\varrho^m + \beta_{m+1}\varrho^{m+1} + \cdots + \beta_n\varrho^n\}^2.$$

Bei der Ausführung der rechts auftretenden Quadrate erscheint mit der *niedrigsten* Potenz von ϱ behaftet das Glied: $2\sigma\cdot|\alpha_m|\varrho^m$, so daß man

setzen kann:

$$\left|\frac{g(x_0+h)}{g(x_0)}\right|^2 = 1 + 2\sigma \cdot |\alpha_m| \varrho^m + G(\varrho)$$

$$(14) \qquad = 1 + \sigma \cdot |\alpha_m| \cdot \varrho^m + \sigma \cdot (|\alpha_m| \cdot \varrho^m + \sigma \cdot G(\varrho)) \text{ (wegen: } \sigma^2 = 1),$$

wo $G(\varrho)$ eine ganze Funktion von ϱ, mit Exponenten, deren niedrigster $\geqq m + 1$ ist. Infolgedessen läßt sich nach Ungl. (20) des vorigen Paragraphen eine positive Zahl r so fixieren, daß:

$$(15) \qquad |\alpha_m| \varrho^m > |G(\varrho)| \quad \text{für:} \quad \varrho \leqq r.$$

Alsdann wird aber:

$$\left|\frac{g(x_0+h)}{g(x_0)}\right|^2 \begin{cases} > 1 + |\alpha_m| \varrho^m > 1, & \text{wenn } \sigma = +1, \\ < 1 - |\alpha_m| \varrho^m < 1, & \text{wenn } \sigma = -1, \end{cases}$$

und daher schließlich (für $h = |h| \cdot z$, $|h| \leqq r$), wie behauptet:

$$(16) \qquad |g(x_0+h)| \begin{Bmatrix} > |g(x_0)| \\ < |g(x_0)| \end{Bmatrix} \textit{ je nach Wahl des Einheitsfaktors } z.$$

3. Der Inhalt dieser Ungleichungen (16) läßt sich offenbar auch folgendermaßen aussprechen:

Ist $|g(x_0)| > 0$, so kann, in bezug auf alle Werte von $|g(x)|$ einer gewissen Umgebung von x_0, jener Wert $|g(x_0)|$ weder ein Maximum noch ein Minimum sein.

Dabei ist für die *zweite* dieser Aussagen, also die *zweite* der Ungleichungen (16) (welche übrigens für den zunächst in Aussicht genommenen Beweis der Wurzelexistenz ausschließlich in Betracht kommt) die Voraussetzung $|g(x_0)| > 0$ offenbar unentbehrlich (da ja niemals $|g(x_0+h)| < 0$ werden kann). Anders liegt die Sache bezüglich der *ersten* Ungleichung (16), da diese auch im Falle $g(x_0) = 0$ nicht nur überhaupt einen Sinn behält, sondern sich noch dahin präzisieren läßt, daß sie für *jedes* h bei passend eingeschränktem absoluten Betrage gilt. Im Falle $g(x_0) = 0$ nimmt nämlich Gl. (6) die folgende Form an:

$$g(x_0+h) = \frac{g^{(m)}(x_0)}{m!} h^m + \frac{g^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!} h^{m+1} + \cdots + \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} h^n,$$

und da sich nach Ungl. (20) ein $r > 0$ so fixieren läßt, daß für $0 < |h| \leqq r$ der absolute Betrag des Anfangsgliedes denjenigen der Summe aller übrigen Glieder beliebig oft übertrifft, so folgt, daß

$$|g(x_0+h)| > 0 \text{ für } \textit{alle } h \text{ des Bereiches: } 0 < |h| \leqq r.$$

In Worten: *Ist $g(x_0) = 0$, so existiert immer eine gewisse Umgebung von x_0, innerhalb deren keine weitere Nullstelle von $g(x)$ liegt.*

Wir knüpfen ferner an die *erste* der Ungleichungen (16) noch die folgende Bemerkung. Es bedeute $\mathfrak{B}$ einen endlichen, abgeschlossenen

Bereich. Alsdann muß die im Innern und auf der Begrenzung von $\mathfrak{B}$ *stetige* Funktion $|g(x)|$ ein *reales Maximum* besitzen, es gibt also (mindestens) eine Stelle X, derart, daß $|g(X)|$ von *keinem* dem Bereiche $\mathfrak{B}$ angehörigen Werte $|g(x)|$ übertroffen wird. Alsdann folgt aber aus der ersten der Ungleichungen (16), daß eine solche Stelle X *niemals im Innern* von $\mathfrak{B}$ liegen kann: sie muß somit auf der Begrenzung von $\mathfrak{B}$ liegen.

§ 22. Der Fundamentalsatz der Algebra: Existenz und Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung (Nullstellen einer ganzen Funktion). — Zerlegung einer ganzen Funktion in lineare Faktoren.

1. Ist wiederum

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{1}$$

so hat man für $x = 0$:

$$g(0) = a_0 .$$

Ist dann speziell $a_0 = 0$, so wird $g(0) = 0$, so daß also $g(x)$ in diesem Falle die Nullstelle $x = 0$ besitzt.

Ist dagegen $|a_0| > 0$, so läßt sich zunächst nach Ungl. (19) des vorletzten Paragraphen eine positive Zahl R so fixieren, daß:

$$|g(x)| > |a_0| \quad \text{für} \quad |x| \geqq R. \tag{2}$$

Andererseits existieren nach dem Satze von Nr. 2 des vorigen Paragraphen in der Umgebung der Stelle $x = 0$ Stellen von der Beschaffenheit, daß:

$$|g(x)| < |a_0| \quad \text{für:} \quad x = |x| \cdot c \quad \text{und} \quad |x| \leqq r. \tag{3}$$

Infolge der Stetigkeit von $|g(x)|$ muß $|g(x)|$ in dem durch die Beziehung $|x| \leqq R$ definierten abgeschlossenen Bereich (geometrisch gesprochen: für alle Stellen im Innern und auf der Begrenzung eines Kreises um den Nullpunkt mit dem Radius R) ein *reales Minimum*[1]) besitzen, d. h. es

---

1) *Ohne* diese Erkenntnis wäre die ganze Schlußweise hinfällig. Man betrachte z. B. die Funktion:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{nx^2 + 1}{nx + 1},$$

welche für jedes von Null verschiedene x den Wert

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^2 + \frac{1}{n}}{x + \frac{1}{n}} = x$$

liefert, also in der Nähe der Stelle $x = 0$ jeden beliebig kleinen, von Null verschiedenen Wert annimmt. Dagegen wird

$$f(0) = 1,$$

existiert daselbst (mindestens) eine Stelle x_1, für welche $|g(x_1)|$ einen Wert annimmt, unter welchen $|g(x)|$ nicht mehr herabsinkt. Dieser Minimalwert muß aber nach Ungl. (3) sicher $< |a_0|$ sein, woraus mit Berücksichtigung von Ungl. (2) folgt, daß $|x_1| < R$ sein muß, d. h. daß die Stelle x_1 *im Innern* des betreffenden Bereiches (mit definitivem Ausschluß der Grenze $|x| = R$) liegt. Hieraus folgt aber mit Notwendigkeit, daß

$$(4) \qquad g(x_1) = 0$$

sein muß. Denn wäre $|g(x_1)| > 0$, so könnte man nach Nr. 2 des vorigen Paragraphen in unmittelbarer Umgebung von x_1, also noch innerhalb des Bereiches $|x| < R$ Stellen $x_1 + h$ ausfindig machen, für welche

$$|g(x_1 + h)| < |g(x_1)|$$

ausfiele, was der Festsetzung widerspricht, daß $|g(x_1)|$ den Minimalwert von $|g(x)|$ für $|x| \leqq R$ vorstellen sollte.

Somit gilt in der Tat die Beziehung (4) und somit der Satz:

Jede ganze Funktion hat (mindestens) eine im Endlichen gelegene Nullstelle. Anders ausgesprochen:

Jede algebraische Gleichung hat (mindestens) eine Wurzel.

2. Aus der soeben bewiesenen Existenz *einer* Nullstelle der ganzen Funktion $g(x)$ läßt sich erschließen, daß die letztere — in einem weiter unten noch näher zu bezeichnenden Sinne — genau so viele Nullstellen besitzt, als ihr Grad beträgt. Wir schicken dem Nachweis dieser Tatsache die folgende *Definition* voraus:

Ist:

$$(5) \qquad g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x),$$

wo $g(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ *ganze Funktionen vorstellen, so heißt jede der beiden Funktionen* $g_1(x)$, $g_2(x)$ *ein* Teiler *von* $g(x)$.

Alsdann gilt zunächst der folgende *Satz:*

Hat $g(x)$ *den Teiler* $(x - x_1)$, *so ist* x_1 *eine Nullstelle von* $g(x)$. *Umgekehrt; ist* $x = x_1$ *eine Nullstelle von* $g(x)$, *so ist* $(x - x_1)$ *ein Teiler von* $g(x)$.

---

und es gibt *keine* Stelle, für welche $f(x) = 0$ wird. Die Funktion $|f(x)|$ besitzt eben *die untere Grenze* 0 nur als *ideales*, nicht als *reales* Minimum

Das gleiche Verhalten zeigt bei Beschränkung auf *reelle* x die Funktion:

$$f(x) = x^2 + E\left(\frac{1}{1 + x^2}\right),$$

wenn man, wie üblich, durch das Symbol $E(y)$ die größte in der positiven Zahl y enthaltene (sonst auch mit $[y]$ bezeichnete) ganze Zahl bezeichnet.

Beweis. Setzt man voraus, daß:

$$g(x) = (x - x_1) \cdot g_1(x),$$

so folgt daraus ohne weiteres, daß:

$$g(x_1) = 0,$$

also die Richtigkeit der *ersten* Behauptung. Um diejenige der *zweiten* zu beweisen, gehen wir aus von der (nach § 19 Gl. (28), S. 179) für alle möglichen x und x_0 gültigen Entwickelung:

$$(6) \quad g(x) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot \frac{x - x_0}{1!} + g''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + g^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}.$$

Ersetzt man hier unter der Voraussetzung, daß x_1 eine Nullstelle von $g(x)$ vorstellt, also $g(x_1) = 0$ ist, x_0 durch x_1, so folgt:

$$(7) \quad g(x) = (x - x_1) \left\{ g'(x_1) + \frac{1}{2!} g''(x_1)(x - x_1) + \cdots + \frac{1}{n!} g^{(n)}(x_1)(x - x_1)^{n-1} \right\}$$
$$= (x - x_1) \cdot g_1(x),$$

wo $g_1(x)$ d. h. der in der Klammer stehende zunächst nach ganzen Potenzen von $(x - x_1)$ geordnete Ausdruck offenbar eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von x ist, deren höchst potenziertes Glied den Wert $\frac{1}{n!} g^{(n)}(x_1) \cdot x^{n-1}$, d. h. $a_n x^{n-1}$ hat.

Man kann übrigens die Teilbarkeit von $g(x)$ durch $(x - x_1)$ auch, ohne auf die Entwickelung (6) sich zu beziehen, mittelst direkter Ausführung der Division von $g(x)$ durch $x - x_1$ folgendermaßen beweisen. Bedeutet wiederum x_0 eine willkürlich angenommene Zahl, so hat man für jedes von x_0 verschiedene x:

$$(8) \quad \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = a_n \cdot \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} + a_{n-1} \cdot \frac{x^{n-1} - x_0^{n-1}}{x - x_0} + \cdots + a_2 \cdot \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} + a_1 \cdot \frac{x - x_0}{x - x_0}.$$

Da aber für jedes $\nu = 1, 2, \ldots n$ die Beziehung gilt:

$$(9) \qquad \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x - x_0} = x^{\nu-1} + x_0 x^{\nu-2} + \cdots + x_0^{\nu-2} x + x_0^{\nu-1},$$

so nimmt Gl. (8), wenn man diese Formel auf jedes Glied der rechten Seite anwendet und alles nach Potenzen von x ordnet, die Form an:

$$(10) \quad \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = a_n x^{n-1} + \gamma_1(x_0) \cdot x^{n-2} + \cdots + \gamma_{n-2}(x_0) \cdot x + \gamma_{n-1}(x_0)$$

(wo, wie leicht zu sehen, die $\gamma_\nu(x_0)$ ganze Funktionen vom Grade ihres Index sind). Ersetzt man jetzt den beliebig angenommenen Wert x_0 durch eine Nullstelle x_1 von $g(x)$, so wird, wegen $g(x_1) = 0$:

$$(11). \qquad \frac{g(x)}{x - x_1} = \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} = g_1(x),$$

wo $g_1(x)$ diejenige ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet, welche aus der rechten Seite von Gl. (10) hervorgeht, wenn man durchweg $\gamma_\nu(x_0)(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$ durch $\gamma_\nu(x_1)$ ersetzt. Man findet also schließlich wiederum, wie behauptet:

$$g(x) = (x - x_1) \cdot g_1(x). \tag{12}$$

3. Es habe nun $g(x)$ zunächst die Nullstelle x_1, so daß also, wie eben bewiesen, die Beziehung (12) gilt, wo $g_1(x)$ eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades mit dem Anfangsgliede $a_n x^{n-1}$ bedeutet. Da sodann $g_1(x)$ wiederum mindestens eine Nullstelle x_2 besitzen muß (wo allenfalls auch $x_2 = x_1$ sein kann), so ergibt sich analog:

$$g_1(x) = (x - x_2) \cdot g_2(x)$$

und daher durch Einsetzen in Gl (12):

$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot g_2(x), \tag{13}$$

wo jetzt $g_2(x)$ eine ganze Funktion $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades mit dem Anfangsgliede $a_n x^{n-2}$ vorstellt. Die letzte Gleichung lehrt, daß zunächst auch x_2 eine Nullstelle von $g(x)$ sein muß.

Schließt man nun in dieser Weise weiter fort, so gelangt man einmal zu einer Gleichung von der Form:

$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}) \cdot g_{n-1}(x), \tag{14}$$

wo $g_{n-1}(x)$ eine ganze Funktion vom Grade: $n - (n-1) = 1$ mit dem Anfangsgliede $a_n x$ sein muß, also:

$$g_{n-1}(x) = a_n x + b = a_n\left(x + \frac{b}{a_n}\right),$$

wo b eine gewisse Konstante bedeutet. Setzt man der Gleichförmigkeit halber:

$$-\frac{b}{a} = x_n,$$

so daß also $x = x_n$ die (einzige) Nullstelle von $g_{n-1}(x)$ darstellt, so wird:

$$g_{n-1}(x) = a_n(x - x_n),$$

und es ergibt sich aus Gl. (14) schließlich:

$$g(x) = a_n \cdot (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = a_n \cdot \prod_{1}^{n}{}_{\nu} (x - x_\nu), \tag{15}$$

woraus hervorgeht, daß $g(x)$ die Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sämtlich zu Nullstellen hat. Hierbei können unter den Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ beliebig viele einander gleich sein. Bezeichnet man nun mit

$$x_1, x_2, \ldots, x_k \quad (1 \leqq k \leqq n)$$

die wirklich *verschiedenen* unter den Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und mit

$$n_1, n_2, \ldots, n_k \quad (n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n)$$

diejenigen positiven ganzen Zahlen, welche angeben, *wie oft* jeder der Faktoren $(x - x_1)$, $(x - x_2)$, ..., $(x - x_k)$ in der Zerlegung (15) vorkommt, so wird, wenn man die in (15) vorkommenden *gleichen* Linearfaktoren zu Potenzen vereinigt, die betreffende Faktorenzerlegung die Form annehmen:

$$(16) \quad g(x) = a_n \cdot (x - x_1)^{n_1} \cdot (x - x_2)^{n_2} \cdots (x - x_k)^{n_k} = a_n \cdot \prod_{\nu=1}^{k} (x - x_\nu)^{n_\nu}.$$

Ist nun $g(x)$ durch $(x - x_\nu)^{n_\nu}$, aber nicht durch $(x - x_\nu)^{n_\nu + 1}$ teilbar, so sagt man, x_ν sei eine *n_ν-fache Nullstelle* von $g(x)$, oder: die Gleichung $g(x) = 0$ habe *n_ν gleiche Wurzeln x_ν* bzw. *$n_\nu$mal* die Wurzel x_ν. Zählen wir nun solche n_ν-fache Nullstellen (Wurzeln) als n_ν (gleichsam zusammenfallende) Nullstellen von $g(x)$ (Wurzeln von $g(x) = 0$), so können wir das in Gl. (16) enthaltene Ergebnis folgendermaßen aussprechen:

Jede ganze Funktion n^{ten} Grades ist gleich dem Produkte aus dem Koeffizienten von x^n und n Linearfaktoren der Form $(x - x_\nu)$, unter denen beliebig viele einander gleich sein können. Sie besitzt also zum mindesten n Nullstellen, wenn man jede Nullstelle x_ν so oft zählt, als der Faktor $(x - x_\nu)$ in dem fraglichen Produkte vorkommt.

4. Es läßt sich aber auch zeigen, daß eine ganze Funktion n^{ten} Grades *nicht mehr* als n Nullstellen haben kann, d. h. es gilt der Satz:

Hat die ganze Funktion $g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, wo $|a_n| > 0$ die k verschiedenen Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_k$, und zwar allgemein die Nullstelle $x_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, k)$ als eine n_ν-fache, wo $n_\nu \geqq 1$ und $n_1 + n_2 + \cdots n_k = n$, so kann $g(x)$ keine weitere Nullstelle besitzen, d. h. weder eine der schon vorhandenen Nullstellen x_ν öfter als $n_\nu$mal, noch auch eine von jenen verschiedene Nullstelle x_{k+1}.

Eine ganze Funktion n^{ten} Grades hat somit genau n Nullstellen (wobei eine n_ν-fache Nullstelle für n_ν Nullstellen gezählt wird).

Beweis. Infolge der Voraussetzung hat man zunächst:

$$g(x) = a_n \cdot (x - x_1)^{n_1} \cdot (x - x_2)^{n_2} \cdots (x - x_k)^{n_k},$$

wo $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sämtlich voneinander verschieden.

Hätte nun $g(x)$ eine der bereits vorhandenen Nullstellen x_ν mehr als n_ν-mal, so müßte $g(x)$ zum mindesten durch $(x - x_\nu)^{n_\nu + 1}$, also $\frac{g(x)}{(x - x_\nu)^{n_\nu}}$

noch durch $(x - x_\nu)$ teilbar sein und somit die Nullstelle x_ν besitzen. Da aber:

$$(17)\quad \frac{g(x)}{(x-x_\nu)^{n_\nu}} = a_n \cdot (x-x_1)^{n_1} \cdots (x-x_{\nu-1})^{n_{\nu-1}}(x-x_{\nu+1})^{n_{\nu+1}} \cdots (x-x_k)^{n_k}$$

und für $x = x_\nu$ keiner der Faktoren a_n, $(x_\nu - x_1) \cdots (x_\nu - x_{\nu-1})$, $(x_\nu - x_{\nu+1}) \cdots (x_\nu - x_k)$ den Wert Null annimmt, so ist damit die Unmöglichkeit der obigen Annahme bewiesen.

Hätte andererseits $g(x)$ eine von $x_1, x_2, \ldots, x_k$ verschiedene Nullstelle x_{k+1}, so müßte:

$$(18)\quad g(x_{k+1}) = a_n \cdot (x_{k+1} - x_1)^{n_1}(x_{k+1} - x_2)^{n_2} \cdots (x_{k+1} - x_k)^{n_k}$$

verschwinden, was wiederum unmöglich ist, da keiner der rechts stehenden Faktoren den Wert Null hat.

5. Die beim Beweise des letzten Satzes angewendeten Schlüsse beruhen wesentlich auf der Voraussetzung, daß a_n von Null verschieden ist. Läßt man die *Möglichkeit* zu, daß $a_n = 0$ sein darf, so wird in der Tat die rechte Seite von Gl. (17) für $x = x_\nu$, desgl. die rechte Seite von Gl. (18) dann und nur dann verschwinden, wenn $a_n = 0$ ist. Also: Soll $g(x)$ noch eine $(n+1)^{\text{te}}$ Nullstelle haben, so ist das nur dann möglich, wenn $a_n = 0$ ist. Dadurch reduziert sich aber $g(x)$ auf die ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$, und es ergibt sich durch die nämliche Schlußweise, daß auch $a_{n-1} = 0$ sein muß. Analog folgt dann aber, daß auch jeder der übrigen Koeffizienten den Wert *Null* haben muß, und man erhält somit den folgenden Satz:

Eine ganze Funktion n^{ten} Grades mit mehr als n Nullstellen ist identisch Null, d. h. jeder ihrer Koeffizienten muß gleich Null sein, und sie verschwindet somit für jeden beliebigen Wert von x.

Daraus folgt *a fortiori:*

Verschwindet eine ganze Funktion beliebigen Grades für ein noch so kleines Wertekontinuum von x (Linien- oder Flächenstück), so verschwindet sie für jedes x.

Ferner ergibt sich der folgende wichtige *Identitätssatz* für zwei ganze Funktionen:

Stimmen die Werte zweier ganzen Funktionen:

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ f(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \end{aligned}\right\} \text{ wo etwa } n \geqq m,$$

für mehr als n Stellen überein, so sind sie identisch, d. h. die Koeffizienten gleich hoher Potenzen sind beziehungsweise einander gleich.

Denn die Differenz:

$$g(x) - f(x) = a_n x^n + \cdots + (a_m - b_m) x^m + \cdots + (a_1 - b_1) x + (a_0 - b_0)$$

ist eine ganze Funktion n^{ten} Grades mit mehr als n Nullstellen, so daß also:

$$a_n = 0, \ldots, a_{m+1} = 0, \; a_m - b_m = 0, \ldots, a_1 - b_1 = 0, \; a_0 - b_0 = 0.$$

6. Die Zerlegung einer ganzen Funktion n^{ten} Grades in Linearfaktoren ist offenbar (abgesehen von der Anordnung der Faktoren) nur auf eine einzige Weise möglich. Denn bezeichnet man wiederum mit x_1, $x_2, \ldots, x_n$ die n Nullstellen von $g(x)$ (unter denen beliebig viele einander gleich sein können), so hat man jedenfalls:

$$g(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

wenn $a_n x^n$ das höchste Glied von $g(x)$ bedeutet. Angenommen man hätte außerdem:

$$g(x) = a_n'(x - x_1')(x - x_2') \cdots (x - x_n'),$$

so folgt zunächst, das $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ wiederum die sämtlichen Wurzeln von $g(x)$, also in irgendeiner Anordnung mit den Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ identisch sein müssen. Daraus folgt dann schließlich, daß auch $a_n' = a_n$ sein muß, d h. es gibt in der Tat nur *eine* Darstellung der gedachten Art.

Ferner ergibt sich, *daß eine ganze Funktion n^{ten} Grades durch ihre n Nullstellen bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist.* Man hat nämlich, wenn wiederum $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die sämtlichen Nullstellen irgendeiner ganzen Funktion $g(x)$ vorstellen:

$$(19) \qquad g(x) = C \cdot (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = C \cdot \prod_{1}^{n}{}_{\nu} (x - x_\nu),$$

wo C eine noch willkürlich bleibende Konstante bedeutet.

Weiß man noch, daß die betreffende ganze Funktion für irgendeine Stelle x_0 einen gewissen Wert y_0 annimmt, so ist C eindeutig bestimmt. Denn man hat:

$$y_0 = g(x_0) = C \cdot \prod_{1}^{n}{}_{\nu} (x_0 - x_\nu)$$

und daher:

$$(20) \qquad g(x) = y_0 \prod_{1}^{n}{}_{\nu} \frac{x - x_\nu}{x_0 - x_\nu}.$$

§ 23. Bedingungen für die Existenz mehrfacher Wurzeln. — Einheitswurzeln.

1. Ist x_1 eine Nullstelle von $g(x)$, so nimmt wegen $g(x_1) = 0$ die Entwickelung von $g(x)$ nach Potenzen von $(x - x_1)$ (s. § 19, Gl. (28), S. 179) die Form an:

$$(1)\quad g(x) = \frac{g'(x_1)}{1!}(x - x_1) + \frac{g''(x_1)}{2!}(x - x_1)^2 + \cdots + \frac{g^{(n)}(x_1)}{n!}(x - x_1)^n.$$

Bestehen jetzt neben der Beziehung $g(x_1) = 0$ auch noch die weiteren:

$$(2)\quad g'(x_1) = 0,\ g''(x_1) = 0, \ldots, g^{m-1}(x_1) = 0 \text{ (dagegen: } |g^{(m)}(x_1)| > 0),$$

so geht die obige Entwickelung in die folgende über:

$$(3)\qquad g(x) = \frac{g^{m}(x_1)}{m!}(x - x_1)^m + \cdots + \frac{g^{(n)}(x_1)}{n!}(x - x_1)^n,$$

welche erkennen läßt, daß x_1 eine m-fache Nullstelle von $g(x)$ sein muß. Also:

Jede gemeinsame Nullstelle x_1 von $g(x)$, $g'(x), \ldots, g^{(m-1)}(x)$, welche keine Nullstelle von $g^{(m)}(x)$ darstellt, ist eine m-fache Nullstelle von $g(x)$.

Es gilt aber auch das Umgekehrte, daß für jede m-fache Nullstelle x_1 von $g(x)$ auch $g'(x_1), \ldots, g^{(m-1)}(x_1)$ verschwinden müssen, während $g^{(m)}(x_1)$ von Null verschieden ist. Denn hat $g(x)$ die Nullstelle x_1 mehr als *ein*mal, so folgt zunächst, daß x_1 jedenfalls eine Nullstelle von $\frac{g(x)}{x - x_1}$ und somit, wegen der Beziehung:

$$(4)\qquad \frac{g(x)}{x - x_1} = g'(x_1) + \frac{g''(x_1)}{2!}(x - x_1) + \cdots + \frac{g^{(n)}(x_1)}{n!}(x - x_1)^{n-1}$$

auch eine Nullstelle von $g'(x)$ sein muß, so daß sich die letzte Gleichung nach Division mit $(x - x_1)$ auf die folgende reduziert:

$$(5)\qquad \frac{g(x)}{(x - x_1)^2} = \frac{g''(x_1)}{2} + \frac{g'''(x)}{3!}(x - x_1) + \cdots + \frac{g^{(n)}(x_1)}{n!}(x - x_1)^{n-2}.$$

Daraus ergibt sich dann analog, daß auch $g''(x_1)$ verschwinden muß, falls $g(x)$ die Nullstelle x_1 mehr als *zwei*mal hat. Und in dieser Weise weiter fortschließend findet man, daß für $x = x_1$ alle Derivierten bis $g^{(m-1)}(x)$ inklusive verschwinden müssen, falls x_1 eine m-fache Nullstelle von $g(x)$ sein soll. Dagegen muß dann $g^{(m)}(x_1)$ von Null verschieden sein, da andernfalls x_1 mindestens eine $(m + 1)$-fache Nullstelle von $g(x)$ wäre. Somit gilt der Satz:

*Die **notwendige und hinreichende** Bedingung dafür, daß x_1 eine m-fache Nullstelle von $g(x)$ darstellt, besteht darin, daß neben $g(x_1)$ auch $g'(x_1)$, $g''(x_1), \ldots, g^{(m-1)}(x_1)$ aber **nicht**: $g^{(m)}(x_1)$ verschwinden.*

Daraus ergibt sich noch, daß jede m-fache Nullstelle von $g(x)$ genau eine $(m-1)$-fache von $g'(x)$ und allgemein eine $(m-\nu)$-fache ($\nu=1, 2, \ldots, m-1$) von $g^{(\nu)}(x)$ sein muß; und ferner: daß *jede mehrfache* Nullstelle von $g(x)$ eine Nullstelle von $g'(x)$ sein muß, und daß somit die Gesamtheit der *mehrfachen* Nullstellen von $g(x)$ mit derjenigen der *gemeinsamen* Nullstellen von $g(x)$ und $g'(x)$ identisch ist.

2. Wir machen zunächst eine Anwendung des eben gefundenen Resultates auf die besondere ganze Funktion:

$$g(x)=x^n-1. \tag{6}$$

Da hier:

$$g'(x)=n\cdot x^{n-1}, \tag{7}$$

so folgt, daß $g'(x)$ die $(n-1)$fache Nullstelle $x=0$ besitzt; und da andererseits $g(x)$ für $x=0$ *nicht* verschwindet, so kann $g(x)$ überhaupt keine gemeinsame Nullstelle mit $g'(x)$, also *keine mehrfache* Nullstelle besitzen. Somit ergibt sich der Satz:

Die Gleichung $x^n=1$ hat stets n verschiedene Wurzeln, welche als die n Einheitswurzeln n^{ten} Grades (kürzer: die n^{ten} Einheitswurzeln) bezeichnet werden.

Eine dieser Wurzeln hat offenbar für *jeden* Wert von n den Wert $x=1$. Die übrigen $n-1$ müssen dann nach Nr. 1 des vorigen Paragraphen die Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0 \tag{8}$$

sein.

Ist n *gerade*, so genügt offenbar auch $x=-1$ der Gleichung $x^n=1$ bzw. der Gleichung (8). Weitere *reelle* Wurzeln kann dieselbe offenbar *nicht* besitzen, da aus $x^n=1$ stets auch $|x|^n=1$, d. h. $|x|=1$ folgt. Die sämtlichen *Einheitswurzeln* werden also durch Punkte repräsentiert, welche auf der Peripherie des *Einheitskreises* (d. h. eines um den Nullpunkt mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises) liegen.

Bedeutet a irgend eine n^{te} Einheitswurzel und ist etwa:

$$a=\alpha+\beta i \quad (\text{wo: } \alpha^2+\beta^2=1), \tag{9}$$

so hat man:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n=\frac{1}{a^n}=1 \quad \text{und: } \frac{1}{a}=\alpha-\beta i \tag{10}$$

d. h. gleichzeitig mit a ist auch $\frac{1}{a}$ eine n^{te} Einheitswurzel, und zwar sind a und $\frac{1}{a}$ stets *konjugiert.*[1])

1) Gilt auch für $a=\pm 1$, da ja eine *reelle* Zahl sich selbst *konjugiert* ist

Da ferner, falls wiederum $a^n = 1$, für jedes ganzzahlige p folgt:

$$(a^{\pm p})^n = (a^n)^{\pm p} = 1, \tag{11}$$

so stellt gleichzeitig mit a auch jede ganzzahlige Potenz $a^{\pm p}$ eine n^{te} Einheitswurzel vor.

Auch erkennt man ohne weiteres, daß das *Produkt*, sowie der *Quotient* zweier n^{ten} Einheitswurzeln a und a' stets wiederum eine n^{te} Einheitswurzel liefert, denn man hat:

$$(a \cdot a')^n = a^n \cdot a'^n = 1, \quad \left(\frac{a}{a'}\right)^n = \frac{a^n}{a'^n} = 1. \tag{12}$$

3. Sieht man von dem (trivialen) Falle $n = 2$ ab, welcher nur die beiden Wurzeln ± 1 liefert, so besitzt die Gleichung $x^n = 1$ nach dem bisher Gesagten stets (mindestens zwei) nicht-reelle Wurzeln, über deren Verteilung auf dem Einheitskreise sich folgendes aussagen läßt.

Bedeutet a irgend eine komplexe Zahl mit dem Absolutwerte 1, also, geometrisch gesprochen, einen auf dem Einheitskreise liegenden Punkt, dessen Radiusvektor mit der positiven reellen Achse einen gewissen Winkel ϑ bilden möge, so liegt (nach § 14, Nr. 4, S. 138) der Punkt $a^2 = a \cdot a$ gleichfalls auf dem Einheitskreise, und zwar auf dem Radius, der mit der reellen Achse den Winkel 2ϑ bildet, ebenso $a^3 = a \cdot a^2$ auf dem Radius mit dem Richtungswinkel 3ϑ usf.

Denkt man sich also den Einheitskreis durch n äquidistante Punkte, mit dem Punkte 1 beginnend und in der Richtung der wachsenden Winkel mit $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ bezeichnet, in n gleiche Teilbögen zerlegt, so hat man: $a_1^2 = a_2$, $a_1^3 = a_3, \ldots, a_1^{n-1} = a_{n-1}$ und schließlich: $a_1^n = 1$. Es existiert also eine ganz bestimmte, nämlich, geometrisch gesprochen, dem Punkte 1 auf der *oberen* Halbebene *nächstgelegene* n^{te} Einheitswurzel a_1 von der Beschaffenheit, daß die sämtlichen n Einheitswurzeln in der Form $a_1, a_1^2, \ldots, a_1^{n-1}, a_1^n (= a_1^0)$ darstellbar sind. Sie mag als die n^{te} *Grund*einheitswurzel bezeichnet werden und ist arithmetisch offenbar dadurch charakterisiert, daß sie unter den nicht-reellen Wurzeln einen *maximalen reellen* und zugleich einen *positiv-imaginären* Teil besitzt.

Es hat keine besondere Schwierigkeit, das Vorstehende (lediglich zu vorläufiger Orientierung) auf geometrischem Wege abgeleitete Ergebnis rein arithmetisch (und zwar, abgesehen von dem als gegeben anzusehenden Satze über die *Wurzelexistenz*, sogar „rein algebraisch“, d. h. ohne Zuhilfenahme „transzendenter“ Funktionen) zu begründen. Wir sehen jedoch davon ab, da wir sehr bald Veranlassung haben werden, den für uns zunächst besonders wichtigen Fall $n = 2^m$ ganz unabhängig von dem Fundamentalsatze der Algebra und den daran geknüpften Folgerungen mit

aller Ausführlichkeit zu behandeln, andererseits für die Funktionentheorie der Zusammenhang der Einheitswurzeln mit gewissen transzendenten Funktionen späterhin doch nicht entbehrt werden kann.

§ 24. Die Interpolationsformel von Lagrange.

1. Aus dem Satze, daß jede ganze Funktion n^{ten} Grades n Nullstellen besitzt, folgt offenbar ohne weiteres der allgemeinere Satz, daß sie einen beliebig vorgeschriebenen Wert a für n (verschiedene bzw. auch sämtlich oder teilweise „zusammenfallende“) Stellen annehmen muß. Denn die ganze Funktion $g(x) - a$ wird für n Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu *Null* und man hat somit $g(x_\nu) = a$ (für $\nu = 1, 2, \ldots, n$). Dabei können aber wiederum unter den Zahlen x_ν beliebig viele einander gleich sein; ist dann etwa x' eine m-fache Nullstelle von $g(x) - a$, ist also $g(x) - a$ durch $(x - x')^m$, aber keine höhere Potenz von $(x - x')$ teilbar, so sagen wir analog mit der früher gebrauchten Ausdrucksweise: es nehme $g(x)$ an der Stelle $x = x'$ den Wert a *m-mal* an und wir zählen eine solche Stelle wiederum für m Stellen mit dem Werte $g(x') = a$.

Eine ganze Funktion n^{ten} Grades, die irgendeinen Wert a *öfter* als n-mal annimmt, muß offenbar *konstant*, nämlich durchweg $= a$ sein.

An die vorstehende Betrachtung knüpft sich naturgemäß die Frage, inwieweit eine ganze Funktion n^{ten} Grades bestimmt ist, wenn statt der Nullstellen eine geeignete Anzahl von Stellen x_ν gegeben ist, für welche sie eine Reihe beliebig vorgeschriebener Werte y_ν annehmen soll. Wir zeigen:

> *Es gibt stets eine und nur eine ganze Fnnktion höchstens vom n^{ten} Grade, welche für $(n+1)$ beliebig vorgeschriebene verschiedene Stellen x_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ die $(n+1)$ gleichfalls beliebig vorgeschriebenen (verschiedenen oder auch teilweise gleichen) Werte y_ν annimmt.*

Beweis. Man kann zunächst eine ganze Funktion $g_\nu(x)$ bilden, welche für die Stellen $x_0, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_n$ verschwindet und für $x = x_\nu$ den Wert y_ν annimmt. Man hat nämlich nach Gl. (20) des vorletzten Paragraphen (S. 194), falls y_ν von Null verschieden:

$$(1) \qquad g_\nu(x) = y_\nu \cdot \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{\nu-1})(x - x_{\nu+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_\nu - x_0) \cdots (x_\nu - x_{\nu-1})(x_\nu - x_{\nu+1}) \cdots (x_\nu - x_n)}.$$

Diese Formel liefert schließlich auch im Falle $y_\nu = 0$ den passenden Wert, nämlich:

$$g_\nu(x) = 0.$$

Gibt man hier ν der Reihe nach die Werte 0, 1, ..., n und setzt:

$$(2) \qquad G(x) = \sum_{0}^{n} g_\nu(x),$$

so ist $G(x)$ die verlangte ganze Funktion höchstens vom n^{ten} Grade. Denn setzt man $x = x_\mu$ (wo μ irgendeine der Zahlen 0, 1, .., n bedeutet), so verschwinden $g_1(x), \ldots, g_{\mu-1}(x), g_{\mu+1}(x), \ldots, g_n(x)$, während $g_\mu(x)$ sich auf y_μ reduziert. Dabei kann sich offenbar der Grad $G(x)$ dadurch *erniedrigen*, daß der Koeffizient von x^n bzw. die Koeffizienten von $x^n, x^{n-1}, \ldots, x^{n-k+1}$ verschwinden, so daß dann $G(x)$ schließlich nur vom $(n-1)^{\text{ten}}$ bzw. $(n-k)^{\text{ten}}$ Grade resultiert.

Daß aber $G(x)$ auch die *einzige* Funktion von der verlangten Beschaffenheit ist, ergibt sich ohne weiteres daraus, daß jede andere ganze Funktion n^{ten} (oder niedrigeren) Grades, welche den gegebenen Bedingungen genügt, mit $G(x)$ für $(n+1)$ Stellen übereinstimmen und somit mit $G(x)$ identisch sein müßte Sind also die Werte $y_0, y_1, \ldots, y_n$ so beschaffen, daß eine ganze Funktion $\gamma(x)$ von niedrigerem Grade als dem n^{ten} existiert, derart daß: $\gamma(x_0) = y_0, \gamma(x_1) = y_1, \ldots, \gamma(x_n) = y_n$, so liefert Gl. (2) mit Sicherheit diese Funktion $\gamma(x)$. Andererseits wird nur durch den Zusatz, die zu konstruierende ganze Funktion solle *höchstens* vom Grade n sein, die fragliche Aufgabe zu einer *eindeutigen* gemacht. Denn, läßt man diese Bedingung fallen, so gibt es *unendlich viele* ganze Funktionen der verlangten Art, nämlich alle möglichen von der Form $G(x) + F(x)$, wo $F(x)$ jede *beliebige* ganze Funktion mit den *Nullstellen* x_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n$) bedeutet, also jede, die den in Gl. (5) der folgenden Seite mit $P(x)$ bezeichneten Faktor $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades besitzt (selbstverständlich mit Einschluß von $P(x)$ selbst).

Die Gleichung (2) (in Verbindung mit Gleichung (1)) wird als die *Lagrange*sche Interpolationsformel bezeichnet. Sind die x_ν, y_ν sämtlich *reell* und schränkt man auch die Veränderliche x auf das reelle Gebiet ein, so löst dieselbe, geometrisch gedeutet, das folgende Problem: *Durch $(n+1)$ gegebene Punkte (x_ν, y_ν) eine parabolische Kurve n^{ten} Grades, d. h. eine Kurve von der Gleichungsform: $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ zu legen.*

2. Die in Gl. (2) auftretenden Funktionen $g_\nu(x)$ gestatten noch eine etwas einfachere Schreibweise als die in (1) angegebene. Ist:

$$g(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

so folgt aus § 19, Gl. (18), S. 176, daß:

$$(3) \quad g'(x) = \sum_{1}^{n} \frac{g(x)}{x - x_\nu} = a_n \sum_{1}^{n} (x - x_1) \cdots (x - x_{\nu-1})(x - x_{\nu+1}) \cdots (x - x_n).$$

Hieraus folgt speziell, da für $x = x_\mu$ alle Glieder $\frac{g(x)}{x - x_\nu}$ mit Ausnahme des für $\nu = \mu$ resultierenden verschwinden:

$$(4)\quad g'(x_\mu) = \left(\frac{g(x)}{x - x_\mu}\right)_{x = x_\mu} = a_n(x_\mu - x_1)\cdots(x_\mu - x_{\mu-1})(x_\mu - x_{\mu+1})\cdots(x_\mu - x_n).$$

Um mit Hilfe dieser Formel die Gleichung (1) zu vereinfachen, werde gesetzt:

$$(5)\qquad (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) = P(x),$$

also mit Benützung von Gl. (4):

$$g_\nu(x) = y_\nu \cdot \frac{P(x)}{P'(x_\nu)\ (x - x_\nu)},$$

so daß die *Lagrange*sche Interpolationsformel nunmehr die Form annimmt:

$$(6)\qquad G(x) = \sum_0^n{}_\nu \frac{y_\nu}{P'(x_\nu)} \cdot \frac{P(x)}{x - x_\nu}.$$

§ 25. Symmetrische Funktionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung und deren Darstellung als Funktionen der Koeffizienten.

1. Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die n Nullstellen der ganzen Funktion:

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

so hat man:

$$(1)\qquad \frac{g(x)}{a_n} = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}\cdot x + \frac{a_0}{a_n}$$

und andererseits:

$$(2)\qquad \frac{g(x)}{a_n} = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Führt man die angedeutete Multiplikation aus und setzt zur Abkürzung:

$$(3)\quad \begin{cases} \sum\limits_1^n{}_\nu x_\nu = \sum\limits_\nu x_\nu, \quad \sum\limits_2^n{}_{\nu_2} \sum\limits_1^{n-1}{}_{\nu_1} x_{\nu_1} x_{\nu_2} = \sum\limits_{\nu_1 \nu_2} x_{\nu_1} x_{\nu_2}, \quad (\nu_2 > \nu_1) \\ \sum\limits_3^n{}_{\nu_3} \sum\limits_2^{n-1}{}_{\nu_2} \sum\limits_1^{n-2}{}_{\nu_1} x_{\nu_1} x_{\nu_2} x_{\nu_3} = \sum\limits_{\nu_1 \nu_2 \nu_3} x_{\nu_1} x_{\nu_2} x_{\nu_3}, \quad (\nu_3 > \nu_2 > \nu_1) \end{cases}$$

usf., d. h. bezeichnet man allgemein die Summe der (als *Produkte* aufzufassenden) Kombinationen (ohne Wiederholung) der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zur $\varkappa^{\text{ten}}$ Klasse mit:

$$\sum_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_\varkappa} x_{\nu_1} x_{\nu_2} \cdots x_{\nu_\varkappa},$$

so liefert die Vergleichung der Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x in den beiden Ausdrücken (1) und (2) die Beziehungen:

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{a_{n-1}}{a_n} = -\sum\limits_{\nu} x_\nu = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\ \dfrac{a_{n-2}}{a_n} = +\sum\limits_{\nu_1 \nu_2} x_{\nu_1} x_{\nu_2} \\ \dfrac{a_{n-3}}{a_n} = -\sum\limits_{\nu_1 \nu_2 \nu_3} x_{\nu_1} x_{\nu_2} x_{\nu_3} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{a_{n-\varkappa}}{a_n} = (-1)^\varkappa \cdot \sum\limits_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_\varkappa} x_{\nu_1} x_{\nu_2} \cdots x_{\nu_\varkappa} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{a_0}{a_n} = (-1)^n \cdot x_1 x_2 \cdots x_n, \end{cases}$$

d. h. die durch den Koeffizienten von x^n dividierten Koeffizienten von $g(x)$ sind durch die verschiedenen *Kombinationssummen* der Wurzeln von $g(x) = 0$ darstellbar. Daraus erkennt man wiederum, daß diese Koeffizienten durch die n Wurzeln bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt sind.

2. Faßt man die Gleichungen (4) umgekehrt auf, so besagen sie, daß die Kombinationssummen der Wurzeln *rational* durch die Koeffizienten a_ν darstellbar sind. Diese Eigenschaft kommt aber einer sehr allgemeinen Klasse von Verbindungen der Wurzeln x_ν zu, von denen wir zunächst die sogenannten *Potenzsummen*:

$$(5)\qquad s_\varkappa = x_1^\varkappa + x_2^\varkappa \cdots + x_n^\varkappa = \sum_1^n {}^{\nu}\, x_\nu^\varkappa$$

$\left(\text{wo also speziell: } s_1 = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right)$ in Betracht ziehen wollen. Um die Beziehung zwischen den $s_\varkappa$ und den Koeffizienten a_ν aufzufinden, vergleichen wir den ursprünglichen Ausdruck der Derivierten $g'(x)$, nämlich:

$$(6)\qquad g'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-2} + (n-2) a_{n-2} x^{n-3} + (n-3) a_{n-3} x^{n-4} + \cdots + a_1$$

mit dem im vorigen Paragraphen Gl. (3) benützten[1]):

$$(7)\qquad g'(x) = \sum_1^n {}^{\nu} \frac{g(x)}{x - x_\nu} = \sum_1^n {}^{\nu} \frac{g(x) - g(x_\nu)}{x - x_\nu} \quad (\text{wegen: } g(x_\nu) = 0).$$

---

1) In dem dortigen Zusammenhange unter der Voraussetzung, daß $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durchweg von einander *verschieden*, was aber für die Gültigkeit der Formel ohne Belang ist (vgl S. 176, Fußnote 1).

Um den letzteren nach Potenzen von x zu ordnen, bilden wir zunächst:

$$\frac{g(x)-g(x_\nu)}{x-x_\nu}$$

$$=a_n\cdot\frac{x^n-x_\nu^n}{x-x_\nu}+a_{n-1}\cdot\frac{x^{n-1}-x_\nu^{n-1}}{x-x_\nu}+a_{n-2}\cdot\frac{x^{n-2}-x_\nu^{n-2}}{x-x_\nu}+\cdots+a_2\frac{x^2-x_\nu^2}{x-x_\nu}+a_1$$

oder, indem man die einzelnen Divisionen ausführt:

$$\text{(8)}\qquad \frac{g(x)-g(x_\nu)}{x-x_\nu}$$

$$\begin{aligned}
=a_nx^{n-1}+a_n\,x_\nu\,x^{n-2}+a_n\,x_\nu^2\,x^{n-3}+a_nx_\nu^3\cdot x^{n-4}+\cdots+a_nx_\nu^{n-1}\\
+a_{n-1}\cdot x^{n-2}+a_{n-1}x_\nu x^{n-3}+a_{n-1}x_\nu^2x^{n-4}+\cdots+a_{n-1}x_\nu^{n-2}\\
+a_{n-2}\cdot x^{n-3}+a_{n-2}x_\nu\,x^{n-4}+\cdots+a_{n-2}x_\nu^{n-3}\\
+a_{n-3}\quad x^{n-4}+\cdots+a_{n-3}x_\nu^{n-4}\\
+\cdots\cdots\cdots\cdots\\
+a_2\,x_\nu\\
+a_1,
\end{aligned}$$

so daß Gl. (7) mit Benutzung der Bezeichnung (5) die folgende Form annimmt:

$$\text{(9)}\qquad g'(x)$$

$$\begin{aligned}
=na_nx^{n-1}+a_ns_1 \Big|\, x^{n-2}+a_ns_2 \Big|\, x^{n-3}+a_ns_3 \Big|\, x^{n-4}+\cdots+a_ns_{n-1}\\
+na_{n-1}\quad\quad +a_{n-1}s_1\quad\quad +a_{n-1}s_2\quad\quad +a_{n-1}s_{n-2}\\
+na_{n-2}\quad\quad +a_{n-2}s_1\quad\quad +a_{n-2}s_{n-3}\\
+na_{n-3}\quad\quad +a_{n-3}s_{n-4}\\
+\cdots\cdots\\
+a_2s_1\\
+na_1.
\end{aligned}$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten der Ausdrücke (9) und (6) ergeben sich daher die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
&a_ns_1+na_{n-1} && =(n-1)a_{n-1}\\
&a_ns_2+a_{n-1}s_1+na_{n-2} && =(n-2)a_{n-2}\\
&a_ns_3+a_{n-1}s_2+a_{n-2}s_1+na_{n-3} && =(n-3)a_{n-3}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_ns_{n-1}+a_{n-1}s_{n-2}+a_{n-2}s_{n-3}+\cdots+a_2s_1+na_1 && =a_1
\end{aligned}$$

oder, anders geschrieben, die „*Newtonschen Formeln*“:

$$(10)\quad \begin{cases} a_n s_1 + a_{n-1} = 0 \\ a_n s_2 + a_{n-1} s_1 + 2a_{n-2} = 0 \\ a_n s_3 + a_{n-1} s_2 + a_{n-2} s_1 + 3a_{n-3} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n s_{n-1} + a_{n-1} s_{n-2} + a_{n-2} s_{n-3} + \dots + a_2 s_1 + (n-1) a_1 = 0 \end{cases}$$

d. h. man hat allgemein:

$$(10\text{a})\quad a_n s_\varkappa + a_{n-1} s_{\varkappa-1} + \dots + a_{n-\varkappa+1} s_1 + \varkappa a_{n-\varkappa} = 0 \quad (\varkappa = 1, 2, \dots n-1),$$

eine *Rekursionsformel*, mit Hilfe deren man zunächst $s_\varkappa$ als linearen Ausdruck in $\frac{a_{n-1}}{a_n}, \dots, \frac{a_{n-\varkappa}}{a_n}$ und in $s_1, s_2, \dots, s_{\varkappa-1}$ mit ganzzahligen Koeffizienten und somit schließlich als ganze rationale Funktion von $\frac{a_{n-1}}{a_n}, \dots, \frac{a_{n-\varkappa}}{a_n}$ mit ganzzahligen Koeffizienten findet.[1]) Es ergibt sich z. B.;

$$(11)\quad \begin{cases} s_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ s_2 = \frac{1}{a_n^2}(a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}a_n) \\ s_3 = -\frac{1}{a_n^3}(a_{n-1}^3 - 3a_{n-2}a_{n-1}a_n + 3a_{n-3}a_n^2) \end{cases}$$

usf.

Will man allgemein für $s_\varkappa$ eine explizite Darstellung durch die Koeffizienten a_ν ableiten, so setze man die Gleichungen (10) bis zur $\varkappa^{\text{ten}}$ hin in die Form:

$$\begin{aligned} a_n s_1 \quad + 0 \cdot s_2 \quad + 0 \cdot s_3 + \dots + 0 \cdot s_\varkappa &= -a_{n-1} \\ a_{n-1} s_1 + a_n s_2 \quad + 0\ s_3 + \dots + 0 \cdot s_\varkappa &= -2a_{n-2} \\ a_{n-2} s_1 + a_{n-1} s_2 + a_n s_3 + \dots + 0 \cdot s_\varkappa &= -3a_{n-3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-\varkappa+1} s_1 + a_{n-\varkappa+2} s_2 + a_{n-\varkappa+3} s_3 + \dots + a_n s_\varkappa &= -\varkappa a_{n-\varkappa} \end{aligned}$$

$$(\varkappa = 1, 2, \dots, n-1).$$

Als Determinante dieses Systems ergibt sich:

$$(12)\quad \begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & \dots 0 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \dots 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots 0 \\ a_{n-\varkappa+1} & a_{n-\varkappa+2} & a_{n-\varkappa+3} & \dots a_n \end{vmatrix} = a_n^\varkappa.$$

---

1) Ist $a_n = 1$, so erscheinen also die Potenzsummen $s_\varkappa$ als ganze Funktionen der Koeffizienten $a_{n-1}, \dots, a_{n-\varkappa}$ mit ganzzahligen Koeffizienten

Setzt man sodann:

$$(13)\quad \begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & \cdots - a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots - 2a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdots - 3a_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-\varkappa+1} & a_{n-\varkappa+2} & a_{n-\varkappa+3} & \cdots - \varkappa a_{n-\varkappa} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^\varkappa \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots 0 \\ 2a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdots 0 \\ 3a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varkappa a_{n-\varkappa} & a_{n-\varkappa+1} & a_{n-\varkappa+2} & \cdots a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^\varkappa \cdot \Delta_\varkappa$$

so ergibt sich:

$$(14)\qquad s_\varkappa = \left(\frac{-1}{a_n}\right)^\varkappa \cdot \Delta_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n-1).^{1)}$$

Um eine Formel zur Darstellung von $s_\varkappa$ für $\varkappa \geqq n$ zu finden, benutzt man die Identität:

$$(15)\quad a_n x_\nu^n + a_{n-1} x_\nu^{n-1} + \cdots + a_1 x_\nu + a_0 = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Legt man hier dem Index ν sukzessive die Werte $1, 2, \ldots, n$ bei, so ergibt sich durch Addition aller resultierenden Gleichungen:

$$(16)\qquad a_n s_n + a_{n-1} s_{n-1} + \cdots + a_1 s_1 + n a_0 = 0,$$

eine Formel zur Berechnung von s_n, die offenbar noch genau die Gestalt der Formel (10) hat, bzw. für $\varkappa = n$ daraus hervorgeht.

Multipliziert man sodann Gl. (15) mit einer beliebigen positiven ganzzahligen Potenz x_n^p, so folgt, wenn man wiederum $\nu = 1, 2, \ldots, n$ setzt und alles addiert:

$$(17)\quad a_n s_{n+p} + a_{n-1} s_{n+p-1} + \cdots + a_1 s_{p+1} + a_0 s_p = 0 \quad (p = 1, 2, 3, \ldots),$$

---

1) Löst man umgekehrt das Linearsystem (10) nach $\frac{a_{n-\varkappa}}{a_n}$ auf, so ergibt sich zunächst für $\varkappa = 1, 2, \ldots, (n-1)$:

$$\frac{a_{n-\varkappa}}{a_n} = \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa!} \cdot \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \ldots 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \ldots 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{\varkappa-1} & s_{\varkappa-2} & s_{\varkappa-3} & \ldots (\varkappa-1) \\ s_\varkappa & s_{\varkappa-1} & s_{\varkappa-2} & \cdots s_1 \end{vmatrix}.$$

Dieses Resultat gilt dann mit Hinzunahme von Gl. (16) auch noch für $\varkappa = n$.

also eine Rekursionsformel zur Berechnung von s_{n+p} für $p = 1, 2, 3, \ldots$ (für $p = 0$ geht dieselbe, wegen $s_0 = n$, wieder in die Formel (16) über).[1])

Es ergibt sich somit das Resultat:

Die Potenzsummen beliebigen (positiven, ganzzahligen) Grades der n Nullstellen einer ganzen Funktion (Wurzeln einer Gleichung) n^{ten} Grades sind als ganze Funktionen der durch a_n (d. h. durch

---

1) Die Gleichung (17) bleibt offenbar auch richtig, wenn man p durch $-p$ ersetzt (wobei dann $s_{-\varkappa}$ selbstverständlich die Bedeutung von $\sum_1^n {}_\nu x_\nu^{-\varkappa}$ hat) Nimmt man speziell $p = -1$, so wird:

$$a_n s_{n-1} + a_{n-1} s_{n-2} + \cdots + a_1 s_0 + a_0 s_{-1} = 0.$$

Man kann also zunächst s_{-1} mit Hilfe von $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ rational durch die Koeffizienten ausdrücken. Ebenso läßt sich dann s_{-2} mit Hilfe von $s_{-1}, s_0, s_1, \ldots, s_{n-2}$ als rationale Funktion der Koeffizienten darstellen usf.

Man kann aber auch $s_{-1}, s_{-2}, \ldots$ *direkt*, d. h. ohne die Vermittelung von $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$, durch die Koeffizienten ausdrücken Setzt man nämlich $x = \frac{1}{y}$, so geht $g(x)$ nach Multiplikation mit y^n über in:

$$f(y) \equiv a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y + a_n.$$

Bezeichnet man dann die Wurzeln von $f(y)$ mit y_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), so hat man:

$$y_\nu = \frac{1}{x_\nu} = x_\nu^{-1}$$

und daher:

$$s_{-\varkappa} = \sum_1^n {}_\nu\, y_\nu^\varkappa,$$

d h. die $s_{-\varkappa}$ drücken sich genau in derselben Weise durch die Koeffizienten von $f(y)$ aus, wie die $s_\varkappa$ durch diejenigen von $g(x)$. Man findet also nach Analogie von (11):

$$s_{-1} = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$s_{-2} = \frac{1}{a_0^2}(a_1^2 - 2a_2)$$

$$s_{-3} = -\frac{1}{a_0^3}(a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2 + a_0^2 a_3),$$

und allgemein geht $s_{-\varkappa}$ aus $s_\varkappa$ hervor, indem man jeden Koeffizienten

$$a_{n-\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

durch a_ν ersetzt Es erscheint somit $s_{-\varkappa}$ als *ganze* Funktion von

$$\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots, \frac{a_\varkappa}{a_0} \ (\varkappa \leqq n) \qquad \text{bzw.} \ \frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0} \ (\varkappa \geqq n)$$

Ist also speziell $a_0 = 1$, so erscheinen die $s_{-\varkappa}$ als *ganze* Funktionen von

$$a_1, a_2, \ldots, a_\varkappa \quad \text{bzw.} \ a_1, a_2, \ldots, a_n$$

mit ganzzahligen Koeffizienten.

den Koeffizienten von x^n) dividierten Koeffizienten mit ganzzahligen Koeffizienten darstellbar.

Oder auch, da ja die Quotienten $\frac{a_\nu}{a_n}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$ den mit bestimmtem Vorzeichen versehenen Kombinationssummen der x_ν gleich sind:

Die Potenzsummen der n Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lassen sich als ganze Funktionen der Kombinationssummen mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen.

3. Die Kombinations- und Potenzsummen von n Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ besitzen die gemeinsame charakteristische Eigenschaft, daß sie ganze *symmetrische* Funktionen jener n Größen sind, d. h. daß sie *ungeändert* bleiben, falls man irgendzwei Elemente x_μ, x_ν miteinander vertauscht. Es läßt sich nun zeigen, daß *jede* ganze symmetrische Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als ganze Funktion der Potenzsummen $s_\varkappa$ und somit, falls man wiederum die x_ν als Nullstellen einer ganzen Funktion $g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ auffaßt, als ganze Funktion der $\frac{a_\nu}{a_n}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$ sich darstellen läßt.

Hierzu betrachten wir zunächst einen Ausdruck von der Form:

$$\varphi_\varkappa = \varphi[p_1, p_2, \ldots, p_\varkappa] = \sum x_{\nu_1}^{p_1} x_{\nu_2}^{p_2} \ldots x_{\nu_\varkappa}^{p_\varkappa}, \tag{18}$$

wo die $p_\varkappa$ beliebige, aber *feste* positive ganze Zahlen bedeuten, die zunächst ausdrücklich als sämtlich *verschieden* angenommen werden, und wo die angedeutete Summation auf *alle möglichen Kombinationen zur $\varkappa^{\text{ten}}$ Klasse nebst Permutationen* von n Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (Anzahl: $n(n-1) \cdots (n-\varkappa+1)$) sich erstrecken soll.[1]) Der Ausdruck $\varphi_\varkappa$ stellt dann offenbar eine ganze *symmetrische* Funktion der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dar, da bei einer Vertauschung von x_μ und x_ν lediglich die *Reihenfolge* der in $\varphi_\varkappa$ enthaltenen Summanden geändert wird.

Man hat nun zunächst:

$$\varphi_1 = \varphi[p_1] = \sum x_{\nu_1}^{p_1} = s_{p_1} \tag{19}$$

1) In ausführlicherer Schreibweise hätte man also:

$$\varphi_\varkappa = \sum_1^n{}_{\nu_\varkappa} \sum_1^n{}_{\nu_{\varkappa-1}} \cdot \cdot \sum_1^n{}_{\nu_1} x_{\nu_1}^{p_1} x_{\nu_2}^{p_2} \cdots x_{p_\varkappa}^{p_\varkappa},$$

wobei aber die Summation so einzuschränken ist, daß niemals irgendzwei der Indizes $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa$ einander gleich werden sollen. — Man bezeichnet eine ganze Funktion mehrerer Elemente bzw. Variablen x_ν, bei der jedes Glied die gleiche Anzahl n von Faktoren x_ν enthält als *homogen vom Grade n*. Die $\varphi_\varkappa$ sind also homogen vom Grade $p_1 + p_2 + \cdots + p_\varkappa$.

Bildet man sodann:

$$s_{p_2}\cdot\varphi_1=\sum x_{\nu_2}^{p_2}\cdot\sum x_{\nu_1}^{p_1}=\sum x_{\nu_1}^{p_1}x_{\nu_2}^{p_2}+\sum x_{\nu_1}^{p_1+p_2}$$
$$=\varphi_2+s_{p_1+p_2},$$

so ergibt sich:

(20) $$\varphi_2 \cdot = s_{p_1}s_{p_2}\cdot - s_{p_1+p_2}\cdot$$

Angenommen nun, man hätte für irgendeinen Wert $\varkappa$ das zugehörige $\varphi_\varkappa$ in ähnlicher Weise wie φ_2 als ganze Funktion von Potenzsummen mit ganzzahligen Koeffizienten dargestellt, so bilde man:

$$s_{p_{\varkappa+1}}\cdot\varphi_\nu=\sum x_{\nu_{\varkappa+1}}^{p_{\varkappa+1}}\cdot\sum x_{\nu_1}^{p_1}\cdot x_{\nu_2}^{p_2}\cdots x_{\nu_\varkappa}^{p_\varkappa},$$

wobei sich durch Ausführung der angedeuteten Multiplikation ergibt:

$$s_{p_{\varkappa+1}}\ \varphi_\varkappa=\sum x_{\nu_1}^{p_1}x_{\nu_2}^{p_2}\cdots x_{\nu_\varkappa}^{p_\varkappa}x_{\nu_{\varkappa+1}}^{p_{\varkappa+1}}+\sum x_{\nu_1}^{p_1+p_{\varkappa+1}}x_{\nu_2}^{p_2}\cdots x_{\nu_\varkappa}^{p_\varkappa}+\cdots+$$
$$+\sum x_{\nu_1}^{p_1}x_{\nu_2}^{p_2}\cdots x_{\nu_{\varkappa-1}}^{p_{\varkappa-1}}x_{\nu_\varkappa}^{p_\varkappa+p_{\varkappa+1}}$$
$$=\varphi_{\varkappa+1}+\varphi[p_1+p_{\varkappa+1},p_2,\cdots p_\varkappa]+\cdots+$$
$$+\varphi[p_1,p_2,\cdots p_{\varkappa-1},p_\varkappa+p_{\varkappa+1}]$$

und daher:

(21) $$\varphi_{\varkappa+1}=s_{p_{\varkappa+1}}\cdot\varphi_\varkappa-\varphi[p_1+p_{\varkappa+1},p_2,\cdots p_\varkappa]-\cdots-$$
$$-\varphi[p_1,p_2,\cdots p_{\varkappa+1},p_\varkappa+p_{\varkappa+1}].$$

Da die rechts auftretenden φ-Funktionen durchweg von der Form $\varphi_\varkappa$ sind (d. h. da jeder ihrer Terme aus $\varkappa$ Faktoren besteht), so sind sie infolge der gemachten Voraussetzung sämtlich als ganze Funktionen der Potenzsummen mit ganzzahligen Koeffizienten darstellbar, und somit liefert Gl. (21) das gleiche Resultat für $\varphi_{\varkappa+1}$. Nachdem aber die Möglichkeit der fraglichen Darstellung für φ_2 erwiesen (Gl. (20)), gilt sie nunmehr für den *zunächst höheren* und damit schließlich für *jeden höheren* Index $\varkappa$.

Die vorstehenden Resultate erleiden eine leicht zu übersehende Abänderung, wenn mehrere der Exponenten p_ν einander *gleich* sind, da alsdann bei der Bildung von *allen überhaupt möglichen Permutationen* Gruppen von *gleichen* Gliedern vorkommen werden, die man behufs Herstellung der *einfachsten* symmetrischen Funktionen der betrachteten Art offenbar auf je ein *einziges* Glied reduzieren kann. Ist z B. $p_1=p_2$, so liefert die Permutation $x_\mu^{p_1}\cdot x_\nu^{p_2}$ und $x_\nu^{p_1}\cdot x_\mu^{p_2}$ für jedes Wertepaar μ,ν den *nämlichen* Ausdruck und die Gesamtzahl der wirklich *verschiedenen* Glieder reduziert sich somit auf die Hälfte der ursprünglichen. Hätte man $p_1=p_2=p_3$, so würde aus $x_\lambda^{p_1}x_\mu^{p_2}x_\nu^{p_3}$ für die 3! möglichen Permutationen jedes Wertesystems λ,μ,ν immer wieder dasselbe Glied zum Vorschein

kommen, d. h. die Anzahl der *verschiedenen* Glieder reduziert sich auf $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$ der ursprünglichen.

Allgemein: Sind unter den $\varkappa$ Exponenten $p_1, p_2, \ldots, p_\varkappa$ je $m_1, m_2, \ldots, m_\lambda$ einander gleich (wo die einzelnen $m_\nu \geqq 1$ und $m_1 + m_2 + \cdots + m_\lambda = \varkappa$) und bezeichnet wieder $\varphi_\varkappa$ die Summe *aller überhaupt möglichen* Permutationen, dagegen $\sum x_{\nu_1}^{p_1} x_{\nu_2}^{p_2} \ldots x_{\nu_\varkappa}^{p_\varkappa}$ lediglich die Summe aller möglichen, wirklich *verschiedenen* Glieder, so hat man:

$$\sum x_{\nu_1}^{p_1} x_{\nu_2}^{p_2} \ldots x_{\nu_\varkappa}^{p_\varkappa} = \frac{1}{m_1!\, m_2! \ldots m_\lambda!} \cdot \varphi_\varkappa, \tag{22}$$

wo die $\varphi_\varkappa$ genau die frühere Bedeutung haben.

4. Betrachtet man jetzt eine *beliebige ganze symmetrische Funktion* $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, so ist leicht zu erkennen, daß eine solche immer nur aus einem Aggregat von Funktionen der Form $\sum x_{\nu_1}^{p_1} x_{\nu_2}^{p_2} \ldots x_{\nu_\varkappa}^{p_\varkappa}$ bestehen kann. Denn da *ein* Glied von der Form $C_\varkappa \cdot x_{\nu_1}^{p_1} x_{\nu_2}^{p_2} \ldots x_{\nu_\varkappa}^{p_\varkappa}$ bei Vornahme aller möglichen Permutationen der x_ν sukzessive in die sämtlichen *verschiedenen* Glieder der oben mit $\varphi_\varkappa$ bezeichneten Funktion übergeht, so muß der Ausdruck $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von *vornherein* schon die *Gesamtheit* der durch $C_\varkappa \cdot \sum x_{\nu_1}^{p_1} x_{\nu_2}^{p_2} \ldots x_{\nu_\varkappa}^{p_\varkappa}$ dargestellten Terme enthalten, wenn keine jener Permutationen eine Veränderung von G hervorbringen soll. Somit ergibt sich mit Benützung des in voriger Nummer entwickelten Resultates der Satz:

> *Jede ganze symmetrische Funktion von n Elementen:* $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *läßt sich als ganze rationale Funktion der Potenzsummen, also auch als solche der Kombinationssummen darstellen (und zwar wiederum mit ganzzahligen Koeffizienten, wenn die Koeffizienten von G ganze Zahlen sind). Sind also* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *die n Nullstellen von* $g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, *so ist* $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *als ganze Funktion von* $\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}$ *darstellbar* (eventuell, wie oben, mit *ganzzahligen Koeffizienten*).

§ 26. Division und größter gemeinsamer Teiler zweier ganzer Funktionen. — Darstellung des Quotienten zweier ganzen Funktionen durch einen Kettenbruch.

1. Es sei $n \geqq m$ und:

$$\begin{cases} g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ f(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0. \end{cases} \tag{1}$$

Multipliziert man die zweite dieser Gleichungen mit: $\frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m}$ und sub-

trahiert sie von der ersten, so folgt:

$$(2)\quad \begin{cases} g(x) - \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot f(x) = \frac{1}{b_m}(c_{n-1}^{(1)} x^{n-1} + c_{n-2}^{(1)} x^{n-2} + \cdots + c_1^{(1)} x + c_0^{(1)}) \\ \qquad = h_1(x), \end{cases}$$

wenn gesetzt wird:

$$(2\text{a})\quad c_{n-1}^{(1)} = a_{n-1} b_m - a_n b_{m-1} \qquad c_{n-2}^{(1)} = a_{n-2} b_m - a_n b_{m-2}, \quad \text{usf.}^{1)}$$

Die Koeffizienten $c_\nu^{(1)}$ ($\nu = 0, 1, \ldots, (n-1)$) sind also *homogene*[2]) *ganze Funktionen 2ten Grades* von $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m$. Sie können in dem „*allgemeinen Falle*" durchweg als *von Null verschieden* gelten, d. h. solange die a_ν, b_ν ganz *willkürliche* Zahlen vorstellen, zwischen denen nicht von vornherein irgendwelche *speziellen* Beziehungen von der Form $c_\nu^{(1)} = 0$ bestehen Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so erleidet das im folgenden beschriebene Verfahren nur diejenigen Abweichungen, die sich durch das Nullsetzen der in Frage kommenden Koeffizienten unmittelbar ergeben. (Vgl. Fußn. 1 der folgenden Seite.)

Die in Gl. (2) mit $h_1(x)$ bezeichnete ganze Funktion ist, falls $c_{n-1}^{(1)} \neq 0$, insbesondere in dem „*allgemeinen*" Falle, genau vom Grade $n-1$ und beginnt mit dem Gliede: $\frac{c_{n-1}^{(1)}}{b_m} \cdot x^{n-1}$. Ist jetzt $m \leqq n-1$, so kann man auf das Funktionenpaar $h_1(x)$, $f(x)$ dieselbe Operation anwenden, wie zuvor auf $g(x)$, $f(x)$ und erhält auf diese Weise eine Beziehung von der Form:

$$(3)\quad \begin{cases} h_1(x) - \frac{c_{n-1}^{(1)}}{b_m^2} \cdot x^{n-m-1} \cdot f(x) = \frac{1}{b_m^2}(c_{n-2}^{(2)} x^{n-2} + c_{n-3}^{(2)} x^{n-3} + \cdots + c_1^{(2)} x + c_0^{(2)}) \\ \qquad = h_2(x), \end{cases}$$

wenn gesetzt wird:

$$(3\text{a})\quad c_{n-2}^{(2)} = c_{n-2}^{(1)} b_m - c_{n-1}^{(1)} b_{m-1}, \quad c_{n-3}^{(2)} = c_{n-3}^{(1)} b_m - c_{n-1}^{(1)} b_{m-2}, \ldots \text{usf.},$$

so daß also die $c_\nu^{(2)}$ *homogene ganze Funktionen 2ten Grades* der $c_\nu^{(1)}$ und b_ν, somit schließlich solche *3ten Grades* der a_ν, b_ν sind. Analog findet man, falls $m \leqq n-2$:

$$(4)\quad \begin{cases} h_2(x) - \frac{c_{n-2}^{(2)}}{b_m^3} \cdot x^{n-m-2} \cdot f(x) = \frac{1}{b_m^3}(c_{n-3}^{(3)} x^{n-3} + c_{n-4}^{(3)} x^{n-4} + \cdots + c_1^{(3)} x + c_0^{(3)}) \\ \qquad = h_3(x), \end{cases}$$

und in dieser Weise weiter fortschließend, allgemein:

$$(5)\quad \begin{cases} h_{n-m}(x) - \frac{c_m^{(n-m)}}{b_m^{n-m+1}} \cdot x^0 \cdot f(x) = \frac{1}{b_m^{n-1+m}}(c_{m-1}^{(n-m+1)} x^{m-1} + \cdots + c_1^{(n-m+1)} x + c_0^{(n-m+1)}) \\ \qquad = h_{n-m+1}(x), \end{cases}$$

1) Dieses Bildungsgesetz erstreckt sich bis $c_0^{(1)} = a_0 b_m - a_n b_0$, wenn $m = n$ ist. Ist dagegen $m < n$, etwa: $m = n-1$, so reduziert sich $c_0^{(1)}$ auf $a_0 b_m$. Im Falle: $m = n-2$ wird außerdem auch: $c_1^{(1)} = a_1 b_m$, usf.

2) S. Fußn. 1), S. 206

wo die $c_\nu^{(n-m+1)}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, (m-1))$ *homogene ganze Funktionen* $(n-m+2)^{\text{ten}}$ *Grades* der a_ν, b_ν sind. Durch Addition der Gleichungen (2), (3), (4), ..., (5) und Weglassung der beiden Seiten gemeinsamen Summanden $h_1(x)$, $h_2(x)$, ..., $h_{n-m}(x)$ ergibt sich also:

$$(6)\quad g(x) - \left(\frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} + \frac{c_{n-1}^{(1)}}{b_m^2} \cdot x^{n-m-1} + \frac{c_{n-2}^{(2)}}{b_m^3} \cdot x^{n-m-2} + \cdots + \frac{c_m^{(n-m)}}{b_m^{n-m+1}}\right) \cdot f(x) = h_{n-m+1}(x),$$

anders geschrieben:

$$(7)\qquad g(x) = f(x) \cdot q(x) + r(x),$$

wo:

$$(7\text{a})\quad \begin{cases} q(x) = \dfrac{1}{b_m^{n-m+1}} \cdot (a_n b_m^{n-m} x^{n-m} + c_{n-1}^{(1)} b_m^{n-m-1} x^{n-m-1} \\ \qquad\qquad + c_{n-2}^{(2)} b_m^{n-m-2} x^{n-m-2} + \cdots + c_m^{(n-m)}) \\ r(x) = h_{n-m+1}(x) = \dfrac{1}{b_m^{n-m+1}} \cdot (c_{m-1}^{(n-m+1)} x^{m-1} + c_{m-2}^{(n-m+1)} x^{m-2} + \\ \qquad\qquad + \cdots + c_0^{(n-m+1)}) \end{cases}$$

und die $c_\mu^{(\lambda)}$ *homogene ganze Funktionen* $(\lambda+1)^{\text{ten}}$ *Grades* $(\lambda = 1, 2, \ldots, (n-m))$ der a_ν, b_ν sind. Das vorstehende Ergebnis kann zunächst folgendermaßen ausgesprochen werden:

> *Den beiden ganzen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ von den Graden m und n, wo $m \leqq n$, läßt sich eine ganze Funktion $q(x)$ vom Grade $n-m$ und eine andere $r(x)$ höchstens*[1]) *vom Grade $m-1$ zuordnen, derart, daß für jedes x die Gl. (7) besteht.*

2. Diese Aussage läßt sich noch durch den Nachweis vervollständigen, daß stets nur *ein* solches Funktionenpaar $q(x)$, $r(x)$ vorhanden ist, sofern man nur $r(x)$ der Bedingung unterwirft, höchstens vom Grade $m-1$ zu sein.

Angenommen, es bestände neben der Gl. (7) noch die folgende:

$$g(x) = f(x) \cdot q_1(x) + r_1(x) \quad (\text{wo } r_1(x) \text{ von einem Grade } \leqq m-1),$$

so würde folgen (für jedes x):

$$r_1(x) - r(x) = f(x) \cdot (q(x) - q_1(x)),$$

eine Gleichung, die nur möglich ist, wenn beide Seiten *identisch Null* sind. Denn andernfalls müßte $r_1(x) - r(x)$, d. h. eine ganze Funktion von einem Grade $\leqq m-1$, den Teiler m^{ten} Grades $f(x)$, also mindestens m Wurzeln haben. Man findet also zunächst:

$$r_1(x) \equiv r(x)$$

und, da $f(x)$ nicht identisch verschwindet, auch:

$$q_1(x) \equiv q(x).$$

---

1) d. h. der Grad von $r(x)$ kann (geradeso wie derjenige der mit $h_1(x)$, ..., $h_{n-m}(x)$ bezeichneten Polynome) sich eventuell erniedrigen, wenn zwischen den a_ν, b_ν spezielle Beziehungen bestehen.

Es gibt also in der Tat nur eine einzige Darstellung von $g(x)$ nach Art der in Gl. (7) gegebenen.

Das in der vorigen Nummer eingeschlagene Verfahren zur Bestimmung der beiden Funktionen $q(x)$ und $r(x)$ wird als *(„algebraische") Division* von $g(x)$ *(„Dividendus")* durch $f(x)$ *(„Divisor")* bezeichnet, wie durch die folgende Schreibweise:

$$(8) \qquad \frac{g(x)}{f(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{f(x)}$$

noch deutlicher zum Ausdruck gebracht wird. Dabei heißt $q(x)$ (*stets* vom Grade $n - m$) der *(„unvollständige") Quotient*, $r(x)$ (im *allgemeinen* Falle stets vom Grade $m - 1$, bei *Spezialisierung* der a_ν, b_ν eventuell von niedrigerem Grade) der *Rest* der Division.

3. Sind insbesondere die a_ν, b_ν so beschaffen, daß:

$$(9) \qquad c_{m-1}^{(n-m+1)} = 0,\ c_{m-2}^{(n-m+1)} = 0,\ \ldots,\ c_0^{(n-m+1)} = 0,$$

so wird nach der zweiten Gl (7a) $r(x) = 0$ für jedes x und daher:

$$(10) \qquad g(x) = f(x) \cdot q(x),$$

d h. in diesem Falle ist $f(x)$ ein *Teiler* von $g(x)$ (somit $q(x)$ („vollständiger") *Quotient*). *Umgekehrt:* Soll $f(x)$ ein Teiler von $g(x)$ sein, so muß auch die *rechte* Seite von Gl (7) den Teiler $f(x)$ haben, also muß $r(x)$, als von niedrigerem Grade, als $f(x)$, *identisch verschwinden*, es müssen also schließlich die Gleichungen (9) bestehen Hiernach ergibt sich:

> *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Teilbarkeit von $g(x)$ (vom Grade $n \geqq m$) durch die ganze Funktion m^{ten} Grades $f(x)$ besteht in den Gleichungen (9), d h. in dem Verschwinden von m in bestimmter Weise aus den a_ν, b_ν zusammengesetzten homogenen ganzen Funktionen $(n - m + 2)^{ten}$ Grades.*

Sind dagegen die a_ν, b_ν so beschaffen, daß $r(x)$ sich auf eine *von Null verschiedene Konstante* r reduziert, d. h. bestehen die Bedingungsgleichungen (9) *mit alleiniger Ausnahme der letzten* (so daß also: $c_0^{(n-m+1)} = r \neq 0$), so wird:

$$(11) \qquad g(x) = f(x) \cdot q(x) + r$$

und, da hiernach $g(x)$ und $f(x)$ für *kein einziges* x *gleichzeitig zu Null* werden können, so haben in diesem (aber nicht etwa *nur* in diesem) Falle $g(x)$ und $f(x)$ keine einzige Wurzel, also auch *keinen Teiler* gemein und werden, analog wie bei der entsprechenden Beziehung zwischen ganzen Zahlen, als *relativ prim* (teilerfremd) bezeichnet.

4. Schließt man die beiden soeben besprochenen, auf die Beschaffenheit von $r(x)$ sich beziehenden Spezialfälle für die weitere Betrachtung aus, wird jetzt also angenommen, daß $r(x)$ weder Null, noch eine von Null verschiedene Konstante ist, so ist also $r(x)$ eine ganze Funktion von x,

höchstens vom Grade $m-1$, und zwar *genau* von diesem Grade, wenn $c_{m-1}^{(n-m+1)} \neq 0$, sonst von *niedrigerem* Grade. Alsdann wollen wir, da es sich im folgenden um eine *Fortsetzung* des bisherigen Divisionsverfahrens nach dem Schema des *Euklidischen Algorithmus* handelt an Stelle von $q(x)$, $r(x)$ die Bezeichnungen $q_0(x)$, $r_1(x)$ einführen, so daß also Gl. (7) die Form annimmt:

$$g(x) = f(x) \cdot q_0(x) + r_1(x).$$

Diese Gleichung zeigt zunächst, daß jeder gemeinsame Teiler von $f(x)$ und $r_1(x)$ auch ein Teiler von $g(x)$ ist und, wenn man sie auf die Form bringt:

$$r_1(x) = g(x) - f(x) \cdot q_0(x),$$

daß auch umgekehrt jeder gemeinsame Teiler von $f(x)$ und $g(x)$ ein Teiler von $r_1(x)$, somit ein Gemeinteiler von $f(x)$ und $r_1(x)$ sein muß. Man wird also durch Anwendung des oben angegebenen Divisionsverfahrens nunmehr eine Beziehung von der Form herstellen:

$$f(x) = r_1(x) \cdot q_1(x) + r_2(x),$$

welche wiederum zeigt, daß im Falle $r_2(x) \neq 0$ jeder Gemeinteiler von $f(x)$ und $r_1(x)$ auch ein solcher von $r_1(x)$ und $r_2(x)$ sein muß. Dabei ist $r_2(x)$ von niedrigerem Grade als (der diesmalige Divisor) $r_1(x)$, also *höchstens* vom Grade $m-2$ (bzw. *genau* von diesem Grade, falls nicht infolge spezieller Beziehungen zwischen den a_ν, b_ν eine Erniedrigung des Grades eintritt). Man findet, falls $r_2(x) \neq 0$, sodann weiter:

$$r_1(x) = r_2(x) \cdot q_2(x) + r_3(x) \quad \text{usf.}$$

Da der Grad der Reste $r_1(x)$, $r_2(x)$, $r_3(x)$, .. mit $\leqq m-1$ beginnend bei jedem Schritt um mindestens eine *Einheit* sich erniedrigt, so muß schließlich einmal als Rest eine ganze Funktion *nullten* Grades, also eine *Konstante* auftreten, und da diese letztere, falls sie *von Null verschieden* sein sollte, wiederum noch als Divisor dienen kann, in jedem Falle schließlich der Rest *Null* erscheinen. Man erhält also zusammenfassend ein Gleichungssystem von folgender Form:

$$(12) \quad \begin{cases} g(x) = f(x) \cdot q_0(x) + r_1(x) \\ f(x) = r_1(x) \cdot q_1(x) + r_2(x) \\ r_1(x) = r_2(x) \cdot q_2(x) + r_3(x) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x) \cdot q_{k-1}(x) + r_k(x) \\ r_{k-1}(x) = r_k(x) \cdot q_k(x). \end{cases}$$

Dabei ist im „*allgemeinen*“ Falle (genauer gesagt, wenn zwischen den a_ν, b_ν überhaupt keine Beziehungen bestehen oder doch zum mindesten keine solche, welche eine Graderniedrigung irgendeines $r_\nu(x)$ zur Folge hätte)

$r_\nu(x)$ *vom Grade* $m-\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ und daher $k = m$, $r_k(x) \equiv r_m(x)$ eine ***von Null verschiedene Konstante***, folglich, wie die vorletzte Gleichung zeigt, $r_{k-2}(x)$ und $r_{k-1}(x)$ ***relativ prim*** — schließlich also auch $f(x)$ und $g(x)$ ***relativ prim***. Das analoge findet offenbar auch im Falle $k < m$ statt, wenn als $r_k(x)$ eine *von Null verschiedene Konstante* erscheint.

Ist dagegen $r_k(x)$ *nicht* konstant (was nach dem eben Gesagten nur im Falle $k < m$ eintreten kann), so geht aus der vorletzten der Gleichungen (12) hervor, daß $r_{k-1}(x)$ und $r_{k-2}(x)$ den *Gemeinteiler* $r_k(x)$ haben, und zwar, wie unmittelbar ersichtlich, als *„größten" Gemeinteiler* (d. h. als solchen *vom höchstmöglichen Grade*). Das gleiche gilt dann für r_{k-2} und r_{k-3} usf., schließlich für $f(x)$ und $g(x)$.

Hiernach läßt sich der *größte Gemeinteiler* zweier ganzer Funktionen ohne Kenntnis der gemeinsamen Wurzeln durch ein dem *Euklidischen Algorithmus* für ganze Zahlen nachgebildetes Divisionsverfahren berechnen bzw. auf gleichem Wege das Nichtvorhandensein eines (nicht konstanten) Gemeinteilers feststellen.

5. Die Gleichungen (12) lassen sich, wenn man statt $g(x)$, $f(x)$, $q_\nu(x)$, $r_\nu(x)$ zur Abkürzung g, f, q_ν, r_ν schreibt, in die Form setzen:

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{g}{f} = q_0 + \dfrac{r_1}{f} = q_0 + \dfrac{1}{\left(\dfrac{f}{r_1}\right)} \\[2ex] \dfrac{f}{r_1} = q_1 + \dfrac{r_2}{r_1} = q_1 + \dfrac{1}{\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)} \\[2ex] \dfrac{r_1}{r_2} = q_2 + \dfrac{r_3}{r_2} = q_2 + \dfrac{1}{\left(\dfrac{r_2}{r_3}\right)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{r_{k-2}}{r_{k-1}} = q_{k-1} + \dfrac{r_k}{r_{k-1}} = q_{k-1} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{r_{k-1}}{r_k}\right)} \\[2ex] \dfrac{r_{k-1}}{r_k} = q_k. \end{cases}$$

Durch sukzessives Einsetzen der zweiten bis letzten dieser Gleichungen in die erste gewinnt man für den (vollständigen) Quotienten der beiden ganzen Funktionen $g(x)$ und $f(x)$ die folgende *Kettenbruch*darstellung[1]):

$$(14)\quad \frac{g}{f} = q_0 + \frac{1|}{|q_1} + \frac{1|}{|q_2} + \cdots + \frac{1|}{|q_{k-1}} + \frac{1|}{|q_k}.$$

Dabei ist q_0 allemal vom Grade $n-m$, ferner im „allgemeinen" Falle $k = m$ jede der ganzen Funktionen $q_1, q_2, \ldots, q_k$ *linear*, während im

1) Bezüglich der Schreibweise vgl I_3, § 88, S. 673, Formel (9) Der Kettenbruch gehört der sog. ersten Hauptform an: s. a. a. O § 94, S. 710.

Falle besonderer Beziehungen zwischen den a_ν, b_ν die *Anzahl* k der q_ν ($\nu \geqq 1$) sich *vermindern*, der *Grad* sich entsprechend erhöhen kann (wobei die *Summe* der Grade von $q_1, q_2, \ldots, q_k$ stets $= m$ bleiben muß)

Bezeichnet man den ν^{ten} *Näherungsbruch*[1] des obigen Kettenbruches mit $\frac{P_\nu}{Q_\nu}$, so daß also $\frac{P_0}{Q_0} = q_0$ und für $\nu \geqq 1$:

$$\frac{P_\nu}{Q_\nu} = q_0 + \frac{1}{|q_1} + \frac{1|}{|q_2} + \cdots + \frac{1}{|q_\nu}, \tag{15}$$

so gelten bekanntlich für $\nu \geqq 2$ die Rekursionsformeln[2]):

$$P_\nu = q_\nu P_{\nu-1} + P_{\nu-2} \qquad Q_\nu = q_\nu Q_{\nu-1} + Q_{\nu-2} \tag{16}$$

mit den Anfangsgleichungen:

$$\begin{cases} P_0 = q_0 & Q_0 = 1 \\ P_1 = q_1 q_0 + 1 & Q_1 = q_1, \end{cases} \tag{16a}$$

woraus hervorgeht, daß die P_ν, Q_ν ganze rationale Funktionen sind, deren Grad gleichzeitig mit ν beständig zunimmt. Ferner gilt für $\nu \geqq 1$ die Beziehung[3]):

$$P_\nu Q_{\nu-1} - P_{\nu-1} Q_\nu = (-1)^{\nu-1}, \tag{17}$$

welche zeigt, daß P_ν, Q_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, k$) stets *relativ prim* sind Nun ist insbesondere:

$$\frac{g}{f} = \frac{P_k}{Q_k}. \tag{18}$$

Besitzen also g und f einen *gemeinsamen Teiler*, so stellt also $\frac{P_k}{Q_k}$ *die von diesem gemeinsamen Teiler befreite Form* (den „reduzierten Wert“) des Bruches $\frac{g}{f}$ vor.

Sind dagegen g und f *relativ prim* und bringt man Gl. (18) auf die Form:

$$\frac{g}{P_k} = \frac{f}{Q_k} = X,$$

so folgt zunächst:

$$g = X \cdot P_k \qquad f = X \cdot Q_k.$$

Da aber g und f ganze Funktionen ohne gemeinsamen Teiler sind, so muß X eine *Konstante* sein Bezeichnet man diese mit $\frac{1}{c}$, so wird:

$$P_k = c \cdot g \qquad Q_k = c \cdot f \tag{19}$$

und es geht daher die Gl. (17) für $\nu = k$ nach Multiplikation mit $(-1)^{k-1}$

---

1) A. a. O. § 89, S. 681, letzter Absatz

2) A. a. O. § 90, Nr. 3, S. 689, Formel (I) und letzter Absatz

3) A. a. O. § 92, S. 696, Gl. (VI).

in die folgende über:

$$(20)\qquad (-1)^{k-1}c\,Q_{k-1}\cdot g + (-1)^k c P_{k-1} f = 1,$$

deren Inhalt folgendermaßen ausgesprochen werden kann:

Sind $g(x)$, $f(x)$ relativ prim, so besteht für jedes x die Beziehung:

$$(21)\qquad \varphi(x)\cdot g(x) + \gamma(x)\cdot f(x) = 1,$$

wenn die beiden ganzen Funktionen $\varphi(x)$, $\gamma(x)$ definiert werden durch die Gleichungen:

$$(22)\quad \varphi(x) = (-1)^{k-1}c\cdot Q_{k-1}(x) \quad \gamma(x) = (-1)^k c\cdot P_{k-1}(x),$$

(wo die Konstante c aus einer der Gleichungen (19) *durch Vergleichung der Anfangsglieder zu bestimmen ist).*

Da Q_{k-1} bzw. P_{k-1} von *niedrigerem* Grade, als Q_k bzw. P_k, so folgt aus den Gleichungen (22) und (19), daß der Grad von $\varphi(x)$ *niedriger*, als der von $f(x)$ (also $\leqq m-1$), derjenige von $\gamma(x)$ *niedriger* als der von $g(x)$ (also $\leqq n-1$). Da andererseits Gl. (21) zeigt, daß die Produkte $\varphi(x)\cdot g(x)$ und $\gamma(x)\cdot f(x)$ den *gleichen* Grad besitzen müssen, so folgt, daß der *Grad* von $\varphi(x)$ die Form $m-\lambda$, derjenige von $\gamma(x)$ die Form $n-\lambda$ haben muß (wegen $(m-\lambda)+n = (n-\lambda)+m$), wo $\lambda \geqq 1$.

Im übrigen läßt sich zeigen, daß es nur *ein* Funktionenpaar $\varphi(x)$, $\gamma(x)$ (nämlich das durch die Gleichungen (22) definierte) *vom Grade* $\leqq m-1$ bzw. $\leqq n-1$ gibt, welches die Beziehung (21) befriedigt. Denn, wäre auch noch:

$$(23)\qquad \varphi_1(x)\cdot g(x) + \gamma_1(x)\cdot f(x) = 1$$

(wo $\varphi_1(x)$, $\gamma_1(x)$ den genannten Gradbeschränkungen unterliegen sollen), so hätte man:

$$(24)\qquad (\varphi_1(x) - \varphi(x))\cdot g(x) = (\gamma(x) - \gamma_1(x))\cdot f(x),$$

eine Gleichung, die unter der über $\varphi_1(x)$, $\gamma_1(x)$ gemachten Voraussetzung nur möglich ist, wenn beide Seiten *identisch Null* sind, wenn also:

$$\varphi_1(x) \equiv \varphi(x) \qquad \gamma_1(x) \equiv \gamma(x).$$

Denn andernfalls müßte die linke Seite von Gl. (24) den Teiler $f(x)$ haben[1]), was unmöglich ist, da $f(x)$ *relativ prim* zu $g(x)$ und $\varphi_1(x) - \varphi(x)$ höchstens vom Grade $m-1$.

(Dagegen gibt es unendlich viele der Beziehung (23) genügende

---

1) Dieser Schluß beruht auf dem folgenden mit Hilfe des *Euklidischen Algorithmus* (12) leicht zu beweisenden Hilfssatze:

Sind $f(x)$, $g(x)$ relativ prim und ist $\psi(x)$ eine beliebige ganze Funktion, so muß jeder Gemeinteiler von $g(x)$, $\psi(x)$ und $f(x)$, ein Teiler von $\psi(x)$ sein (Beweis genau, wie der entsprechende für ganze *Zahlen* statt ganzen *Funktionen*: vgl. I_1, § 6, Nr. 3, S. 36).

$\varphi_1(x)$, $\gamma_1(x)$ von *höherem* Grade. Soll nämlich Gl. (23), also auch Gl. (24) möglich sein, so muß $f(x)$ ein Teiler von $\varphi_1(x) - \varphi(x)$ und ebenso $g(x)$ ein Teiler von $\gamma_1(x) - \gamma(x)$ sein, also:

$$\varphi_1(x) - \varphi(x) = h(x) \cdot f(x) \qquad \gamma_1(x) - \gamma(x) = k(x) \cdot g(x),$$

wo $h(x)$, $k(x)$ irgendwelche *ganze Funktionen* (eventuell auch *nullten* Grades, also *Konstanten*) bedeuten. Da durch Einsetzen dieser Ausdrücke in Gl. (24) sich ergibt:

$$h(x) \cdot f(x) \cdot g(x) = -k(x) \cdot g(x) \cdot f(x) \quad \text{d. h.} \quad k(x) = -h(x),$$

so folgt zunächst: *Alle* $\varphi_1(x)$, $\gamma_1(x)$, welche der Gl. (24) genügen, sind in der Form enthalten:

$$(25) \qquad \varphi_1(x) = \varphi(x) + h(x) \cdot f(x) \qquad \gamma_1(x) = \gamma(x) - h(x) \cdot g(x).$$

Man überzeugt sich sodann durch Einsetzen in Gl. (23), daß alle diese Ausdrücke auch der letzteren Gleichung genügen.)

§ 27. Gebrochene rationale Funktionen. — Partialbrüche.

1. Als *gebrochene rationale Funktion* bezeichnen wir einen Bruch, dessen Zähler und Nenner *ganze* rationale Funktionen sind, mit Einschluß des Falles, daß der *Zähler* sich auf eine *Konstante* reduziert.[1]) Aus dieser Definition und den Regeln für das Rechnen mit Brüchen folgt ohne weiteres, daß Summen und Produkte beliebig vieler gebrochener rationaler Funktionen wieder derartige Funktionen darstellen (die sich unter Umständen auf eine *ganze* rationale reduzieren kann).

Ist der *Grad* des *Zählers niedriger* als der des Nenners, so heißt die Funktion *echt* gebrochen, andernfalls *unecht* gebrochen.

Ist $\frac{G(x)}{g(x)}$ eine *unecht* gebrochene rationale Funktion, also, wenn p den Grad von $G(x)$, n denjenigen von $g(x)$ bezeichnet, $p \geqq n$, so kann man nach Gl. (7) des vorigen Paragraphen setzen:

$$(1) \qquad G(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x),$$

wo $q(x)$ eine ganze Funktion vom Grade $p - n$, $r(x)$ eine solche von einem Grade $m \leqq n - 1$. Daraus folgt, daß:

$$(2) \qquad \frac{G(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)},$$

d. h. eine *unecht* gebrochene rationale Funktion läßt sich (und zwar, wie aus dem Zusammenhange hervorgeht, auf eine einzige Weise) zerlegen

1) Bezeichnet man zur Abkürzung *ganze rationale* Funktionen schlechthin als *ganze* Funktionen, so pflegt man unter *rationalen* Funktionen (ohne Zusatz) schon *gebrochene* rationale Funktionen zu verstehen, während genau genommen dieser Ausdruck *beide* Kategorien umfaßt

in die Summe einer *ganzen* Funktion (die sich im Falle $p = n$ auf eine *Konstante* reduziert) und einer *echt* gebrochenen Funktion. Wir brauchen uns daher im wesentlichen des weiteren nur mit *echt* gebrochenen Funktionen zu beschäftigen.

Jede (echt oder unecht) gebrochene rationale Funktion besitzt an jeder Stelle x, für welche der *Nenner von Null verschieden* ist, nicht nur einen bestimmten endlichen Wert, sondern ist daselbst als Quotient zweier stetiger Funktionen *stetig*.[1]) Dies gilt für eine *echt* gebrochene Funktion auch in bezug auf die Stelle $x = \infty$. Denn hat man:

$$(3)\qquad R(x) \equiv \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}\ (m < n),$$

so folgt:

$$(4)\qquad R\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{b_m y^{n-m} + b_{m-1} y^{n-m+1} + \cdots + b_1 y^{n-1} + b_0 y^n}{a_n + a_{n-1} y + \cdots + a_1 y^{n-1} + a_0 y^n}$$

und daher:

$$(5)\qquad R\left(\frac{1}{y}\right)_{y=0} = 0, \quad \text{also:}^{2)}\ R(\infty) = 0$$

Außerdem auch:

$$(6)\qquad \lim_{x \to \infty} R(x) = \lim_{y \to 0} R\left(\frac{1}{y}\right) = 0,$$

so daß also $R(x)$ für $x \to \infty$ auch *stetig* ist. Letztere Eigenschaft bleibt auch noch für eine *unecht* gebrochene Funktion im Falle $m = n$ erhalten (wenn sich also die in Gl. (1) mit $q(x)$ bezeichnete *ganze* Funktion auf die Konstante $\frac{b_n}{a_n}$ reduziert) mit dem Unterschiede, daß alsdann $R(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} R(x) = \frac{b_n}{a_n}$ wird. Ist dagegen $n > m$, so wird, wie Gl. (2) zeigt, $\lim\limits_{x \to \infty} R(x)$ *unendlich* von der Ordnung $n - m$.

2. Es sei nun x_1 eine *Nullstelle* des *Nenners* der echt gebrochenen Funktion $R(x) \equiv \frac{f(x)}{g(x)}$, also: $g(x_1) = 0$. Dann besteht zunächst auch für den Zähler die Möglichkeit: $f(x_1) = 0$. In diesem Falle würde also die Funktion $R(x_1)$ unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen, wäre also *nicht definiert*. Man könnte ihr dann definitionsweise den Wert $\lim\limits_{x \to x_1} R(x)$ beilegen. Zweckmäßiger erscheint es (was im Effekt für die Wertbestimmung von $R(x_1)$ auf dasselbe hinausläuft), $R(x)$ von vornherein in eine Form zu setzen, die das *gleichzeitige* Nullwerden von $f(x)$ und $g(x)$ ausschließt, d. h. $f(x)$ und $g(x)$ von etwa vorhandenen *gemeinsamen Teilern* zu befreien, was sich ja nach dem im vorigen Paragraphen gelehrten Verfahren (s. insbesondere S. 214 Gl. (18)) stets bewerkstelligen läßt.

---

1) Vgl. § 15, Nr. 5 (S. 145)

2) Vgl. § 15, Gl. (8), S. 143.

Wir können daher, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, von jetzt ab annehmen, daß $f(x)$ und $g(x)$ *relativ prim* sind. Die gebrochene Funktion $\frac{f(x)}{g(x)}$ mag dann als *irreduzibel* bezeichnet werden. Da dann insbesondere: $f(x_1) \neq 0$, so folgt:

$$\frac{1}{R(x_1)} = \frac{g(x_1)}{f(x_1)} = 0 \quad \text{(übrigens auch: } \lim_{x \to x_1} \frac{1}{R(x)} = 0\text{)},$$

und somit:

$$R(x_1) = \infty. \tag{7}$$

Um über die Art des Unendlichwerdens von $R(x)$ für $x \to x_1$ genauere Aussagen zu machen, werde angenommen, daß x_1 eine n_1-fache Nullstelle von $g(x)$, also:

$$g(x) = (x - x_1)^{n_1} \cdot g_1(x), \quad \text{wo: } g_1(x_1) \neq 0. \tag{8}$$

Alsdann ergibt sich:

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x)}{g_1(x)} = \frac{f(x_1)}{g_1(x_1)} = A, \text{ d. h. endlich und von Null verschieden} \tag{9}$$

und daher:

$$\lim_{x \to x_1} R(x) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{1}{(x - x_1)^{n_1}} = A \cdot \lim_{x \to x_1} \frac{1}{(x - x_1)^{n_1}}, \tag{10}$$

d. h. $R(x)$ wird für $x \to x_1$ *so* unendlich, wie $\frac{1}{(x - x_1)^{n_1}}$, anders ausgesprochen *so*, wie y^{n_1} für $y \to \infty$, also nach der früher eingeführten Ausdrucksweise (§ 20, Nr. 3, S. 182) *von der Ordnung* n_1.

Die Beziehung (10) zeigt, daß $R(x)$ in der Nähe der Stelle $x = x_1$ sich „nahezu" so verhält, wie der Bruch $\frac{A}{(x - x_1)^{n_1}}$. Um die Art der Annäherung bzw. die Abweichung von diesem Bruche genauer beurteilen zu können, bilden wir die Differenz:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{(x - x_1)^{n_1}} = \frac{f(x) - A \cdot g_1(x)}{(x - x_1)^{n_1} \cdot g_1(x)}. \tag{11}$$

Da nach Gl (9):

$$f(x_1) - A \cdot g_1(x_1) = 0,$$

also die ganze Funktion: $f(x) - A \cdot g_1(x)$ (die *höchstens* vom Grade $n - 1$) die Wurzel $x = x_1$, mithin den Teiler $x - x_1$ hat, so kann gesetzt werden:

$$\frac{f(x) - A \cdot g_1(x)}{x - x_1} = f_1(x), \tag{12}$$

wo $f_1(x)$ eine *ganze* Funktion *höchstens* vom Grade $n - 2$, und Gl. (11) läßt sich daher in die Form setzen:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{(x - x_1)^{n_1}} + \frac{f_1(x)}{(x - x_1)^{n_1 - 1} \cdot g_1(x)} \quad \left(\text{wo: } A = \frac{f(x_1)}{g_1(x_1)}\right). \tag{13}$$

Da der Grad des Nenners $(x - x_1)^{n_1-1} \cdot g_1(x)$ den Wert $n - 1$ hat, so ist die damit behaftete rationale Funktion wieder eine *echt* gebrochene Zugleich läßt sich zeigen, daß eine Zerlegung von $\frac{f(x)}{g(x)}$ in zwei Summanden nach Art der rechten Seite von Gl. (13) nur auf diese einzige Weise möglich ist. Bezeichnet man nämlich mit A' eine vorläufig ganz beliebig zu denkende Zahl, so besteht die Identität;

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A'}{(x-x_1)^{n_1}} + \left(\frac{f(x)}{(x-x_1)^{n_1}\, g_1(x)} - \frac{A'}{(x-x_1)^{n_1}}\right)$$
$$= \frac{A'}{(x-x_1)^{n_1}} + \frac{f(x) - A' \cdot g_1(x)}{(x-x_1)^{n_1}\, g_1(x)}$$

Soll nun das zweite Glied der rechten Seite die Form des entsprechenden Gliedes von Gl. (13) annehmen, so *muß* $f(x) - A' \cdot g_1(x)$ durch $x - x_1$ *teilbar* sein, also die Wurzel $x = x_1$ besitzen, so daß also:

$$f(x_1) - A' \cdot g_1(x) = 0, \text{ d. h. } A' = \frac{f(x_1)}{g_1(x_1)} = A$$

und daher auch:

$$\frac{f(x) - A' \cdot g_1(x)}{x - x_1} = f_1(x),$$

wo $f_1(x)$ dieselbe Bedeutung besitzt, wie in Gl. (12) und (13)

Hiernach ergibt sich, wenn wir noch mit Rücksicht auf das folgende $A_1^{(n_1)}$ an Stelle von A schreiben:

Ist $x = x_1$ eine n_1-fache Wurzel von $g(x)$ und $g(x) = (x - x_1)^{n_1} \cdot g_1(x)$, so läßt sich die irreduzible echt gebrochene Funktion $\frac{f(x)}{g(x)}$ stets und nur auf eine einzige Weise in die Form setzen:

$$\text{(13a)} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1^{(n_1)}}{(x-x_1)^{n_1}} + \frac{f_1(x)}{(x-x_1)^{n_1-1} \cdot g_1(x)}, \quad \text{wo: } A_1^{(n_1)} = \frac{f(x_1)}{g_1(x_1)} \neq 0$$

und das zweite Glied der rechten Seite wieder eine echt gebrochene Funktion ist.

Durch Anwendung desselben Verfahrens auf das letzte Glied von Gl. (13a) würde sich analog eine Beziehung von der Form ergeben:

$$\text{(13b)} \quad \frac{f_1(x)}{(x-x_1)^{n_1-1} \cdot g_1(x)} = \frac{A_1^{(n_1-1)}}{(x-x_1)^{n_1-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-x_1)^{n_1-2} \cdot g_1(x)}, \quad \text{wo: } A_1^{(n_1-1)} = \frac{f_1(x_1)}{g_1(x_1)}.$$

Dabei besteht aber die Möglichkeit $A_1^{(n_1-1)} = 0$, wenn nämlich die Gleichung (s. Gl. (12)): $f(x) - A_1^{(n_1)} \cdot g(x) = 0$ die Wurzel x_1 mehrfach besitzt.

Schließt man in dieser Weise weiter fort, so gelangt man durch Einsetzen der Einzelergebnisse von der Form (13b) in Gl. (13a) schließlich einmal zu einer Darstellung von folgender Form:

$$\text{(13c)} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1^{(n_1)}}{(x-x_1)^{n_1}} + \frac{A_1^{(n_1-1)}}{(x-x_1)^{n_1-1}} + \cdots + \frac{A_1^{(1)}}{x-x_1} + \frac{f_{n_1}(x)}{g_1(x)},$$

wo die $A_1^{(\lambda)}(\lambda = 1, 2, \ldots n_1)$ eindeutig bestimmbare Konstanten bedeuten, von denen beliebig viele außer $A_1^{(n_1)}$ auch *Null* sein können, und wo $\frac{f_{n_1}(x)}{g_1(x)}$ wieder eine *echt* gebrochene Funktion, von der sich überdies zeigen läßt, daß sie *irreduzibel* sein muß. Ist nämlich x_2 eine Wurzel von $g_1(x)$, etwa von der Ordnung n_2, so daß also:

$$(14) \qquad g_1(x) = (x - x_2)^{n_2} \cdot g_2(x), \quad \text{wo: } g_2(x_2) \neq 0,$$

so nimmt Gl. (13c) nach Multiplikation mit $(x - x_2)^{n_2}$ die Form an:

$$\frac{f(x)}{(x - x_1)^{n_1} \cdot g_2(x)} = (x - x_2)^{n_2} \left\{ \frac{A_1^{(n_1)}}{(x - x_1)^{n_1}} + \cdots + \frac{A_1^{(1)}}{x - x_1} \right\} + \frac{f_{n_1}(x)}{g_2(x)}$$

und daraus folgt für $x = x_2$:

$$f_{n_1}(x_2) = \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)^{n_1}}, \text{ d. h. } \neq 0,$$

so daß also $f_{n_1}(x)$ keine Wurzel mit $g_1(x)$ gemeinsam hat. Hiernach läßt sich also $\frac{f_{n_1}(x)}{g_1(x)}$ im Anschluß an die Zerlegung (14) ganz in derselben Weise weiter behandeln, wie dies mit $\frac{f(x)}{g(x)}$ geschah. Angenommen nun, es sei[1]):

$$(15) \qquad g(x) = (x - x_1)^{n_1} \cdot (x - x_2)^{n_2} \ldots (x - x_k)^{n_k},$$

so ergibt sich durch Fortsetzung des beschriebenen Verfahrens schließlich:

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1^{(n_1)}}{(x - x_1)^{n_1}} + \frac{A_1^{(n_1 - 1)}}{(x - x_1)^{n_1 - 1}} + \cdots + \frac{A_1^{(1)}}{x - x_1} \\ \quad + \frac{A_2^{(n_2)}}{(x - x_2)^{n_2}} + \frac{A_2^{(n_2 - 1)}}{(x - x_2)^{n_2 - 1}} + \cdots + \frac{A_2^{(1)}}{x - x_2} \\ \quad + \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \quad + \frac{A_k^{(n_k)}}{(x - x_k)^{n_k}} + \frac{A_k^{(n_k - 1)}}{(x - x_k)^{n_k - 1}} + \cdots + \frac{A_k^{(1)}}{x - x_k}, \end{cases}$$

in Worten:

Eine echt gebrochene rationale Funktion läßt sich, wenn die Nullstellen des Nenners (nebst ihrer Ordnungszahl) bekannt sind[2]), in eine Summe von „Partialbrüchen" von der Form (16) zerlegen, deren Zähler $A_\nu^{(\lambda)}(\nu = 1, 2, \ldots, k;\ \lambda = 1, 2, \ldots, n_\nu)$ *ein-*

1) In der Annahme, daß der höchsten Potenz von $g(x)$ der Koeffizient 1 beigelegt wird, liegt keine Beschränkung der Allgemeinheit, da ja:

$$\frac{f(x)}{c \cdot g(x)} = \frac{\frac{1}{c} \cdot f(x)}{g(x)}.$$

2) Andernfalls ergibt sich auf Grund des Fundamentalsatzes der Algebra nur die *Existenz* einer solchen Zerlegung, nicht die Möglichkeit, sie herzustellen.

deutig bestimmbare Konstanten, und zwar $A_1^{(n_1)}$, $A_2^{(n_2)}$, $\ldots$, $A_k^{(n_k)}$ *stets von Null verschieden sind.*[1])

3. Die Partialbruchzerlegung von $\frac{f(x)}{g(x)}$ nimmt eine besonders einfache Form an, wenn $g(x)$ lauter *einfache* Nullstellen besitzt Sei also:

$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n), \tag{17}$$

wo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sämtlich voneinander verschieden, so findet man nach Gl. (16) zunächst:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_\nu}{x - x_\nu} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}. \tag{18}$$

Dabei lassen sich die A_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) am bequemsten in folgender Weise bestimmen. Multipliziert man die vorstehende Gleichung mit $g(x)$, so wird:

$$f(x) = A_1 \frac{g(x)}{x - x_1} + \cdots + A_\nu \frac{g(x)}{x - x_\nu} + \cdots + A_n \frac{g(x)}{x - x_n}$$

und daher für $x = x_\nu$:

$$f(x_\nu) = A_\nu \cdot \left(\frac{g(x)}{x - x_\nu}\right)_{x = x_\nu} = A_\nu \cdot g'(x_\nu) \quad \text{(s § 24 Gl. (4), S 200)}$$

d. h.:

$$A_\nu = \frac{f(x_\nu)}{g'(x_\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

also schließlich:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_1^n{}_\nu \frac{f(x_\nu)}{g'(x_\nu)} \cdot \frac{1}{x - x_\nu} \tag{19}$$

Setzt man $f(x_\nu) = y_\nu$ und multipliziert die Gleichung mit $g(x)$, so wird:

$$f(x) = \sum_1^n{}_\nu \frac{y_\nu}{g'(x_\nu)} \cdot \frac{g(x)}{x - x_\nu}, \tag{20}$$

eine Beziehung, die offenbar mit der früher abgeleiteten *Lagrange*schen Interpolationsformel (§ 24, Gl. (6), S. 200) identisch ist. Man könnte daher auch umgekehrt die Partialbruchzerlegung (19) aus der *Lagrange*schen Interpolationsformel ableiten.

Schreibt man in Gl. (20) wieder $f(x_\nu)$ statt y_ν und denkt sich die rechte Seite nach Potenzen von x geordnet, so erscheint der Ausdruck: $\sum_1^n{}_\nu \frac{f(x_\nu)}{g'(x_\nu)}$ als Koeffizient von x^{n-1}. Es besteht daher die (zuweilen nütz-

1) Eine zweckmäßigere, auf der Lehre von den Potenzreihen beruhende Methode zur Bestimmung der Konstanten $A_\nu^{(\lambda)}$ wird in § 41, Nr 5 mitgeteilt werden. Im übrigen s auch Nr. 4 dieses Paragraphen

liche) Identität:

$$\sum_1^n{}_\nu \frac{f(x_\nu)}{g'(x_\nu)} = 0, \tag{21}$$

wenn $f(x)$ *höchstens vom Grade* $n-2$.

4. Der Satz von Nr. 3 über die Zerlegbarkeit einer echt gebrochenen Funktion in Partialbrüche von der Form (16) kann auch als spezieller Fall eines etwas allgemeineren Satzes gewonnen werden, welcher unmittelbar aus Gl. (21) des vorigen Paragraphen (S. 215) resultiert.

Angenommen, es sei wieder $g(x)$ vom Grade n und:

$$g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x), \tag{22}$$

wo $g_1(x)$ vom Grade n_1, $g_2(x)$ vom Grade n_2 (also: $n_1 + n_2 = n$), ferner $g_1(x)$ und $g_2(x)$ *relativ prim*.

Alsdann lassen sich auf Grund der angeführten Gl. (21) von § 26 stets, und zwar auf eine einzige Weise zwei ganze Funktionen $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$ von den Graden $n_1 - \lambda$, $n_2 - \lambda$ (wo: $\lambda \geqq 1$) so bestimmen, daß für jedes x:

$$\gamma_1(x) \cdot g_2(x) + \gamma_2(x) \cdot g_1(x) = 1 \tag{23}$$

und daher:

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{\gamma_1(x)}{g_1(x)} + \frac{\gamma_2(x)}{g_2(x)}. \tag{24}$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit $f(x)$ (wo wiederum $f(x)$ *relativ prim* zu $g(x)$ und *höchstens* vom Grade $n-1$):

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) \cdot \gamma_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f(x) \cdot \gamma_2(x)}{g_2(x)}. \tag{25}$$

Sind die beiden rechts auftretenden (sicher *irreduziblen*) Funktionen keine echt gebrochenen, so kann man sie auf Grund von Gl. (2) in je eine ganze und eine echt gebrochene (irreduzible) Funktion zerlegen, so daß also:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q_1(x) + q_2(x) + \frac{\varphi_1(x)}{g_1(x)} + \frac{\varphi_2(x)}{g_2(x)}. \tag{26}$$

Hieraus würde aber mit Benützung von Gl. (6) für $x \to \infty$ folgen:

$$0 = \lim_{x \to \infty} (q_1(x) + q_2(x)),$$

woraus hervorgeht, daß für jedes x:

$$q_1(x) + q_2(x) \equiv 0.$$

Die Gleichung (26) geht daher in die folgende über:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{g_1(x)} + \frac{\varphi_2(x)}{g_2(x)}, \tag{27}$$

und man gewinnt somit den Satz:

Die irreduzible echt gebrochene Funktion $\frac{f(x)}{g(x)}$ *läßt sich, wenn* $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$ *und* $g_1(x), g_2(x)$ *relativ prim sind, als Summe zweier gleichfalls irreduziblen und echt gebrochenen Funktionen von der Form* (27) *darstellen.*

Auch diese Zerlegung ist wieder nur auf eine einzige Weise möglich. Denn, hätte man neben Gl. (27) die folgende:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\psi_1(x)}{g_1(x)} + \frac{\psi_2(x)}{g_2(x)}$$

(wo der Grad von $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ den gleichen Beschränkungen unterliegt, wie derjenige von $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$), so würde durch Subtraktion und Multiplikation mit $g(x)$ folgen:

$$0 = (\psi_1(x) - \varphi_1(x)) \cdot g_2(x) + (\psi_2(x) - \varphi_2(x)) \cdot g_1(x),$$

eine Gleichung, die nur bestehen kann, wenn:

$$\psi_1(x) - \varphi_1(x) \equiv 0 \qquad \psi_2(x) - \varphi_2(x) \equiv 0,$$

da andernfalls $\psi_1(x) - \varphi_1(x)$ den Teiler $g_1(x)$, ebenso $\psi_2(x) - \varphi_2(x)$ den Teiler $g_2(x)$ haben müßte, was mit Rücksicht auf den Grad dieser Funktionen unmöglich ist

Durch wiederholte Anwendung des obigen Satzes ergibt sich, wenn wieder:

$$g(x) = (x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \cdots (x - x_k)^{n_k},$$

zunächst eine Beziehung von der Form:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{(x - x_1)^{n_1}} + \frac{\varphi_2(x)}{(x - x_2)^{n_2}} + \cdots + \frac{\varphi_k(x)}{(x - x_k)^{n_k}}, \tag{28}$$

wo $\varphi_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ höchstens vom Grade $n_\nu - 1$ und *relativ prim* zu $x - x_\nu$, also $\varphi_\nu(x_\nu) \neq 0$. Infolgedessen hat man:

$$\varphi_\nu(x) = \varphi_\nu(x_\nu) + \frac{\varphi_\nu'(x_\nu)}{1} \cdot (x - x_\nu) + \cdots + \frac{\varphi_\nu^{(n_\nu - 1)}(x_\nu)}{(n_\nu - 1)!}(x - x_\nu)^{n_\nu - 1}$$

und:

$$\frac{\varphi_\nu(x)}{(x - x_\nu)^{n_\nu}} = \frac{\varphi_\nu(x_\nu)}{(x - x_\nu)^{n_\nu}} + \frac{1}{1!} \cdot \frac{\varphi_\nu'(x_\nu)}{(x - x_\nu)^{n_\nu - 1}} + \cdots + \frac{1}{(n_\nu - 1)!} \cdot \frac{\varphi_\nu^{(n_\nu - 1)}(x_\nu)}{x - x_\nu}. \tag{29}$$

Durch Einsetzen in Gl. (28) ergibt sich also wieder die Partialbruchdarstellung von der Form (16) mit der Koeffizientenbestimmung:

$$A_\nu^{(n_\nu)} = \varphi_\nu(x_\nu),\ A_\nu^{(n_\nu - 1)} = \frac{1}{1!} \cdot \varphi_\nu'(x_\nu), \ldots, A_\nu^{(1)} = \frac{1}{(n_\nu - 1)!} \cdot \varphi_\nu^{(n_\nu - 1)}(x_\nu), \tag{30}$$

wo $A_\nu^{(n_\nu)} \neq 0$, während von den übrigen Koeffizienten beliebig viele den Wert *Null* haben können.

Kapitel IV.

Potenzreihen.

§ 28. Funktionenfolgen: Konvergenzbereich und Grenzfunktion. — Gleichmäßige und ungleichmäßige Konvergenz. — Punktweise gleichmäßige Konvergenz. — Stetigkeit der Grenzfunktion.

1. Wir wollen jetzt zur Ausführung des bereits in § 13, Nr. 1, (S. 121) in Erwägung gezogenen Schrittes übergehen, zur Erweiterung unseres Funktionenkreises neben den *rationalen* Funktionen auch *Grenzwerte* von unbegrenzten *Folgen rationaler Funktionen* in Betracht zu ziehen. Dabei erweist es sich im Hinblick auf späterhin noch vorzunehmende Verallgemeinerungen als zweckmäßig, gewisse hierzu dienliche Vorbereitungen nicht von vornherein auf rationale oder auch nur auf analytische Funktionen zu beschränken, sondern von ganz beliebigen, für irgend einen in Frage kommenden Bereich eindeutig definierten Funktionen auszugehen.

Es sei also eine *unbegrenzte Folge von Funktionen:*

$$F_0(x),\ F_1(x), \ldots,\ F_\nu(x), \ldots, \quad \text{kürzer geschrieben: } (F_\nu(x))$$

für alle Stellen eines (offenen oder abgeschlossenen) Bereiches[1] $\mathfrak{B}$ der komplexen Veränderlichen x *eindeutig definiert* (z. B. durch irgendeinen von x und ν abhängigen arithmetischen Ausdruck), derart, daß für *jede einzelne* dem Bereiche $\mathfrak{B}$ angehörige Stelle x' und *jeden einzelnen* Wert $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, $F_\nu(x')$ eine bestimmte Zahl vorstellt. Ist sodann für *jedes einzelne* dem Bereiche $\mathfrak{B}$ angehörige x' die *Zahlenfolge* $(F_\nu(x'))$ *konvergent*, so sagt man, die *Funktionenfolge* $(F_\nu(x))$ *konvergiere im Bereiche* $\mathfrak{B}$, bzw. $\mathfrak{B}$ sei ein *Konvergenzbereich* der *Funktionenfolge* $(F_\nu(x))$ Auf Grund dieser Definition ergibt sich (nach I_3, S. 559, § 73, Ungl. (II)) als *notwendig* und *hinreichend* für die *Konvergenz* von $(F_\nu(x))$ im Bereiche $\mathfrak{B}$: Für *jedes einzelne* zu $\mathfrak{B}$ gehörige x' muß sich jedem $\varepsilon > 0$ eine (sc. mit x' und ε im allgemeinen veränderliche) natürliche Zahl[2] n_ε' so zuordnen lassen, daß:

$$\text{(I)} \qquad |F_{n_\varepsilon'+p}(x') - F_{n_\varepsilon'}(x')| < \varepsilon \quad \text{für } p = 1, 2, 3, \cdots,$$

---

1) Die Bezeichnung „Bereich“ ist, soweit nicht das Gegenteil ausdrücklich bemerkt wird, in der allgemeinen Bedeutung der in § 15, Nr. 1 (S 140) gegebenen Definition zu verstehen.

2) Genau genommen müßten wir, um die Abhängigkeit dieser Zahl auch von x' kenntlich zu machen, sie etwa mit $n_{x',\varepsilon}$ bezeichnen. Zur Vermeidung dieser allzu schwerfälligen Bezeichnung schreiben wir statt dessen n_ε' in dem Sinne, daß bei Vertauschung von x' mit einem anderen Werte x'' an die Stelle von n_ε' ein n_ε'' zu treten hätte.

eine Bedingung, die nach Bedarf auch durch die folgende (nur scheinbar anspruchsvollere) ersetzt werden kann[1]) (vgl. a. a. O. Ungl. (III)):

(II) $$|F_{\nu+p}(x') - F_\nu(x')| < \varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq n_\varepsilon', \; p = 1, 2, 3, \cdots.$$

Ist die Bedingung (I) für jedes einzelne x' des Bereiches $\mathfrak{B}$ erfüllt, so besitzt jede der Zahlenfolgen $(F_\nu(x'))$ einen bestimmten endlichen *Grenzwert* (vgl. a. a. O. S 561), welcher mit $F(x')$ bezeichnet werden möge, so daß also:

(1) $$\lim_{\nu \to \infty} F_\nu(x') = F(x'),$$

und es steht alsdann frei, die Bedingung (I) oder (II) durch eine solche von der Form:

(III) $$|F(x') - F_\nu(x')| < \varepsilon \quad (\nu \geqq n_\varepsilon')$$

zu ersetzen.[2])

Wird jetzt die Gesamtheit der einzelnen dem Bereiche $\mathfrak{B}$ angehörigen Stellen x' mit x und dementsprechend die Gesamtheit der allen einzelnen Stellen x' zugeordneten Grenzwerte $F(x')$ mit $F(x)$ bezeichnet, so erscheint $F(x)$ als eine für den Bereich $\mathfrak{B}$ eindeutig definierte Funktion, welche die *Grenzfunktion* der *Funktionenfolge* $(F_\nu(x))$ für den Bereich $\mathfrak{B}$ genannt und im Anschluß an die Beziehung (1) durch die Schreibweise charakterisiert wird:

(2) $$\lim_{\nu \to \infty} F_\nu(x) = F(x) \quad (\text{für alle } x \text{ des Bereiches } \mathfrak{B}).$$

Eine solche Beziehung ist, wie zur Vermeidung jeder Zweideutigkeit ausdrücklich hervorgehoben werden möge, stets so aufzufassen, daß man der *Veränderlichen* x zuerst jedesmal einen beliebigen, aber *festen*, dem Bereiche $\mathfrak{B}$ angehörigen *Zahlenwert* x' beizulegen und sodann den Grenzwert der *Zahlenfolge* $(F_\nu(x'))$ für $\nu \to \infty$ zu bilden, nicht aber umgekehrt die Grenzwertbildung für irgendein „unbestimmtes" x vorzunehmen und erst nachträglich diesem x irgend einen bestimmten Zahlenwert x' beizulegen hat.

---

1) In der Tat ist ja die Bedingung (I) als der Einzelfall $\nu = n_\varepsilon'$ in (II) enthalten Andererseits würde aus (I) nach bekannter Schlußweise zunächst nur folgen:

$$|F_{\nu+p}(x') - F_\nu(x)| < 2\varepsilon \quad \text{für } \nu > n_\varepsilon', \; p = 1, 2, 3, \ldots,$$

was aber wegen der Willkürlichkeit von ε *dem Sinne nach* nicht weniger besagt, als Ungl. (II).

2) Auch hier würde aus (I) auf dem in der vorigen Fußnote eingeschlagenen Wege an Stelle von (III) zunächst nur folgen:

$$|F(x') - F_\nu(x')| \leqq 2\varepsilon \quad (\nu \geqq n_\varepsilon'),$$

und umgekehrt aus (III):

$$|F_{\nu+p}(x') - F_\nu(x')| < 2\varepsilon.$$

Im übrigen gilt aber in bezug auf die schließliche *Äquivalenz* der Bedingung (III) mit (I) oder (II) das am Schlusse der vorigen Fußnote Gesagte

2. Angenommen, der Bereich $\mathfrak{B}$ bestehe lediglich aus einer *abzählbaren* Punktmenge, etwa $x_0, x_1, \ldots, x_\mu, \ldots$, so läßt sich der *gesamte Wertvorrat* der *Funktionenfolge* $F_\nu(x)$ folgendermaßen anordnen:

$$(3)\quad \begin{cases} F_0(x_0), F_1(x_0), F_2(x_0), \ldots, F_\nu(x_0), \ldots \\ F_0(x_1), F_1(x_1), F_2(x_1), \ldots, F_\nu(x_1), \ldots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ F_0(x_\mu), F_1(x_\mu), F_2(x_\mu), \ldots, F_\nu(x_\mu), \ldots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot, \end{cases}$$

also in Form einer *Doppelfolge* mit *konvergenten Zeilen*, und zwar hat man (s Gl (2)):

$$(4)\qquad \lim_{\nu\to\infty} F_\nu(x_\mu) = F(x_\mu) \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots),$$

also mit Benutzung der Bedingungsform (III):

$$(5)\qquad |F(x_\mu) - F_\nu(x_\mu)| < \varepsilon \quad \text{etwa für: } \nu \geqq n_{\mu,\varepsilon}\,[1]),$$

wo $n_{\mu,\varepsilon}$ außer von ε auch von der Wahl der Stelle x_μ, also schließlich von μ abhängt. Nach der in I_1, § 42, Nr. 3 (S. 275) gegebenen Definition[2]) heißen dann die *Zeilen* der obigen Doppelfolge *gleichmäßig* konvergent, wenn *erstens* die $|F(x_\mu)|$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$ *beschränkt* sind und *zweitens* die in (5) mit $n_{\mu,\varepsilon}$ bezeichneten Zahlen für alle möglichen μ ein bestimmtes endliches *Maximum* n_ε besitzen, so daß also die Beziehung (5) die Form annimmt:

$$(6)\qquad |F(x_\mu) - F_\nu(x_\mu)| < \varepsilon \quad \text{für } \begin{cases} \mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu \geqq n_\varepsilon. \end{cases}$$

Besteht hingegen der Bereich $\mathfrak{B}$ aus einer *nicht abzählbaren* Punktmenge (wie das ja bei unseren bisherigen Betrachtungen die Regel gewesen ist und auch weiterhin bleiben wird), so tritt an die Stelle des Schemas (3) gewissermaßen ein solches aus unendlich vielen, unbegrenzt zu verdichtenden *konvergenten Zeilen:*

$$F_0(x), F_1(x), F_2(x), \ldots, F_\nu(x), \ldots,$$

deren *Grenzwerte* durch die Beziehung (2) zusammengefaßt werden. Die in der Lehre von den reellen Doppelfolgen gewonnene Erkenntnis von der prinzipiellen Bedeutung des Begriffes der *gleichmäßigen* Konvergenz legt es nahe, diesen im Anschluß an das Schema (3) bereits in Erinnerung gebrachten Begriff nunmehr auf den vorliegenden Fall zu übertragen. Dabei erweist es sich als zweckmäßig, die Forderung der *Be-*

1) Vgl. Fußnote 2 auf S 224.

2) A. a O. zunächst nur für *reelle* Doppelfolgen. Bezüglich der Übertragbarkeit auf *komplexe* Doppelfolgen vgl. die allgemeine Bemerkung in I_2, § 73, Nr. 5 am Anfang, sowie den Schluß der Nummer (S. 566—68).

schränktheit der Gesamtmenge der „Zeilenlimites“, d. h. der *Grenzfunktion* $F(x)$, fallen zu lassen[1]) (NB. die *Endlichkeit* für jede *einzelne* Stelle von $\mathfrak{B}$ folgt ja aus der Voraussetzung der *Konvergenz*) und im übrigen nach Analogie von Ungl. (6) die folgende *Definition* einzuführen:

Die Funktionenfolge $(F_\nu(x))$ *konvergiert im Bereiche* $\mathfrak{B}$ ***gleichmäßig*** *gegen die (für jede einzelne Stelle* x *von* $\mathfrak{B}$*) endliche Grenzfunktion* $F(x)$, *wenn zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine natürliche Zahl* n_ε *existiert, derart, daß für* ***alle*** x *des Bereiches* $\mathfrak{B}$ *die Beziehung besteht:*

(IIIa) $$|F(x) - F_\nu(x)| < \varepsilon \quad \text{für } \nu \geqq n_\varepsilon .$$

Zugleich steht es auf Grund der in Nr. 1 angestellten Betrachtungen frei, diese definierende Ungleichung nach Analogie von Ungl. (I) und (II) auch durch jede der beiden folgenden zu ersetzen:

(Ia) $$|F_{n_\varepsilon+p}(x) - F_{n_\varepsilon}(x)| < \varepsilon \quad (p = 1, 2, 3, \ldots),$$

bzw.

(IIa) $$|F_{\nu+p}(x) - F_\nu(x)| < \varepsilon \quad (\nu \geqq n_\varepsilon, p = 1, 2, 3, \ldots),$$

welche nicht den *Ausdruck* der Grenzfunktion $F(x)$, vielmehr nur die notwendige und hinreichende Bedingung für deren *Existenz* enthalten und deren Inhalt demgemäß folgendermaßen auszusprechen ist:

Die Funktionenfolge $(F_\nu(x))$ *konvergiert im Bereiche* $\mathfrak{B}$ *gleichmäßig.*

3. Beispiele 1) $F_\nu(x) = x^\nu$. Ist $0 < \varrho < 1$, so hat man $\lim_{\nu\to\infty} x^\nu = 0$ für den abgeschlossenen Bereich $0 \leqq |x| \leqq \varrho$. Setzt man: $\varrho = \frac{1}{1+\delta}$, wo $\delta > 0$, so folgt:

$$\varrho^n < \frac{1}{1 + n\delta}, \quad \text{also} < \varepsilon, \quad \text{wenn } n \geqq \frac{1-\varepsilon}{\delta\varepsilon} = \frac{\varrho(1-\varepsilon)}{\varepsilon(1-\varrho)},$$

und daher um so mehr:

$$|x|^\nu < \varepsilon \quad \text{für} \quad |x| \leqq \varrho \quad \text{und} \quad \nu \geqq n_\varepsilon = \frac{\varrho(1-\varepsilon)}{\varepsilon(1-\varrho)}.$$

Die Funktionenfolge (x^ν) konvergiert also in dem *abgeschlossenen* Bereich $|x| \leqq \varrho$, sofern nur $\varrho < 1$, *gleichmäßig* (gegen die auf die Konstante 0 sich reduzierende Grenzfunktion).

Dagegen wäre es auf Grund unserer Definition unrichtig, zu sagen, daß die Funktionenfolge (x^ν) in dem *offenen* Bereiche $|x| < 1$ *gleich-*

---

1) Die entsprechende Forderung wurde in der Lehre von den *reellen* Doppelfolgen nur eingeführt, um die *gleichmäßige Konvergenz* als besonderen Fall unter den dort als *gleichmäßige Beschränktheit* bezeichneten Begriff zu subsumieren (vgl. I_1, S. 279 letzten Absatz) und auf diese Weise die Gültigkeit gewisser unter der Voraussetzung dieser letzteren Eigenschaft bewiesener Sätze ohne weiteres für den Fall *gleichmäßiger Konvergenz* zu sichern. In dem vorliegenden Zusammenhang fällt dieser Grund weg, und die betreffende Einschränkung erscheint daher überflüssig. Vgl im übrigen das Beispiel 3).

mäßig konvergiere. Nimmt man nämlich eine natürliche Zahl n_1 *noch so groß* an und setzt: $|x| = \frac{n_1}{n_1+1}$, so findet man:

$$|x|^{n_1} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n_1}\right)^{n_1}} > \frac{1}{e} \text{ (s. I}_1\text{, § 33, S. 199, Ungl. (10)).}$$

Der außerordentlich *groß* zu denkende Exponent n_1 genügt also bei weitem noch nicht, um *dieses* $|x|^{n_1}$ unter ein sehr kleines ε herunterzudrücken. Dagegen hat es keine Schwierigkeit, zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ einen Exponenten $n_2 > n_1$ so zu bestimmen, daß $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n_1}\right)^{n_2}} < \varepsilon$ ausfällt (man braucht ja nur bei dem zuvor angegebenen Verfahren $\delta = \frac{1}{n_1}$ zu setzen). Wird dann aber $|x| = \frac{n_2}{n_2+1}$ angenommen, so hat man für *dieses* $|x|$ wiederum, wie oben: $|x|^{n_2} > \frac{1}{e}\cdot$ Diese Schlußweise ließe sich unbegrenzt fortsetzen. Also: *wie groß* man auch n annehmen mag, so lassen sich stets Werte $|x| < 1$ angeben, für welche $|x|^n > \frac{1}{e}$ ausfällt und nur durch weitere Vergrößerung von n unter ein vorgeschriebenes $\varepsilon > 0$ herabgedrückt werden kann. Kein *noch so großes* n reicht also aus, um dieses Resultat für *alle* $|x| < 1$ zu erzielen, so daß die Funktionenfolge (x^ν) in dem (offenen) Bereiche $|x| < 1$ *nicht mehr gleichmäßig* konvergiert.[1]) Vielmehr zeigt sich, daß bei unbegrenzter Annäherung von x an die Peripherie des Einheitskreises eine beständige *Verzögerung* oder *Verschlechterung* der Konvergenz, sogenannte *ungleichmäßige* Konvergenz stattfindet. Nichtsdestoweniger ist der Punkt $x = 1$ noch ein ***Konvergenzpunkt*** der Folge (doch wird hier, abweichend von den Stellen $|x| < 1$, $\lim_{\nu\to\infty} x^\nu = 1$)

2) $F_\nu(x) = \frac{x^\nu}{\nu} + \nu[|x|]$ (wo wieder das Symbol $[|x|]$ die größte in $|x|$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet). Man hat für $|x| \leqq 1$ zunächst: $\left|\frac{x^\nu}{\nu}\right| \leqq \frac{1}{\nu} < \varepsilon$, falls $\nu > \frac{1}{\varepsilon}$, und daher $\lim_{\nu\to\infty}\frac{x^\nu}{\nu} = 0$ *gleichmäßig* für alle x des Bereiches $|x| \leqq 1$. Da ferner $[|x|] = 0$ für $|x| < 1$, so verhält

1) Einzelne Autoren definieren nur für *abgeschlossene* Bereiche die *gleichmäßige* Konvergenz so, wie in Nr. 2 für *beliebige* Bereiche angegeben wurde, und nennen sodann eine Funktionenfolge in einem *offenen* Bereiche *gleichmäßig* konvergent, wenn sie in *jedem abgeschlossenen Teilbereiche gleichmäßig* konvergiert. Bei dieser zwiespältigen, nach meinem Dafürhalten recht unzweckmäßigen Terminologie hätte dann die Funktionenfolge (x^ν) im Bereiche $|x| < 1$ als *gleichmäßig* konvergent zu gelten.

sich $F_\nu(x)$ in dem (offenen) Bereiche $|x| < 1$ genau so, wie $\frac{x^\nu}{\nu}$. Dagegen hat man, wenn $|x| = 1$ gesetzt wird: $F_\nu(x) = \frac{x^\nu}{\nu} + \nu$, also $\lim_{\nu \to \infty} F_\nu(x) = +\infty$. Die Folge $(F_\nu(x))$ *konvergiert* also nur in dem *offenen* Bereiche $|x| < 1$, und zwar daselbst *gleichmäßig* gegen den Grenzwert 0.

3) $F_\nu(x) = \frac{x^\nu}{\nu} + \frac{1}{x + [1 - |x|]}$ (wo also: $[1 - |x|] = 0$ für $0 < |x| \leqq 1$, dagegen: $[1 - |x|] = 1$ für $x = 0$). Da wiederum $\left(\frac{x^\nu}{\nu}\right)$ für $0 \leqq |x| \leqq 1$ *gleichmäßig* gegen 0 konvergiert, so gilt das Gleiche für $(F_\nu(x))$, da ja der zweite Summand von $F_\nu(x)$ gänzlich unabhängig von ν ist. Dabei ergibt sich als *Grenzfunktion*: $\lim_{\nu \to \infty} F_\nu(x) = \frac{1}{x}$ für $0 < |x| \leqq 1$, dagegen $F_\nu(0) = 1$, also auch $\lim_{\nu \to \infty} F_\nu(0) = 1$. Die *Konvergenz* ist somit für $0 \leqq |x| \leqq 1$ eine *gleichmäßige*, die *Grenzfunktion* zwar für jede einzelne Stelle *endlich*, jedoch in der Nähe von $x = 0$ ***nicht beschränkt***.

4) Setzt man:

$$F_\nu(x) = \frac{\nu |x|}{1 + \nu |x|},$$

so findet man:

$$\lim_{\nu \to \infty} F_\nu(x) = 1 \quad \text{für jedes } x \neq 0,$$

dagegen:

$$\lim_{\nu \to \infty} F_\nu(0) = 0.$$

Die Konvergenz ist für $|x| \geqq \delta > 0$ eine *gleichmäßige*, denn man hat für $|x| \geqq \delta$:

$$|F(x) - F_\nu(x)| = \left|1 - \frac{\nu |x|}{1 + \nu |x|}\right| = \frac{1}{1 + \nu |x|} \leqq \frac{1}{1 + \nu\delta}$$

$$< \varepsilon, \quad \text{wenn: } \nu > \frac{1 - \varepsilon}{\delta \varepsilon}.$$

Die letzte Ungleichung zeigt aber, daß bei abnehmendem δ die untere Schranke für ν beständig *vergrößert* werden muß, wenn $|F(x) - F_\nu(x)| < \varepsilon$ für $|x| \geqq \delta$ werden soll.

Nimmt man etwa wiederum wie bei dem Beispiel 1) eine natürliche Zahl n *noch so groß* an und setzt sodann $|x| = \frac{1}{n}$, so wird:

$$\left|F\left(\frac{1}{n}\right) - F_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{2},$$

also noch keineswegs sehr klein. Die Folge $(F_\nu(x))$ konvergiert also in der Nähe der Stelle $x = 0$ *ungleichmäßig*.

5) Setzt man:

$$F_\nu(x) = \frac{x^\nu - 1}{x^\nu + 1},$$

so folgt:

$$\lim_{\nu \to \infty} F_\nu(x) = -1 \quad \text{für } |x| < 1$$
$$\lim_{\nu \to \infty} F_\nu(x) = +1 \quad \text{für } |x| > 1$$
$$\lim_{\nu \to \infty} F_\nu(1) = 0$$

Der Konvergenzbereich setzt sich also zusammen aus den beiden nur durch den gemeinsamen Punkt $x = 1$ verbundenen Stücken $|x| < 1$ und $|x| > 1$.[1]) Wird $\delta > 0$ beliebig *klein* angenommen, so findet *gleichmäßige* Konvergenz statt für $|x| \leqq 1 - \delta$ und $x \geqq 1 + \delta$. Der Bereich *gleichmäßiger* Konvergenz besteht also aus zwei völlig getrennten Stücken. In der Nähe von $x = 1$ ist die Konvergenz eine *ungleichmäßige*, wie man am einfachsten erkennt, wenn man, nach Annahme eines beliebig *großen* $\nu = n$, setzt:

$$x = \left(1 \pm \frac{1}{n}\right)$$

4. Besteht der Konvergenzbereich der Funktionenfolge $(F_\nu(x))$ aus einer endlichen Anzahl von Stücken $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_k$ von der Beschaffenheit, daß die Konvergenz in jedem dieser Stücke eine *gleichmäßige* ist, so gilt das nämliche auch für den aus diesen Stücken zusammengesetzten Bereich $\mathfrak{B}$. Denn, um die Gültigkeit der Beziehung:

$$|F(x) - F_\nu(x)| < \varepsilon, \quad \text{falls } \nu > n_\varepsilon,$$

für den Bereich $\mathfrak{B}$ zu erzielen, braucht man ja nur für n_ε die *größte* derjenigen Zahlen zu wählen, welche in den einzelnen Bereichen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_\varkappa$ die entsprechende Rolle spielen.

Daß umgekehrt die *gleichmäßige* Konvergenz in irgendeinem Bereiche $\mathfrak{B}$ diejenige in jedem Teilbereiche nach sich zieht, ist unmittelbar ersichtlich.

Man sagt ferner, die Funktionenfolge $(F_\nu(x))$ sei *in der Nähe* oder auch *in der Umgebung*[2]) einer dem Konvergenzbereiche von $(F_\nu(x))$ angehörigen Stelle x_0 *gleichmäßig* konvergent, wenn ein mit x_0 im allgemeinen veränderliches $\varrho(x_0) \geqq 0$ existiert, derart, daß für die Gesamtheit aller dem Konvergenzbereiche angehörigen Stellen x, welche der Bedingung:

(7) $$|x - x_0| \leqq \varrho(x_0),$$

bzw. im Falle $x_0 = \infty$ einer Bedingung von der Form:

(7 bis) $$|x| \geqq R$$

---

1) Für $|x| = 1$ findet, abgesehen von der einzigen Stelle $x = 1$, *Divergenz* statt.

2) Danach ist, falls x_0 auf der *Grenze* des Konvergenzbereiches liegt, unter *Umgebung* schlechthin immer nur der dem Konvergenzbereiche angehörige *Teil* der vollständigen, durch Ungl. (7) bzw. (7 bis) charakterisierten Umgebung zu verstehen.

genügen, *gleichmäßige* Konvergenz stattfindet. Dann ist zunächst wieder unmittelbar ersichtlich, daß aus der *gleichmäßigen* Konvergenz in irgendeinem *Bereiche* $\mathfrak{B}$ stets diejenige in der Nähe jeder *einzelnen Stelle* von $\mathfrak{B}$ resultiert. Es erweist sich aber (um ein zuweilen bequemes Kriterium zur Feststellung der gleichmäßigen Konvergenz in einem *Bereiche* zu gewinnen) als nützlich, nachzuweisen, daß zum mindesten für einen *abgeschlossenen*[1]) Bereich auch das umgekehrte gilt (was keineswegs selbstverständlich ist). Wir wollen überdies den entsprechenden Beweis unter einer noch etwas erweiterten Voraussetzung, derjenigen der sogenannten *punktweise gleichmäßigen* Konvergenz führen.

5. Die Funktionenfolge $(F_\nu(x))$ soll *im Punkte* x_0 *gleichmäßig* konvergent heißen, wenn x_0 dem Konvergenzbereiche von $(F_\nu(x))$ angehört und zu jedem einzelnen $\varepsilon > 0$ die Bedingung:

(IIIa) $$|F(x) - F_\nu(x)| < \varepsilon$$

durch passende Wahl von n_ε für $\nu \geqq n_\varepsilon$ und alle Stellen einer gewissen Umgebung[2]) von x_0, etwa:

(8) $$|x - x_0| < \varrho_\varepsilon(x_0)$$

befriedigt werden kann. Nur, wenn $\varrho_\varepsilon(x_0)$ bei unbegrenzt abnehmendem ε ein *von Null verschiedenes Minimum* besitzt, dann ist die Folge $(F_\nu(x))$ zugleich auf Grund der zuvor gegebenen Definition *in der Nähe* oder *Umgebung* von x_0 *gleichmäßig* konvergent. Hat dagegen $\varrho_\varepsilon(x_0)$ für $\varepsilon \to 0$ die untere Grenze *Null* (und dieser Fall kann wirklich eintreten), so besagt die obige Forderung *weniger* als jene frühere: die Folge $(F_\nu(x))$ ist dann wirklich *nur „im Punkte"* x_0, *nicht „in der Nähe"* von x_0 *gleichmäßig* konvergent. Nichtsdestoweniger gilt der folgende Satz:

> *Steht nur so viel fest, daß die Folge $(F_\nu(x))$ in jedem Punkte eines abgeschlossenen Bereiches $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergiert, so ist sie auch im Bereiche $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergent.*[3])

Oder auch in etwas kürzerer Fassung:

> *Jede in einem abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{B}$ (mindestens) punktweise gleichmäßig konvergierende Funktionenfolge konvergiert daselbst schlechthin gleichmäßig.*

---

1) Ist der Konvergenzbereich ein *nicht-abgeschlossener*, so braucht diese Umkehrung *nicht* zu gelten. So ist z. B. die als Beispiel 1) der vorigen Nummer behandelte Funktionenfolge (x^ν) offenbar *gleichmäßig* konvergent in der Umgebung *jeder Stelle* des Bereiches $|x| < 1$, *nicht* aber, wie a. a. O. gezeigt wurde, *im Bereiche* $|x| < 1$.

2) Bezüglich des Umfanges dieser „Umgebung" gilt, falls x_0 auf der Grenze des Konvergenzbereiches liegt, das in Fußnote der vorigen Seite Gesagte.

3) Das letztere gilt also *a fortiori*, wenn $(F_\nu(x))$ *in der Nähe* jedes Punktes von $\mathfrak{B}$ *gleichmäßig* konvergiert.

Beweis[1]) Es werde irgendein (verhältnismäßig kleines) positives ε fest angenommen, welches für die ganze folgende Betrachtung unverändert bleibt Ferner werde der Bereich $\mathfrak{B}$ zunächst als *endlich* vorausgesetzt.

Zu jedem $\mathfrak{B}$-Punkte x gehört dann auf Grund der Voraussetzung eine Zahl $n_{\varepsilon, x}$, derart, daß für eine gewisse Umgebung (im Sinne von Fußn 2 von Seite 230) die Bedingung (IIIa) für $\nu \geqq n_{\varepsilon, x}$ erfüllt ist. Hat die Zahlenmenge $\{n_{\varepsilon, x}\}$, erstreckt über alle x des Bereiches $\mathfrak{B}$, eine bestimmte *obere Grenze* n_ε, so ist die Bedingung (IIIa) in dem ganzen Bereiche $\mathfrak{B}$ für $\nu \geqq n_\varepsilon$ erfüllt. Wir zeigen, daß dieser Fall unter allen Umständen eintreten *muß*.

Denn angenommen, es gäbe *keine* solche obere Grenze n_ε, so müßte, wenn man den Bereich mit einem quadratischen Teilungsgitter überzieht, *mindestens ein* Quadrat vorhanden sein, für dessen (im Innern oder auf der Begrenzung liegende) $\mathfrak{B}$-Punkte jene (ungünstige) Annahme zutrifft. Wird dieses Quadrat in vier kongruente Teilquadrate zerlegt, so müßte wieder das gleiche für *mindestens eins* dieser Teilquadrate gelten. Und das analoge würde bei unbegrenzter Fortsetzung dieses Viertelungverfahrens eintreten. Man erhielte also auf diese Weise eine unbegrenzte Folge ineinandergeschachtelter und unbegrenzt kleiner werdender Quadrate mit der fraglichen Eigenschaft und somit schließlich einen im Innern oder auf dem Rande aller dieser Quadrate liegenden Grenzpunkt x' von der Beschaffenheit, daß für *keine* noch so kleine Umgebung die Bedingung (IIIa) durch Wahl von $\nu \geqq n_{\varepsilon, x'}$ erfüllbar wäre — was der Voraussetzung widerspricht.[2])

Hiernach muß also in der Tat ein bestimmtes n_ε existieren, derart, daß für *alle* x des Bereiches $\mathfrak{B}$ und das spezielle $\varepsilon > 0$:

$$|F(x) - F_\nu(x)| < \varepsilon, \quad \text{falls} \quad \nu \geqq n_\varepsilon.$$

Da aber die vorstehende Betrachtung auf jedes beliebige $\varepsilon > 0$ anwendbar ist, so folgt schließlich, daß die Folge $(F_\nu(x))$, wie behauptet, in dem (abgeschlossenen) Bereiche $\mathfrak{B}$ *gleichmäßig* konvergent ist.

Erstreckt sich der Bereich $\mathfrak{B}$ ins *Unendliche*, ohne den Punkt $x = 0$ (im Innern oder auf der Berandung) zu enthalten, so kann man zunächst

---

1) Der Beweis beruht auf demselben, nach Lage der Sache in der Durchführung etwas vereinfachter Schlußverfahren, wie derjenige für die *gleichmäßige* Stetigkeit von Funktionen zweier reellen Veränderlichen (vgl § 12, Nr. 13, S 118)

2) Wäre der Bereich $\mathfrak{B}$ *kein* abgeschlossener, so könnte der fragliche Grenzpunkt auf der nicht zu $\mathfrak{B}$ gehörigen *Berandung* von $\mathfrak{B}$ liegen, wo also die Voraussetzung nicht mehr gilt und somit die im Texte angewendete Schlußweise hinfällig wird. (Man betrachte wieder die Beispiele:

$$x^\nu \text{ für } |x| < 1 \quad \text{und} \quad \frac{\nu|x|}{1 + \nu|x|} \quad \text{für } |x| > 0\Big)$$

den unendlichen x-Bereich durch die Substitution $x = \frac{1}{y}$ in einen ganz im Endlichen gelegenen y-Bereich $\mathfrak{B}'$ transformieren Da sodann einem *Kreise* um einen zu $\mathfrak{B}$ gehörigen Punkt x_0 ein solcher im Bereiche $\mathfrak{B}$ entspricht, der den Punkt $y_0 = \frac{1}{x_0}$ zwar nicht zum Mittelpunkte hat, aber *im Innern* enthält[1]), so wird gleichzeitig mit der Beziehung (7):

$$|F(x) - F_\nu(x)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |x - x_0| \leqq \varrho_\varepsilon(x_0)$$

eine solche von der Form:

$$\left|F\left(\frac{1}{y}\right) - F\left(\frac{1}{y}\right)\right| < \varepsilon$$

immerhin *für eine gewisse Umgebung* der Stelle y_0 bestehen, so daß also die Voraussetzung der *punktweise gleichmäßigen* Konvergenz auch für $\left(F_\nu\left(\frac{1}{y}\right)\right)$ im Bereiche $\mathfrak{B}'$ erfüllt ist. Daraus folgt aber auf Grund des zuvor bewiesenen, daß $\left(F_\nu\left(\frac{1}{y}\right)\right)$ *im Bereiche* $\mathfrak{B}'$ *gleichmäßig* konvergiert, also für *alle* y von $\mathfrak{B}'$ und *jedes* $\varepsilon > 0$ einer Beziehung von der Form:

$$F\left(\frac{1}{y}\right) - F_\nu\left(\frac{1}{y}\right) < \varepsilon, \quad \text{falls} \quad \nu \geqq n_\varepsilon$$

genügt, woraus dann durch Rücksubstitution von $\frac{1}{y} = x$ die *gleichmäßige* Konvergenz von $(F_\nu(x))$ *im Bereiche* $\mathfrak{B}$ hervorgeht

Enthält der sich ins Unendliche erstreckende Bereich $\mathfrak{B}$ die Stelle $x = 0$, so zerlege man ihn in zwei Teilbereiche, von denen der eine, die Stelle $x = 0$ im Innern enthaltende, ein *endlicher* ist Dann gilt auf Grund der vorstehenden Ergebnisse die *gleichmäßige* Konvergenz für jeden dieser beiden Teilbereiche, folglich auch für den Gesamtbereich $\mathfrak{B}$

6. Der Begriff der *gleichmäßigen* Konvergenz erweist sich als ein wichtiges Hilfsmittel zur Beantwortung der folgenden Frage (welche tatsächlich auch den Anlaß zur Einführung des fraglichen Begriffes gegeben hat): Wir nehmen jetzt an, daß der Konvergenzbereich $\mathfrak{B}$ der Funktionenfolge $(F_\nu(x))$ aus einem oder mehreren *Gebieten*[2]) besteht Ist dann *jede einzelne Funktion* $F_\nu(x)$ an irgendeiner Stelle x_0 *stetig*, wie verhält es sich mit der *Stetigkeit der Grenzfunktion* $F(x)$ an der Stelle x_0? Daß diese letztere nicht stattzufinden braucht, zeigt schon das überaus einfache Beispiel der Funktionenfolge (x^ν) Jedes einzelne x^ν ist in jedem endlichen Bereiche ausnahmslos stetig. Die Folge (x^ν) ist für $x < 1$

1) Vgl. § 17, Nr. 2, Fußn 1 (S. 158) Nur wenn $x_0 = \infty$, in welchem Falle ja $y_0 = 0$ zu setzen ist, entspricht einem Kreise „*um den Mittelpunkt* ∞“, d h. einem Kreise $|x| = R$ mit verhältnismäßig *großem* Radius R ein solcher um den *Mittelpunkt* $y = 0$ mit dem Radius $|y| = \frac{1}{R}$.

2) Vgl § 8, Nr. 5, Def. VI (S 65) und § 15, Nr 3, letzter Absatz (S 141)

und auch noch für $x = 1$ konvergent. Als Grenzfunktion ergibt sich für $|x| < 1$: $\lim_{\nu \to \infty} x^\nu = 0$, dagegen für $x = 1$: $\lim_{\nu \to \infty} x^\nu = 1$. Die für $|x| < 1$ *stetige* Grenzfunktion, nämlich $F(x) \equiv 0$, ist also an der Stelle $x = 1$ *unstetig*, nämlich $F(1) = 1$.

Es gilt nun der folgende Satz:

Ist jede der Funktionen $F_\nu(x)$ zum mindesten von einer bestimmten Stelle $\nu \geqq m$ ab stetig an der Stelle x_0 und konvergiert die Folge $(F_\nu(x))$ gleichmäßig im Punkte x_0 gegen die Grenzfunktion $F(x)$, so ist auch $F(x)$ stetig an der Stelle x_0

Beweis. Infolge der (punktweise) *gleichmäßigen* Konvergenz von $(F_\nu(x))$ hat man bei passender Wahl von $n \geqq m$:

$$(9) \qquad \begin{cases} |F(x_0) - F_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ |F(x_0 + h) - F_n(x_0 + h)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{etwa für } |h| < \varrho_\varepsilon \end{cases}$$

und daher, wenn man den absoluten Betrag der Differenz bildet:

$$(10) \qquad |F(x_0 + h) - F(x_0) - (F_n(x_0 + h) - F_n(x_0))| < \frac{2\varepsilon}{3}$$

Andererseits kann man infolge der *Stetigkeit* von $F_n(x)$ für $x = x_0$ durch geeignete Herabminderung von $|h|$, etwa für $|h| < \varrho_\varepsilon$ erzielen, daß:

$$(11) \qquad |F_n(x_0 + h) - F_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

so daß durch Kombination von Ungl. (10) und (11) sich schließlich ergibt:

$$(12) \qquad |F(x_0 + h) - F(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |h| \leqq \delta,$$

womit der obige Satz bewiesen ist.

Derselbe kann auch folgendermaßen ausgesprochen werden:

Ist jede der Funktionen $F_\nu(x)$ für $\nu \geqq m$ stetig an der Stelle x_0. die Folge $(F_\nu(x))$ für $x = x_0$ und in der Umgebung von x_0 konvergent, die Grenzfunktion $F(x)$ für $x = x_0$ unstetig, so muß $(F_\nu(x))$ im Punkte x_0 ungleichmäßig konvergieren.

Man vergleiche hierzu das bereits oben erwähnte Beispiel $F_\nu(x) = x^\nu$ für $x = 1$, sowie das in Nr. 3 als Beispiel 4 angeführte: $\frac{\nu|x|}{1 + \nu|x|}$ für $x = 0$.

Im übrigen ist die Bedingung der *gleichmäßigen* Konvergenz (bei gleichzeitiger Stetigkeit der einzelnen $F_\nu(x)$), wie bewiesen, eine *hinreichende*, *keineswegs* aber *notwendige* Bedingung[1]) für die *Stetigkeit* der

1) Man beachte, daß schon beim Beweise des obigen Satzes die Voraussetzung der *gleichmäßigen* Konvergenz gar nicht vollständig in Anspruch genommen wird Denn die Gültigkeit der Ungleichungen (9) wird lediglich für irgend*einen* (sc. von ε abhängigen) Wert des Index n gebraucht, *nicht*, wie dies ja die Vor-

Grenzfunktion $F(x)$, wie das folgende Beispiel zeigt. Es werde gesetzt:

$$F_\nu(x) = \frac{\nu x}{1 + |\nu x|^2} \tag{13}$$

und daher:

$$F(x) = \lim_{\nu \to \infty} F_\nu(x) = 0 \quad \text{für} \quad |x| > 0, \quad \text{aber auch:} \quad F(0) = 0.$$

Die Grenzfunktion $F(x) \equiv 0$ ist also durchweg, insbesondere auch für $x = 0$, *stetig* Nichtsdestoweniger konvergiert die Folge $(F_\nu(x))$ in der Nähe von $x = 0$ *ungleichmaßig*. Denn, *wie groß* man auch eine natürliche Zahl n annehmen möge, so ergibt sich für $x = \frac{1}{n}$ allemal: $F_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. Setzt man ferner:

$$F_\nu(x) = \frac{\nu^2 x}{1 + |\nu x|^3}, \tag{14}$$

so ergibt sich wiederum:

$$F(x) = \lim_{\nu \to \infty} F_\nu = 0 \quad \text{für} \quad |x| > 0, \quad \text{ebenso:} \quad F(0) = 0,$$

somit *Stetigkeit* der Grenzfunktion für $x = 0$. Trotzdem findet man hier sogar: $F_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2}$, so daß also unter den $F_\nu(x)$ bei wachsendem ν solche vorkommen, welche in der Nähe von $x = 0$ unter anderen Werten *beliebig große* annehmen (obschon jedes einzelne $F_n(x)$ für $x = 0$ *stetig* ist)

Schließlich ergibt sich aus dem oben bewiesenen Satze noch der folgende:

Ist jede der Funktionen $F_\nu(x)$ etwa für $\nu \geqq m$ stetig im Bereiche $\mathfrak{B}$ und konvergiert die Folge $(F_\nu(x))$ in jedem zu $\mathfrak{B}$ gehörigen abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{B}'$[1]) gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $F(x)$, so ist auch $F(x)$ stetig im Bereiche $\mathfrak{B}$

§ 29. Funktionenreihen: Gleichmäßige, ungleichmäßige und maximale Konvergenz. — Stetigkeit der Reihensumme.

1 Wie bereits bei früherer Gelegenheit[2]) bemerkt wurde, läßt sich der *Grenzwert* jeder beliebigen konvergenten *Zahlenfolge* (a_ν) auf Grund der Indentität:

$$a_n = a_0 + \sum_1^n (a_\nu - a_{\nu-1})$$

aussetzung der *gleichmäßigen* Konvergenz gestatten würde, für jeden Index $\nu \geqq \iota$. Ich würde die in den Ungleichungen (9) enthaltene beschränktere Forderung als *einfach gleichmäßige* Konvergenz bezeichnen.

1) d. h. also auch in $\mathfrak{B}$ selbst, falls $\mathfrak{B}$ ein *abgeschlossener* Bereich

2) I_3, S 668, Fußn 1

auch als *Summe* einer unendlichen *Reihe* darstellen, nämlich:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0 + \sum_1^\infty{}' (a_\nu - a_{\nu-1}).\text{[1]}$$

Umgekehrt ist ja die *Summe* jeder konvergenten *Reihe* $\sum_0^\infty{}' c_\nu$ von vornherein als *Grenzwert* einer *Zahlenfolge* definiert, nämlich:

$$\sum_0^\infty{}' c_\nu = \lim_{n\to\infty} s_n, \quad \text{wo:} \quad s_n = \sum_0^n{}' c_\nu \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Es liegt auf der Hand, daß sich diese Bemerkungen ohne weiteres auch auf *Funktionenfolgen* bzw. *„Funktionenreihen"*, d. h. solche Reihen, deren Glieder irgendwelche Funktionen (in dem vorliegenden Zusammenhange *einer* komplexen Veränderlichen) sind. Danach läßt sich also die *Grenzfunktion* $F(x)$ einer konvergenten Funktionenfolge $(F_\nu(x))$ durch die konvergente *Reihe* darstellen:

$$(1) \qquad F(x) \equiv \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_0(x) + \sum_1^\infty{}' (F_\nu(x) - F_{\nu-1}(x)).$$

Umgekehrt wird man, wenn $(f_\nu(x))$ irgendeine Funktionenfolge vorstellt und gesetzt wird:

$$(2) \qquad \sum_0^n{}' f_\nu(x) = F_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

die *Summe* der unendlichen *Reihe* $\sum_0^\infty{}' f_\nu(x)$ zu definieren haben durch die Beziehung:

$$(3) \qquad \sum_0^\infty{}' f_\nu(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x).$$

Durch die im vorigen Paragraphen angestellten Betrachtungen über gewisse Konvergenzeigenschaften von *Funktionenfolgen* $(F_\nu(x))$ sind also

---

1) Bedeutet (p_ν) eine beliebige Folge wachsender natürlicher Zahlen, so konvergiert mit der Folge (a_ν) auch die herausgehobene Folge (a_{p_ν}) gegen den *nämlichen* Grenzwert Da andererseits:

$$a_{p_n} = a_{p_0} + \sum_1^n{}' (a_{p_\nu} - a_{p_{\nu-1}}),$$

so kann man $\lim_{n\to\infty} a_n$ auch in die Form setzen:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_{p_0} + \sum_1^\infty{}' (a_{p_\nu} - a_{p_{\nu-1}}).$$

Dagegen darf umgekehrt aus der bloßen Konvergenz dieser Reihe nur auf die Existenz von $\lim_{n\to\infty} a_{p_n}$, nicht aber auf diejenige von $\lim_{n\to\infty} a_n$ geschlossen werden.

die entsprechenden Eigenschaften für *Reihen* der Form $\sum f_\nu(x)$ bereits vollständig festgelegt: man hat lediglich die dort gemachten Aussagen in die neue Ausdrucksweise zu übersetzen, die erforderlichen Formeln in die neue Bezeichnungsweise umzuschreiben. Obschon dies nicht die geringste Schwierigkeit bietet, so dürfte es bei der dominierenden Stellung, welche gerade die Benutzung der Reihenform für die Funktionenlehre gewonnen hat, zweckmäßig erscheinen, diese Übertragung in den wesentlichsten Punkten wirklich durchzuführen, zumal sich dabei noch gewisse gerade an die *Reihenform* anzuknüpfende nützliche Ergänzungen ergeben werden.

2 Sieht man jetzt also die Funktionenfolge $(f_\nu(x))$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ als gegeben an und bezeichnet die Summe ihrer ersten $n+1$ Glieder, wie in Gl. (2) angegeben, mit $F_n(x)$, so heißt die unendliche Reihe $\sum f_\nu(x)$ an der Stelle $x = x'$ *konvergent* und $F(x')$ ihre *Summe*, in Zeichen:

$$\sum_0^\infty{}^\nu f_\nu(x) = F(x'), \tag{4}$$

wenn *jedes* $f_\nu(x')$ *eine bestimmte Zahl* vorstellt und $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x') = F(x')$ *im engeren Sinne existiert* In jedem anderen Falle heißt die Reihe *divergent*. Die Gesamtheit der Stellen x, für welche die Reihe $\sum f_\nu(x)$ *konvergiert*, bildet ihren *Konvergenzbereich*. Sie heißt daselbst auf Grund der früher eingeführten Terminologie[1]) *absolut* konvergent, sobald auch $\sum |f_\nu(x)|$ konvergiert, und ist in diesem Falle zugleich *unbedingt* konvergent, im entgegengesetzten nur *bedingt* konvergent.

Beachtet man ferner, daß:

$$F_{n+p}(x) - F_n(x) = \sum_{n+1}^{n+p}{}^\nu f_\nu(x), \quad F(x) - F_{\nu'}(x) = \sum_{\nu'+1}^{\infty}{}^\nu f_\nu(x), \tag{5}$$

so ergeben sich im Anschlusse an die im vorigen Paragraphen aufgestellten Definitionen der *gleichmäßigen* Konvergenz einer *Funktionenfolge* (S. 227/31, Nr. 2, 4, 5) und bei Benutzung der dort mit (Ia) und (IIIa) bezeichneten Bedingungsformen als entsprechende *Definitionen* für unendliche *Reihen* die folgenden:

Die im Bereiche $\mathfrak{B}$ konvergierende Reihe $\sum f_\nu(x)$ heißt daselbst gleichmäßig konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n vorhanden ist, derart, daß für alle x des Bereiches $\mathfrak{B}$ die Beziehung besteht:

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p}{}^\nu f_\nu(x)\right| < \varepsilon \quad (p = 1, 2, 3, \ldots) \tag{I}$$

---

1) s. I_3, § 75, Nr 2, S. 576.

oder auch die damit äquivalente:

$$\text{(II)} \qquad \left|\sum_{\nu'+1}^{\infty} f_\nu(x)\right| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu' \geqq n \text{ [1])}$$

Steht nur soviel fest, daß die Beziehung (I) *oder* (II) *für eine gewisse feste bzw. gleichzeitig mit* ε *eventuell gegen Null konvergierende Umgebung einer Stelle* x_0 *erfüllt ist, so heißt die unendliche Reihe* $\sum f_\nu(x)$ *in der Nähe oder Umgebung von* x_0 *bzw. im Punkte* x_0 *gleichmäßig konvergent.*

Auf Grund dieser Definitionen gestattet dann der Satz von Nr. 5 des vorigen Paragraphen (S. 231) ohne weiteres die folgende Übertragung:

Jede in einem abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{B}$ *(mindestens) punktweise gleichmäßig konvergierende Reihe konvergiert daselbst schlechthin gleichmäßig.*[2])

Man sagt wiederum, die unendliche Reihe $\sum f_\nu(x)$ konvergiere in der Nähe einer dem Konvergenzbereiche angehörigen Stelle x_0 *ungleichmäßig*, wenn *nicht* zu jedem ε eine natürliche Zahl n existiert, welche die Gültigkeit der Beziehung (I) oder (II) für *alle* in der Nähe von x_0 befindlichen *Konvergenzstellen* zur Folge hat

Um Beispiele für *gleichmäßig* bzw *ungleichmäßig* konvergierende Reihen $\sum f_\nu(x)$ herzustellen, braucht man lediglich in den Beispielen von Nr. 3 des vorigen Paragraphen $f_0(x) = F_0(x)$ und für $\nu \geqq 1$: $f_\nu(x) = F_\nu(x) - F_{\nu-1}(x)$ zu setzen. Auf diese Weise ergibt sich aus dem Beispiel (1), (S. 227): $F_\nu(x) = x^\nu$, daß die Reihe:

$$\text{(6)} \qquad 1 + \sum_{1}^{\infty} (x-1)\; x^{\nu-1}$$

für $|x| < 1$ gegen die Summe 0 konvergiert, jedoch *gleichmäßig* nur für $|x| \leqq \varrho < 1$, während bei Annäherung an den Kreis $|x| = 1$, insbesondere an den noch *Konvergenz* (gegen die Summe 1) liefernden Punkt $x = 1$ *ungleichmäßige* Konvergenz stattfindet.

---

1) Dabei wird also keineswegs gefordert, daß alle $f_\nu(x)$ in $\mathfrak{B}$ *beschränkt* sein müßten Danach gilt z B die Reihe $\sum_{0}^{\infty} x^{2\nu-1}$ im Bereiche $|x| \leqq \varrho < 1$ mit einzigem Ausschluß der *Stelle* $x = 0$ als *gleichmäßig* konvergent, obschon das Anfangsglied $\frac{1}{x}$ in der Nähe von $x = 0$ *nicht beschränkt* ist.

2) Gilt wiederum *a fortiori*, wenn die Reihe *in der Nähe* jedes Punktes von $\mathfrak{B}$ *gleichmäßig* konvergiert.

Das Beispiel (4) (S. 229): $F_\nu(x) = \frac{\nu |x|}{1 + \nu |x|}$ liefert die Reihe:

$$(7) \qquad \sum_1^\infty{}_\nu \frac{|x|}{(1 + (\nu - 1)|x|)(1 + \nu |x|)}$$

mit der Summe 1 für $|x| > 0$, mit der Summe 0 für $x = 0$; *gleichmäßig* konvergent für $|x| \geqq \delta > 0$, dagegen *ungleichmäßig* in der Nähe von $x = 0$.[1])

3. Ein nicht selten nützliches (gewöhnlich *Weierstraß* zugeschriebenes) Kriterium zur Feststellung der *gleichmäßigen* Konvergenz gewinnt man durch die folgende Überlegung. Es sei in einem gewissen Bereiche $\mathfrak{B}$ zum mindesten für $\nu \geqq m$:

$$|f_\nu(x)| \leqq \gamma_\nu,$$

eine Bedingung, welcher insbesondere genügt wird, wenn $f_\nu(x)$ für $\nu \geqq m$ im Bereiche $\mathfrak{B}$ *beschränkt* ist und γ_ν die *obere Grenze* von $|f_\nu(x)|$ für den Bereich $\mathfrak{B}$ bezeichnet. Wird sodann angenommen, daß die Reihe $\sum \gamma_\nu$ *konvergiere*, so hat man bei passender Wahl von $n \geqq m$:

$$\sum_{n+1}^{n+p}{}_\nu \gamma_\nu < \varepsilon \quad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

und daher auch:

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p}{}_\nu f_\nu(x)\right| \leqq \sum_{n+1}^{n+p}{}_\nu |f_\nu(x)| < \sum_{n+1}^{n+p}{}_\nu \gamma_\nu < \varepsilon\,^{2})$$

für *alle* x des Bereiches $\mathfrak{B}$. Die Reihe $\sum f_\nu(x)$ konvergiert somit im Bereiche $\mathfrak{B}$ *gleichmäßig*.

Wir wollen eine Reihe $\sum f_\nu(x)$, welche für irgendeinen Bereich $\mathfrak{B}$ die Eigenschaft besitzt, daß die aus den *oberen Grenzen* der $|f_\nu(x)|$ ge-

---

1) Man beachte, daß die Reihen (6) und (7) beide *absolut* konvergieren, daß somit die *absolute* Konvergenz keineswegs die *Gleichmäßigkeit* der Konvergenz sichert. Andererseits können Reihen, die in irgendeinem Bereiche nur *bedingt* konvergieren, daselbst durchweg *gleichmäßig* konvergieren. So konvergiert z. B. die Reihe: $\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} - \frac{1}{2+x} + \cdots$ für $|x| \leqq \varrho < 1$ nur *bedingt*, jedoch *gleichmäßig* (wie man leicht erkennt, wenn man die Reihe in die Form $\sum_1^\infty{}_\nu \frac{2x}{\nu^2 - x^2}$ setzt: vgl. Nr. 3 am Ende).

2) Man pflegt die Reihe $\sum_{n+1}^\infty{}_\nu \gamma_\nu$ als *Majorante* der Reihe $\sum_{n+1}^\infty{}_\nu f_\nu(x)$ zu bezeichnen. Allgemein versteht man unter einer *Majorante* eines arithmetischen Ausdrucks A einen anderen daraus abgeleiteten M von der Beschaffenheit, daß durchweg bzw. in einem näher bezeichneten Umfange die Beziehung besteht:

$$M > |A|.$$

bildete Reihe *konvergiert*, als im Bereiche $\mathfrak{B}$ *maximal konvergent* bezeichnen. Dann gilt also der Satz:

Eine in irgendeinem Bereiche maximal konvergente Reihe ist daselbst gleichmäßig konvergent.

Beispiel: Die in der letzten Fußnote erwähnte Reihe $\sum_1^\infty {}^\nu \frac{2x}{\nu^2 - x^2}$ ist im Bereiche $|x| \leqq \varrho < 1$ *maximal* und somit *gleichmäßig* konvergent, wegen $\left|\frac{2x}{\nu^2 - x^2}\right| \leqq \frac{2\varrho}{\nu^2 - \varrho^2}$ und wegen der Konvergenz von $\sum_1^\infty {}^\nu \frac{2\varrho}{\nu^2 - \varrho^2}$. Übrigens gilt das entsprechende für jeden beliebig großen endlichen Bereich $|x| \leqq R$ nach Weglassung derjenigen Anfangsglieder, für welche $\nu \leqq R$. Und die gleichmäßige Konvergenz bleibt auch nach Hinzufügung dieser Anfangsglieder erhalten, wenn man die Punkte $x = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm [R]$ ausschließt. Man beachte, daß man dieses letzte Ergebnis nicht etwa aus dem Umstande erschließen könnte, daß die Reihe *in der Nähe* jeder von den Punkten $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm R$ verschiedenen Stelle gleichmäßig konvergiert. Denn diese Form der Schlußweise würde ja nur für *abgeschlossene* Bereiche gelten, während der durch bloße Ausschließung der Punkte $x = \pm \nu$ entstehende Bereich ein *nicht abgeschlossener* ist Man könnte sie also nur anwenden, wenn man die betreffenden Punkte durch beliebig kleine *Kreise* ausschließt und diese sodann zur Begrenzung des Bereiches hinzufügt. (Für die Praxis ist das wohl in allen Fällen gleichgültig, verdient immerhin völliger Klarheit zuliebe hervorgehoben zu werden)

4. Da aus der *Stetigkeit* von $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_\nu(x), \ldots$ wegen: $F_\nu(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_\nu(x)$ auch diejenige von $F_\nu(x)$ resultiert, so ergibt sich durch unmittelbare Übertragung der Sätze von Nr. 6 des vorigen Paragraphen:

Ist jedes der Reihenglieder $f_\nu(x)$ stetig an der Stelle x_0 und konvergiert die Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu f_\nu(x)$ in der Nähe von x_0 gleichmäßig gegen die Summe $F(x)$, so ist auch $F(x)$ stetig an der Stelle x_0.

Ist jedes der Reihenglieder $f_\nu(x)$ stetig im Bereiche $\mathfrak{B}$ und konvergiert die Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu f_\nu(x)$ in jedem zu $\mathfrak{B}$ gehörigen abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{B}'$ gleichmäßig gegen die Summe $F(x)$, so ist auch $F(x)$ eine stetige Funktion im Bereiche $\mathfrak{B}$

Dabei ist die *Gleichmäßigkeit* der Konvergenz in dem bezeichneten Zusammenhange wiederum zwar eine *hinreichende*, aber *keine notwendige*

Bedingung für die Stetigkeit. [Beispiel (vgl. S. 235, Gl. (13)). Es ist:

$$\sum_1^\infty{}_\nu \left\{ \frac{\nu x}{1 + |\nu x|^2} - \frac{(\nu - 1)x}{1 + |(\nu - 1)x|^2} \right\} = 0$$

für *jedes* x, also insbesondere für $x = 0$, dennoch *ungleichmäßig* konvergent in der Nähe von $x = 0$]

§ 30. Reihen $\mathfrak{P}(x)$ nach ganzen positiven Potenzen einer Veränderlichen. — Der Konvergenzkreis. — Formeln zur Bestimmung des Konvergenzradius.

1. Der einfachste und zugleich, wie sich zeigen wird, für die Funktionentheorie fruchtbarste Typus von Reihen der Form $\sum f_\nu(x)$ kommt zum Vorschein, wenn gesetzt wird: $f_\nu(x) = a_\nu x^\nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$), unter (a_ν) eine beliebige unbegrenzte Folge komplexer Zahlen verstanden. Eine solche Reihe heißt eine *gewöhnliche Potenzreihe* oder auch, wo ein Mißverständnis ausgeschlossen erscheint, schlechthin eine *Potenzreihe* in x und soll *generell* mit $\mathfrak{P}(x)$ bezeichnet werden, so daß also im vorliegenden Falle:

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(x) \equiv \sum_0^\infty{}_\nu a_\nu x^\nu.$$

Als Grundlage für die Feststellung des Konvergenzbereichs einer solchen Reihe beweisen wir zunächst den folgenden Satz:

*Gibt es eine Zahl x_0 von der Beschaffenheit, daß $|a_\nu x_0^\nu|$ für alle $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ unter einer positiven Zahl γ bleibt, so ist $\mathfrak{P}(x)$ **absolut konvergent** für jedes der Bedingung $|x| < |x_0|$ genügende x, außerdem nach Annahme eines positiven $\varrho < |x_0|$ **gleichmäßig konvergent** für $0 \leqq |x| \leqq \varrho$.*

Beweis. Die geometrische Reihe $\sum x^\nu$ *konvergiert*, und zwar *absolut* für $|x| < 1$ (vgl. I_3, § 75, Nr. 2, S 576). Da nun:

$$|a_\nu x^\nu| = |a_\nu x_0|^\nu \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^\nu$$
$$< \gamma \left|\frac{\varrho}{x_0}\right|^\nu \quad \text{für} \quad |x| \leqq \varrho,$$

so ist, wegen $\left|\frac{\varrho}{x_0}\right| < 1$, die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für $|x| \leqq \varrho$ *absolut*, und zwar *maximal*, also auch *gleichmäßig konvergent*.

2. Als unmittelbare Folgerung aus dem eben bewiesenen Satze ergibt sich:

*Konvergiert die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für irgendeinen bestimmten Wert $x = x_1$, so konvergiert sie **absolut** für alle x mit einem Absolutwert $|x| < |x_1|$ Divergiert $\sum a_\nu x^\nu$ oder auch nur*[1])

1) In diesem Falle könnte ja $\sum a_\nu x_1^\nu$ noch *bedingt* konvergieren.

$\sum |a_\nu x^\nu|$ *für einen gewissen Wert* $x = x_2$, *so divergiert* $\sum a_\nu x^\nu$ *für alle* x *mit dem Absolutwert* $|x| > |x_2|$.

Ist nämlich $\sum a_\nu x_1^\nu$ *konvergent* (wenn auch eventuell nur bedingt[1])), so muß ja $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu x_1^\nu = 0$ sein, also etwa: $|a_\nu x_1^\nu| < \varepsilon$ für $\nu > n$, so daß nach Hinzunahme von $|a_0|, |a_1 x_1|, \ldots, |a_n x_1^n|$ alle $|a_\nu x_1^\nu|$ sicher unter einer endlichen Schranke bleiben, also der zuvor bewiesene Satz in Wirksamkeit tritt.

Wenn dagegen auch nur $\sum |a_\nu x_2^\nu|$ *divergiert*, so kann $\sum a_\nu x^\nu$ für *kein* x mit dem Absolutwert $|x| > |x_2|$ konvergieren. Denn wäre dies der Fall, so würde ja auf Grund des bewiesenen Satzes sofort die *absolute* Konvergenz von $\sum a_\nu x_2^\nu$ daraus resultieren.

3. Sind die a_ν so beschaffen, daß die $|a_\nu x^\nu|$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ für *jedes einzelne noch so große* x unter einer endlichen Schranke bleiben, so muß offenbar die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für jedes noch so große (endliche) x *konvergieren* (und zwar *absolut*): sie heißt in diesem Falle *beständig konvergent.* (NB. Nichtsdestoweniger *divergiert* sie selbstverständlich an der Stelle $x = \infty$, da die erste Bedingung für die Konvergenz, nämlich daß die einzelnen Glieder bestimmte Zahlen vorstellen, hier nicht mehr erfüllt ist).

Beispiel. Es werde gesetzt: $a_\nu = \frac{1}{\nu!}$, also: $\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}$.
Alsdann wird, wenn $|x| = r$ gesetzt wird, zunächst:

$$|a_\nu x^\nu|^2 = \left(\frac{r^\nu}{\nu!}\right)^2 = \frac{r^\nu}{1\cdot 2\cdots \nu}\cdot\frac{r^\nu}{\nu(\nu-1)\cdots 1}$$

$$(2) \qquad = \frac{r^2}{1\cdot\nu}\cdot\frac{r^2}{2\cdot(\nu-1)}\cdots\frac{r^2}{(\varkappa+1)(\nu-\varkappa)}\cdots\frac{r^2}{(\nu-1)\cdot 2}\cdot\frac{r^2}{\nu\cdot 1}.$$

Die kleinsten in dem letzten Ausdrucke auftretenden Nenner sind, wie leicht zu sehen, $1\cdot\nu$ und $\nu\cdot 1$. Aus:

$$\varkappa + 1 < \nu$$

folgt nämlich durch Multiplikation mit $\varkappa > 0$:

$$\varkappa^2 + \varkappa < \varkappa\nu$$
$$0 < \varkappa\nu - \varkappa^2 - \varkappa,$$

also durch Addition der Identität $\nu = \nu$:

$$\nu < \varkappa\nu + \nu - \varkappa^2 - \varkappa = (\varkappa + 1)(\nu - \varkappa)$$

(für $\varkappa = 1, 2, \ldots, \nu - 2$). Infolgedessen ergibt sich aus Gl. (2):

$$\left(\frac{r^\nu}{\nu!}\right)^2 < \left(\frac{r^2}{\nu}\right)^\nu$$

---

1) Konvergiert die Reihe $\sum a_\nu x_1^\nu$ *absolut*, so ist sie für $|x| \leq |x_1|$ *maximal* konvergent, also zugleich *absolut* und *gleichmäßig* konvergent.

und schließlich:

(3) $$\frac{r^\nu}{\nu!} < \left(\frac{r}{\sqrt{\nu}}\right)^\nu.$$

Der rechtsstehende Ausdruck wird aber, wie groß man auch r angenommen haben möge, für hinlänglich große ν beliebig klein, und es bleiben daher die Zahlen $\frac{r^\nu}{\nu!}$ für jedes einzelne noch so große r unter einer endlichen Schranke. Die Reihe $\sum \frac{x^\nu}{\nu!}$ ist somit *beständig konvergent.*[1])

Es kann nun *zweitens* der Fall eintreten, daß *überhaupt kein* von Null verschiedener Wert x existiert, für welchen die Zahlen $|a_\nu x^\nu|$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ unter einer endlichen Schranke bleiben. In diesem Falle kann offenbar die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für *keinen* von Null verschiedenen Wert x *konvergieren*, sie ist (sc. abgesehen von $x = 0$) „*beständig divergent*".

Beispiel. $\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty \nu!\, x^\nu$. Für $|x| = r$ findet man hier analog wie oben (s. Ungl. (3)):

(4) $$\nu!\, r^\nu > (\sqrt{\nu} \cdot r)^\nu$$

und dieser Ausdruck wächst mit ν ins Unendliche, wie *klein* auch $r > 0$ angenommen werde. Die Reihe $\sum \nu!\, x^\nu$ ist also für *jedes* von Null verschiedene x divergent. —

Als *dritte* Möglichkeit bleibt schließlich noch der Fall übrig, daß die Zahlen $|x|$, für welche $|a_\nu x^\nu|$ unter einer endlichen Schranke bleibt, eine bestimmte (endliche) *obere Grenze* R haben. Dann ist zunächst evident, daß die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für $|x| > R$ *divergiert,* da ja für $|x| > R$ die Zahlen $|a_\nu x^\nu|$ gleichzeitig mit ν zum mindesten teilweise über alle Grenzen wachsen müssen. Andererseits bleiben aber (auf Grund der Bedeutung von R als *obere Grenze*) für jedes $R' < R$ die Zahlen $|a_\nu R'^\nu|$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ unter einer endlichen Schranke, und somit *konvergiert* die Reihe für jedes x mit einem Absolutwerte $|x| < R'$. Dann *konvergiert* sie aber auch geradezu für jedes nur der Bedingung $|x| < R$ genügende x: denn, *wie wenig auch* $|x|$ *unterhalb* R angenommen werden möge, so gibt es doch stets (unendlich viele) Zahlen R' von der Beschaffenheit, daß $|x| < R' < R$, woraus dann nach dem zuvor gesagten unmittelbar die Richtigkeit der letzten Behauptung hervorgeht.

Geometrisch gesprochen *divergiert* also die Reihe für alle Stellen *außerhalb*, sie *konvergiert* für alle Stellen *innerhalb* eines Kreises mit dem Radius R um den Nullpunkt, den wir von jetzt ab als den Kreis $(0)R$ bezeichnen wollen. Er heißt der *Konvergenzkreis* der Reihe, sein Radius R

1) Dieses Ergebnis läßt sich übrigens einfacher mit Hilfe des *Cauchy*schen Fundamentalkriteriums *zweiter* Art (vgl. Nr 5 dieses Paragraphen) herleiten.

ihr *Konvergenzradius.* Bezüglich des Verhaltens der Reihe für die Stellen $|x| = R$, also für die Punkte *auf* dem Konvergenzkreise, gibt die ursprüngliche Definition von R (als obere Grenze der Zahlen $|x|$, für welche die Zahlen $|a_\nu x^\nu|$ unter einer endlichen Schranke bleiben) keinerlei Anhaltspunkt: in der Tat können, wie sich später noch zeigen wird, in diesem Falle alle möglichen Eventualitäten eintreten.

Die zwei zuvor betrachteten Fälle der *beständigen Konvergenz* und *Divergenz* lassen sich übrigens unter den letzterwähnten in der Weise subsumieren, daß man im Falle einer *beständig konvergierenden* Potenzreihe $R = +\infty$, im Falle einer *beständig divergierenden* $R = 0$ setzt. In der Tat *konvergiert* ja eine Reihe der ersten Art für $|x| < +\infty$, die andere *divergiert* für $|x| > 0$.

4. Es ist wichtig festzustellen, daß der *Konvergenzradius* R von $\sum a_\nu x^\nu$ sich stets mit Hilfe eines aus den a_ν gebildeten Grenzwertes darstellen läßt. Nach dem *Cauchy*schen Fundamentalkriterium *erster* Art (s. I_2, § 50, Nr. 4, S. 342/3) hat man für die Reihe $\sum |u_\nu|$:

$$\textit{Konvergenz}, \text{ wenn: } \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|u_\nu|} < 1,$$

$$\textit{Divergenz}, \text{ wenn: } \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|u_\nu|} > 1.$$

Daraus folgt zunächst unter der Voraussetzung eines *endlichen und von Null verschiedenen* $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$, daß die Reihe $\sum |a_\nu x^\nu|$

$$(5)\quad \begin{cases} \textit{konvergiert}, \text{ wenn: } \overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}\cdot|x| < 1, \quad \text{d. h. } |x| < \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}}, \\[2ex] \textit{divergiert}, \text{ wenn: } \overline{\lim\limits_{\lambda\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}\cdot|x| > 1, \quad \text{d. h. } |x| > \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}}. \end{cases}$$

Setzt man also:

$$(6)\qquad R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}} = \underline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{\left|\frac{1}{a_\nu}\right|},$$

so ist die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ *absolut konvergent* für $|x| < R$, *absolut divergent* für $|x| > R$, also, wie aus Nr. 2 hervorgeht, auch *schlechthin divergent* für $|x| > R$. Somit stellt die durch die Beziehung (6) definierte Zahl den *Konvergenzradius* der Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ dar. Dabei steht es selbstverständlich frei, den in Gl. (6) auftretenden *oberen* bzw. *unteren Limes* durch den *Limes* schlechthin zu ersetzen, falls ein solcher *existiert.* Man hat also in diesem Falle:

$$(6\text{a})\qquad R = \frac{1}{\lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}} = \lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\left|\frac{1}{a_\nu}\right|}.$$

Ist $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = +\infty$, und *nur* wenn dies der Fall ist, so wird die Konvergenzbedingung (5) durch kein von Null verschiedenes $|x|$ befriedigt, die Reihe ist dann also *beständig divergent.*

Ist dagegen $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 0$, d. h. schließlich: $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 0$, und *nur* wenn dies der Fall ist, so wird die Konvergenzbedingung (5) durch *jedes* (noch so große) $|x|$ befriedigt, so daß also die Reihe *beständig konvergiert.*[1])

Da im ersten der eben betrachteten Fälle: $\underline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{\left|\frac{1}{a_\nu}\right|} = 0$, im *zweiten:* $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\left|\frac{1}{a_\nu}\right|} = \infty$, so ergibt sich noch, daß der *zweite* in Gl. (6) bzw. (6a) für R angegebene Ausdruck auch für diese beiden Fälle gültig bleibt.

5. Geht man von dem *Cauchy*schen Fundamentalkriterium *zweiter* Art aus (s. I_2, § 54, Nr. 6, S. 385), so folgt zunächst, daß die Reihe $\sum |a_\nu x^\nu|$

$$(7)\qquad \begin{cases} \textit{konvergiert,} \text{ wenn: } \overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \left|\dfrac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| \cdot |x| < 1, \text{ bzw. } \lim\limits_{\nu\to\infty} \left|\dfrac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| \cdot |x| < 1, \\ \textit{divergiert,} \text{ wenn: } \underline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \left|\dfrac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| \cdot |x| > 1, \text{ bzw. } \lim\limits_{\nu\to\infty} \left|\dfrac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| \cdot |x| > 1. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich nur soviel, daß:

$$(8)\qquad R = \lim_{\nu\to\infty} \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|$$

gesetzt werden kann, *wenn dieser Grenzwert existiert* (wobei die Fälle $\lim\limits_{\nu\to\infty} \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| = 0$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| = \infty$ in analoger Weise mit einzuschließen sind, wie die entsprechenden in Nr. 4). Andernfalls kann man nur schließen, daß die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$

$$(9)\qquad \begin{cases} \textit{konvergiert,} \text{ wenn: } |x| < \underline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \left|\dfrac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|, \\ \textit{divergiert,} \text{ wenn: } |x| > \overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \left|\dfrac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|, \end{cases}$$

während das Verhalten der Reihe für solche x, welche dem Bereiche (dem „Kreisringe"):

$$(10)\qquad \underline{\lim_{\nu\to\infty}} \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| \leqq |x| \leqq \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|$$

---

1) Es gilt also der Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die **beständige** *Konvergenz der Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ besteht in der Beziehung*

$$\lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 0.$$

angehören, hieraus nicht beurteilt werden kann. Es besteht also hier ein *wesentlicher* Unterschied in der Wirksamkeit des Kriteriums *erster* und *zweiter* Art, insofern *nur* das *erstere* in *jedem* Falle (s Gl. (9)) den genauen Wert des Konvergenzradius liefert.

Beispiele.[1]) Die Reihen $\sum \nu x^\nu$, $\sum \frac{1}{\nu} x^\nu$, $\sum \frac{1}{\nu^2} x^\nu$ besitzen sämtlich den Konvergenzradius 1, wie aus jeder der beiden Formeln (6a) und (8) ermittelt werden kann

Setzt man dagegen $a_\nu = \left(1 + (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu}\right)^\nu$, so hat man (s. I_1, § 33, Nr. 3, S. 202): $\lim\limits_{\mu \to \infty} a_{2\mu} = e$, dagegen $\lim\limits_{\mu \to \infty} a_{2\mu+1} = e^{-1}$ und daher:

$$\underline{\lim}_{\nu \to \infty} \left| \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \right| = \frac{1}{e^2}, \quad \overline{\lim}_{\nu \to \infty} \left| \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \right| = e^2,$$

woraus nur geschlossen werden kann, daß die Reihe für $|x| < \frac{1}{e^2}$ *konvergiert*, für $|x| > e^2$ divergiert. Andererseits findet man aber:

$$\lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \lim_{\nu \to \infty} \left(1 + (-1)^\nu \frac{1}{\nu}\right) = 1,$$

so daß sich auf *diesem* Wege unzweideutig $R = 1$ ergibt

Ferner: Für $a_\nu = \nu^{(-1)^\nu}$ wird

$$a_{2\mu} = 2\mu, \quad a_{2\mu+1} = \frac{1}{2\mu + 1}$$

und daher:

$$\underline{\lim}_{\nu \to \infty} \left| \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \right| = 0, \quad \overline{\lim}_{\nu \to \infty} \left| \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \right| = \infty,$$

so daß hieraus *gar kein* Schluß auf die Konvergenz oder Divergenz der Reihe:

$$\sum_0^\infty \nu^{(-1)^\nu} \cdot x^\nu = \frac{x}{1} + 2x^2 + \frac{x^3}{3} + 4x^4 + \cdots$$

gezogen werden kann. Dies gelingt dagegen mit Hilfe des Kriteriums (9) Man hat nämlich (I_1, § 37, S. 230, Fußn.):

$$(9) \qquad \lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 1$$

und somit nach Gl. (6): $R = 1$

Schließlich werde noch gesetzt: $a_\nu = \frac{1}{(2 + (-1)^\nu)^\nu}$, also: $a_{2\mu} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2\mu}$, $a_{2\mu+1} = 1$ und daher:

$$\sqrt[\nu]{|a_\nu|} \begin{cases} = \frac{1}{3}, \text{ wenn } \nu \text{ gerade}, \\ = 1, \text{ wenn } \nu \text{ ungerade}, \end{cases}$$

also:

$$\underline{\lim}_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \frac{1}{3}, \quad \overline{\lim}_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 1.$$

---

1) Vgl. I_1, § 37, Nr 3, S. 230, Fußn. 1 und I_2, § 56, Nr. 4, S. 395/6.

Obschon hier $\lim\limits_{\nu\to\infty}\sqrt[\nu]{|a_\nu|}$ (und *a fortiori*[1]) $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right|$) *nicht existiert*, liefert hier Gl. (6) unzweideutig das Resultat $R = 1$, dessen Richtigkeit sich übrigens auch leicht verifizieren läßt, wenn man die fragliche Reihe, nämlich

$$\sum_0^\infty a_\nu x^\nu = \sum_0^\infty \left(\frac{x}{2+(-1)^\nu}\right)^\nu$$
$$= 1 + x + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + x^3 + \left(\frac{x}{3}\right)^4 + x^5 + \cdots$$

in die beiden Teilreihen zerlegt:

$$1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^4 + \cdots \quad \text{und:} \quad x + x^3 + x^5 + \cdots,$$

deren *erste* dann zwar den Konvergenzradius $R = 3$ besitzt, während für die *zweite* $R = 1$ ausfällt und somit auch die Summe dieser beiden Reihen nur für $|x| < 1$ *konvergiert*.

§ 31. Über Konvergenz und Divergenz von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise, insbesondere über bedingte Konvergenz.

1. Fragt man nach dem Verhalten von Potenzreihen für die Stellen des Konvergenzkreises, so lehrt schon das Beispiel der oben erwähnten Reihen $\sum \nu x^\nu$, $\sum \frac{1}{\nu^2} x^\nu$, daß sowohl *Divergenz* als auch *absolute Konvergenz* für *alle Stellen* des Konvergenzkreises $|x| = 1$ möglich ist, während andererseits die gleichfalls oben erwähnte Reihe $\sum \frac{1}{\nu} x^\nu$ für die auf dem Konvergenzkreise gelegenen Stellen $x = 1$ und $x = -1$ ein verschiedenartiges Verhalten zeigt, nämlich für $x = +1$ *divergiert* und für $x = -1$ (übrigens, wie sich weiter unten zeigen wird, auch für alle übrigen Stellen mit dem Absolutwerte 1) *bedingt konvergiert*.

Bei der genauen Prüfung der in diesem Zusammenhange auftretenden Möglichkeiten dürfen wir ohne merkliche Beeinträchtigung der Allgemeinheit dem Konvergenzradius der zu betrachtenden Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ den Wert 1 beilegen, also $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 1$ annehmen. Hätte man nämlich eine Reihe $\sum b_\nu z^\nu$ mit beliebigem von 1 verschiedenem Konvergenzradius R, so geht dieselbe durch die Substitution $z = Rx$ in eine Reihe von der

[1] Wie in I_2, § 56, Nr. 4 (S. 394) gezeigt wurde, zieht die Existenz (im weiteren Sinne) von $\lim\limits_{\nu\to 0}\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right|$ immer diejenige von $\lim\limits_{\nu\to\infty}\sqrt[\nu]{|a_\nu|}$ und die Beziehung:

$$\lim_{\nu\to\infty}\sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right|$$

nach sich, aber *nicht umgekehrt*.

Form $\sum(b_\nu R^\nu)x^\nu$ mit dem Konvergenzradius $|x| = 1$ über, so daß also das Verhalten der Reihe $\sum b_\nu z^\nu$ auf dem Konvergenzkreise $|z| = R$ nach demjenigen der Reihe $\sum(b_\nu R^\nu)x^\nu$ auf dem Konvergenzkreise $|x| = 1$ beurteilt werden kann.

Die *notwendige und hinreichende* Bedingung für die *absolute* (also *unbedingte*) *Konvergenz* der Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für irgend*eine einzelne Stelle* auf dem Konvergenzkreise $|x| = 1$ besteht dann offenbar in der Konvergenz der Reihe $\sum |a_\nu|$. Ist aber diese Bedingung erfüllt, so *konvergiert* $\sum a_\nu x^\nu$ auch *absolut* für *alle* Stellen des Konvergenzkreises. Mit anderen Worten: *Divergiert* $\sum a_\nu x^\nu$ auch nur für *eine einzige* Stelle des Konvergenzkreises, so kann sie für irgendwelche anderen Stellen desselben *keinesfalls absolut*, also höchstens noch *bedingt* konvergieren.

Zur Entscheidung über die Konvergenz oder Divergenz der Reihe $\sum |a_\nu|$ müssen, da infolge der Voraussetzung $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 1$ (wobei auch geradezu $\lim\limits_{\nu\to\infty}\sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 1$ bzw. $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = 1$ sein kann) die Cauchyschen Fundamentalkriterien versagen, je nach Bedarf schärfere Kriterien herangezogen werden[1]), wie sie in I_2, § 50, 54 und I_3, § 76 ausführlich entwickelt worden sind. Sind z. B. die a_ν so beschaffen, daß:

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{\varkappa + \lambda i}{\nu} + \frac{r_\nu}{\nu^2}, \tag{1}$$

wo $\varkappa$, λ von ν unabhängig sind und $|r_\nu|$ unter einer endlichen Schranke[2]) bleibt $\left(\text{also: } \lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1\right)$, so folgt aus I_3, § 76, Nr. 5 (S. 590), daß $\sum |a_\nu|$ *konvergiert* für $\varkappa > 1$, dagegen *divergiert* für $\varkappa \leqq 1$. Somit ist unter der Voraussetzung (1) die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ *nur* im Falle $\varkappa > 1$ auf ihrem Konvergenzkreise $|x| = 1$ *absolut konvergent.* Dies trifft insbesondere zu (wie a. a. O. S. 591 gezeigt wird) für die *hypergeometrische Reihe* $\sum \frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}{1\cdot 2\ldots \nu}\,\frac{b(b+1)\ldots(b+\nu-1)}{c(c+1)\ldots(c+\nu-1)}\cdot x^\nu$, falls $\Re(c-a-b) > 0$.

2. Ist $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 1$ und $\sum |a_\nu|$ *divergent*, so divergiert die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ sicher für *alle* Stellen des Konvergenzkreises $|x| = 1$, falls $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}|a_\nu| > 0$ ist.[3]) Hat man dagegen: $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$, so ist noch *bedingte*

---

1) Abgesehen von dem Falle $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}|a_\nu| > 0$, in welchem die *Divergenz* ohne weiteres ersichtlich ist.

2) Es würde sogar, wie a. a. O. gezeigt wird, schon genügen, wenn: $|r_\nu| < \frac{\nu}{\lg \nu}$.

3) Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn die a_ν der Bedingung (1) genügen und $\varkappa \leqq 0$ ist (s. I_3, § 87, Nr. 4 — insbesondere S 662 unter 1) und 3)). Für die hypergeometrische Reihe lautet die entsprechende Bedingung: $\Re(c-a-b) \leqq -1$.

Konvergenz möglich. Insbesondere läßt sich der in I_3, § 77, Nr. 2 (S. 594) bewiesene Satz jetzt folgendermaßen aussprechen:

Ist $\sum a_\nu$ *divergent und* $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$, *so besitzt die Reihe* $\sum a_\nu x^\nu$ *den Konvergenzradius* $|x| = 1$. *Ist sodann* $\sum |a_\nu - a_{\nu-1}|$ *konvergent, so konvergiert* $\sum a_\nu x^\nu$ *noch* **bedingt** *für alle Stellen des Konvergenzkreises mit Ausschluß von* $x = 1$.

Hiernach konvergiert z. B. die Reihe $\sum_1^\infty \frac{x^\nu}{\nu}$ (ebenso jede Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ mit *positiven*, *monoton* der Null zustrebenden a_ν bei gleichzeitiger Divergenz von $\sum |a_\nu|$) abgesehen von der (Divergenz-)Stelle $x = 1$ noch *bedingt* für alle übrigen Stellen des Konvergenzkreises $|x| = 1$.

Genügen die a_ν wiederum der Bedingung (1) und ist $0 < \varkappa \leqq 1$, so *divergiert* zwar, wie bereits oben bemerkt wurde, die Reihe $\sum |a_\nu|$. Dagegen *konvergiert*, wie in I_3, § 87, Nr. 5 (S. 663) gezeigt wurde, die Reihe $\sum |a_\nu - a_{\nu-1}|$, und somit ist $\sum a_\nu x^\nu$ auf dem ganzen Konvergenzkreise $|x| = 1$ mit einzigem Ausschluß der Stelle $x = 1$[1]) noch *bedingt konvergent*.

Für die *hypergeometrische* Reihe nimmt die Bedingung $0 < \varkappa \leqq 1$ (s. a. a. O. S. 667) die Form an: $-1 < \Re(c - a - b) \leqq 0$. Sie ist also unter dieser Voraussetzung für alle Stellen des Kreises $|x| = 1$ mit Ausnahme von $x = 1$ noch *bedingt konvergent*. Setzt man insbesondere: $b = c$, $a = -m$ (also: $c - a - b = m$) und ersetzt x durch $-x$, so entsteht als Spezialform der hypergeometrischen die „*binomische*" Reihe $\sum \frac{m(m-1)\,.\,.\,(m-\nu+1)}{1\cdot 2\,.\,.\,\nu}\cdot x^\nu$. Dieselbe besitzt (wenn nicht gerade m eine natürliche Zahl, in welchem Falle die Reihe mit der Potenz x^m abbricht) wieder den Konvergenzradius $|x| = 1$ und ist (nach dem in Nr. 1 über die hypergeometrische Reihe Gesagten) auf dem ganzen Kreise $|x| = 1$ noch *absolut konvergent*, wenn $\Re(m) > 0$; dagegen mit Ausschluß der Stelle $x = -1$ *bedingt konvergent*, wenn $-1 < \Re(m) \leqq 0$. Im Falle $\Re(m) \leqq -1$ *divergiert* sie für $|x| = 1$ ausnahmslos.[2])

3. Die auf Grund des Satzes von Nr. 2 als Beispiele für die *bedingte* Konvergenz auf dem Konvergenzkreise angeführten Reihen $\sum a_\nu x^\nu$ haben die gemeinsame Eigenschaft, an *einer* Stelle des Kreises zu *divergieren*, nämlich an der Stelle $x = 1$, für welche jener Satz keine definitive Aussage über das Verhalten der Reihe enthält. Und man darf geradezu sagen, daß alle bekannteren Reihen, die auf dem Konvergenzkreise nur *bedingt*

---

1) Daß die für $x = 1$ zum Vorschein kommende Reihe $\sum a_\nu$ (*nicht nur* die Reihe $\sum |a|$) wirklich *divergiert*, wurde a. a. O. ausdrücklich bewiesen.

2) Vgl. die Fußnote 1

konvergieren, daselbst stets an einer oder mehreren[1]) Stellen *divergieren*. Man könnte hiernach vermuten, daß überhaupt *jede* Potenzreihe, die auf dem Konvergenzkreise *nicht absolut* konvergiert, daselbst *mindestens eine* Divergenzstelle besitzen müsse. Es gibt indessen auch Potenzeihen sehr einfacher Art, welche auf dem Konvergenzkreise *ausnahmslos* und dennoch nur *bedingt* konvergieren, wie das folgende Beispiel lehren soll.

Man setze:

$$a_\nu = \frac{(-1)^{[\sqrt{\nu}]}}{\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \tag{8}$$

wo wiederum $[\sqrt{\nu}]$ *die größte in* $\sqrt{\nu}$ *enthaltene ganze Zahl* bedeutet. Nimmt dann ν diejenigen Zahlenwerte an, welche charakterisiert sind durch eine Bedingung von der Form:

$$\lambda^2 \leqq \nu < (\lambda + 1)^2 \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots), \tag{9}$$

so wird

$$\lambda \leqq \sqrt{\nu} < \lambda + 1,$$

also

$$[\sqrt{\nu}] = \lambda, \tag{10}$$

d. h. durchläuft der Index ν die Reihe der Zahlen $\lambda^2, \lambda^2 + 1, \ldots, \lambda^2 + 2\lambda$, so hat $[\sqrt{\nu}]$ den konstanten Wert λ, so daß also die entsprechenden Glieder a_ν sämtlich das Vorzeichen von $(-1)^\lambda$ haben. Setzt man also:

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2 + 1} + \cdots + \frac{1}{\lambda^2 + 2\lambda}, \tag{11}$$

so hat man:

$$\sum_1^\infty {}^\nu a_\nu = \sum_1^\infty {}^\lambda (-1)^\lambda \cdot A_\lambda \tag{12}$$

$$= -\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{15}\right) + \cdots$$

Um die Konvergenz dieser Reihe nachzuweisen, hat man nur zu zeigen, daß die A_λ mit wachsendem λ *monoton*, und zwar schließlich gegen *Null* abnehmen. Man hat nun:

$$A_\lambda = \sum_0^{2\lambda} {}^\nu \frac{1}{\lambda^2 + \nu}$$

also:

$$A_{\lambda+1} = \sum_0^{2\lambda+2} {}^\nu \frac{1}{(\lambda+1)^2 + \nu}$$

$$= \sum_0^{2\lambda} {}^\nu \frac{1}{(\lambda+1)^2 + \nu} + \frac{1}{(\lambda+1)^2 + 2\lambda + 1} + \frac{1}{(\lambda+1)^2 + 2\lambda + 2}$$

---

1) Will man z. B. aus einer Reihe der in Nr. 2 betrachteten Art eine solche bilden, die für m Stellen des Einheitskreises *divergiert*, so hat man nur x durch x^m zu ersetzen: die betreffende Reihe *divergiert* dann für die m Stellen x, welche den Wurzeln der Gleichung $x^m = 1$ entsprechen.

und da jeder der beiden letzten Brüche kleiner ist als jedes der $2\lambda + 1$ Glieder der vorangehenden Summe und daher:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{1}{(\lambda+1)^2+2\lambda+1}\\[2ex] \dfrac{1}{(\lambda+1)^2+2\lambda+2}\end{array}\right\} < \frac{1}{2\lambda+1}\sum_0^{2\lambda}{}_{\nu}\frac{1}{(\lambda+1)^2+\nu},$$

so wird:

$$A_{\lambda+1} < \frac{2\lambda+3}{2\lambda+1}\cdot\sum_0^{2\lambda}{}_{\nu}\frac{1}{(\lambda+1)^2+\nu},$$

folglich:

$$A_\lambda - A_{\lambda+1} > \sum_0^{2\lambda}{}_{\nu}\left\{\frac{1}{\lambda^2+\nu} - \frac{2\lambda+3}{2\lambda+1}\cdot\frac{1}{(\lambda+1)^2+\nu}\right\}$$

$$> \sum_0^{2\lambda}{}_{\nu}\frac{2\lambda^2+4\lambda+1-2\nu}{(2\lambda+1)(\lambda^2+\nu)((\lambda+1)^2+\nu)}$$

$$> 0$$

(da ja $2\nu \leqq 4\lambda$, also jeder Zähler wesentlich positiv ist) Da außerdem:

$$A_\lambda < \frac{2\lambda+1}{\lambda^2},$$

also:

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda = 0,$$

so folgt in der Tat, daß die Reihe $\sum a_\nu$ zunächst in der Form $\sum(-1)^\lambda\cdot A_\lambda$ *konvergiert*, übrigens aber, wie dann unmittelbar ersichtlich, auch *konvergent* bleibt, wenn man mit Weglassung der Klammern die einzelnen a_ν als Reihenglieder ansieht. Es *konvergiert* also die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ an der Stelle $x = 1$

Man hat nun ferner:

$$(13)\qquad \sum_1^\infty{}_{\nu}|a_\nu - a_{\nu+1}| = \sum_1^\infty{}'_{\nu}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right) + \sum_1^\infty{}_{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda^2+2\lambda}+\frac{1}{(\lambda+1)^2}\right),$$

wobei der Akzent bei dem *ersten* Summenzeichen der rechten Seite andeuten soll, daß alle Glieder von der Form $\left(\frac{1}{\lambda^2+2\lambda}-\frac{1}{(\lambda+1)^2}\right)$ ($\lambda = 1, 2, 3, \ldots$) wegzulassen sind: an ihre Stelle treten eben (wegen des Zeichenwechels beim Übergange von A_λ zu $A_{\lambda+1}$) die in der *zweiten* Summen vereinigten Glieder Setzt man diese letztere in die Form:

$$\sum_1^\infty{}_{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda^2+2\lambda}-\frac{1}{(\lambda+1)^2}\right) + 2\sum_1^\infty{}_{\lambda}\frac{1}{(\lambda+1)^2}$$

und fügt jene fehlenden Glieder noch zur *ersten* Summe hinzu, so nimmt Gl (13) die Form an:

$$(14)\qquad \sum_1^\infty{}_{\nu}|a_\nu - a_{\nu+1}| = \sum_1^\infty{}_{\nu}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right) + 2\sum_1^\infty{}_{\lambda}\frac{1}{(\lambda+1)^2}$$

Die Reihe der $|a_\nu - a_{\nu+1}|$ ist also *konvergent*, und somit *konvergiert* $\sum a_\nu x^\nu$ auch für alle von 1 verschiedenen Stellen mit dem absoluten Betrage $|x| = 1$. Sie *konvergiert* also auf dem Konvergenzkreise *ausnahmslos*, aber offenbar nur *bedingt*, da $\sum |a_\nu| = \sum \frac{1}{\nu}$ *divergiert*.

§ 32. Stetigkeit der Summe einer absolut konvergenten Potenzreihe. — Erhaltung der gleichmäßigen Konvergenz (und Stetigkeit) beim Übergange zu einer Konvergenzstelle auf dem Konvergenzkreise (*Abel*scher Satz und dessen Verallgemeinerung). — Verhalten beim Übergange zu einer Stelle eigentlicher Divergenz.

1. Konvergiert die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x) \equiv \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ *absolut* für $|x| = r$, so konvergiert sie nach § 30, Nr. 2, Fußn. 2 (S. 242) *gleichmäßig* für alle x mit dem absoluten Betrage $|x| \leq r$. Folglich ist $\mathfrak{P}(x)$ für den betreffenden Bereich, d. h. für den Kreis mit dem Radius r einschließlich der Peripherie eine *stetige* Funktion von x (dabei kommen für die Stellen auf der Begrenzung wieder nur die im Innern oder auf der Begrenzung gelegenen Stellen als „Umgebung" in Betracht).

Konvergiert die Reihe $\mathfrak{P}(x)$ *beständig*, so stellt sie also eine für *jeden endlichen* Wert von x *stetige* Funktion dar.

Besitzt $\mathfrak{P}(x)$ den Konvergenzradius R und konvergiert die Reihe noch *absolut* für $|x| = R$, so besteht offenbar die *Gleichmäßigkeit* der Konvergenz und somit die *Stetigkeit* von $\mathfrak{P}(x)$ für $|x| \leq R$.

Wenn aber $\mathfrak{P}(x)$ für irgendeine Stelle mit dem absoluten Betrage $|x| = R$ nur *bedingt* konvergiert, so ist die zum Beweise der *gleichmäßigen* Konvergenz in § 30, Nr. 1 benutzte Schlußweise für $|x| \leq R$ nicht mehr anwendbar, da sie wesentlich auf der Konvergenz von $\sum |a_\nu| \cdot R^\nu$ beruht. Hier gilt nun der folgende (in der Hauptsache von *Abel* herrührende Satz):

> *Konvergiert die Reihe $\mathfrak{P}(x) \equiv \sum a_\nu x^\nu$ für irgendeine Stelle X des Konvergenzkreises $(O)R$, so konvergiert sie gleichmäßig für alle auf dem Radius $\overline{OX}$ gelegenen Werte x (einschließlich $x = X$), und es wird daher $|\mathfrak{P}(X) - \mathfrak{P}(x)|$ mit $|X - x|$ beliebig klein (also: $\lim_{x \to X} \mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}(X)$, wenn die Veränderliche x auf dem Radius $\overline{OX}$ gegen den Wert X konvergiert).*

Beweis. Bedeutet, unter der vorläufigen Voraussetzung, daß $X \neq \pm R$ und $\neq \pm Ri$, x irgendeine Stelle auf dem Radius $\overline{OX}$ und setzt man:

$$x = \xi + \eta i, \quad X = A + Bi,$$

so hat man offenbar:

$$\frac{\xi}{A} = \frac{\eta}{B} = \frac{|x|}{|X|},$$

also:

$$\xi = \left|\frac{x}{X}\right| \cdot A, \quad \eta = \left|\frac{x}{X}\right| \cdot B$$

und daher:

$$\xi + \eta i = \left|\frac{x}{X}\right| (A + Bi)^{1)},$$

d. h.

$$\frac{x}{X} = \left|\frac{x}{X}\right|. \tag{1}$$

In den vorläufig ausgeschlossenen Fällen $x = \pm R$ oder $= \pm Ri$ ist die Richtigkeit von Gl. (1) ohne weiteres ersichtlich.

Da nun $\sum a_\nu X^\nu$ nach Voraussetzung konvergieren soll, so kann man zunächst zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ eine Zahl n so fixieren, daß für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$:

$$|\Re_n^{(n+\nu)}| \equiv |a_n X^n + \cdots + a_{n+\nu} X^{n+\nu}| < \varepsilon. \tag{2}$$

Andererseits ergibt sich mit Anwendung der Abelschen Transformation (I_2, § 59, Nr. 4, S. 416 und I_3, § 77, Nr. 1, S. 592):

$$\sum_n^{n+p} a_\nu x^\nu = \sum_n^{n+p} \left|\frac{x}{X}\right|^\nu \cdot a_\nu X^\nu$$

$$= \sum_n^{n+p-1} \left(\left|\frac{x}{X}\right|^\nu - \left|\frac{x}{X}\right|^{\nu+1}\right) \Re_n^{(\nu)} + \left|\frac{x}{X}\right|^{n+p} \cdot \Re_n^{(n+p)}$$

und daher:

$$\left|\sum_n^{n+p} a_\nu x^\nu\right| < \varepsilon \cdot \left\{\sum_n^{n+p-1} \left(\left|\frac{x}{X}\right|^\nu - \left|\frac{x}{X}\right|^{\nu+1}\right) + \left|\frac{x}{X}\right|^{n+p}\right\}, \quad \text{d. h.} \quad \left|\frac{x}{X}\right|^n \cdot \varepsilon,$$

also, da $\left|\frac{x}{X}\right|$ niemals die Einheit übersteigen kann, schließlich:

---

1) Diese Gleichung bleibt auch in den Fällen $A = 0$, $B = \pm R$ und $A = \pm R$, $B = 0$ gültig (s im Text die auf Gl (1) folgende Bemerkung). Die sämtlichen Stellen x auf dem Radius $\overline{OX}$ werden also dargestellt durch:

$$x = \vartheta \; X,$$

wenn ϑ alle *reellen* Zahlen von 0 bis 1 (einschließlich der Grenzen) bedeutet (vgl übrigens § 14, Nr. 4, S. 137). Danach läßt sich der oben ausgesprochene Satz auch so formulieren: Ist $\mathfrak{P}(X) = \sum_0^\infty a_\nu X^\nu$ *konvergent*, so konvergiert $\mathfrak{P}(\vartheta X)$ *gleichmäßig* für $0 \leq \vartheta \leq 1$ und man hat:

$$\lim_{\vartheta \to 1} \mathfrak{P}(\vartheta X) = \mathfrak{P}(X)$$

$$(3) \qquad \left|\sum_{n}^{n+p} a_\nu x^\nu\right| < \varepsilon \qquad (\text{für } p = 0, 1, 2, \ldots),$$

womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.[1])

2. Der vorstehende Satz ist ein spezieller Fall des folgenden:

Konvergiert die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für eine Stelle X auf dem Konvergenzkreise, so konvergiert sie gleichmäßig für alle Stellen x im Innern und auf der Begrenzung jedes Dreiecks, dessen einer Eckpunkt der Punkt X ist, während die beiden anderen innerhalb des Konvergenzkreises liegen.

Um den Beweis etwas zu vereinfachen, bemerke man, daß durch die Substitution

$$x = X\ x'$$

die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ übergeht in eine von der Form: $\sum a'_\nu x'^\nu$ (wo: $a'_\nu = a_\nu X^\nu$), während zugleich dem Werte $x = X$, wegen: $x' = \frac{x}{X}$, der Wert $x' = 1$ entspricht, so daß die neue Reihe den Konvergenzradius 1 besitzt und für $x' = 1$ noch konvergiert.

Infolge der zwischen x und x' bestehenden linearen Beziehung wird jedes von Punkten x erfüllte Dreieck mit dem Eckpunkte $x = X$ auf ein (übrigens gleichstimmig ähnliches) Dreieck mit dem Eckpunkte $x' = 1$ abgebildet — *vice versa* (vgl. § 16, Nr. 4, S. 153). Da außerdem jedem Werte x mit dem absoluten Betrage $|x| < |X|$ ein Wert x' mit dem absoluten Betrage $|x'| < 1$ entspricht und umgekehrt, so genügt es offenbar, den oben ausgesprochenen Satz in der folgenden Fassung zu beweisen:

Ist die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ mit dem Konvergenzradius 1 für $x = 1$ konvergent, so konvergiert sie gleichmäßig für alle Stellen x im Innern und auf der Begrenzung jedes Dreiecks, dessen einer Eckpunkt der Punkt 1 ist, während die beiden anderen innerhalb des Einheitskreises liegen.[2])

---

1) Als Folgerung aus dem Beweise dieses Satzes, bzw. aus Ungl. (2) und (3) ergibt sich noch:

Konvergiert die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ gleichmäßig für alle Stellen $|x| = R$, so gilt das gleiche für $|x| \leqq R$

Konvergiert $\sum a_\nu x^\nu$ gleichmäßig für alle Stellen $|x| = R$ eines Kreisbogens AB (einschließlich der Endpunkte A und B), so gilt das gleiche für alle Stellen des Sektors AOB.

(Man hat nur zu beachten, daß auf Grund der vorausgesetzten gleichmäßigen Konvergenz X in Ungl. (2) bei *festem n* jetzt *jede* Stelle auf dem Kreise $|x| = R$ bzw. dem Kreisbogen AB bedeuten kann.)

2) Konvergiert also $\sum a_\nu x^\nu$ gleichmäßig für alle Stellen $|x| = R$ eines Kreisbogens AB, so läßt sich das auf Grund der vorigen Fußnote zunächst den Sektor AOB umfassende Gebiet gleichmäßiger Konvergenz noch entsprechend vergrößern

3 Wir schicken dem Beweise dieses Satzes den folgenden, auch für anderweitige Betrachtungen über das Verhalten von Potenzreihen an der Konvergenzgrenze nützlichen *Hilfssatz* voraus:

Zieht man vom Punkte 1 aus zwei zur reellen Achse symmetrische, dem Einheitskreise angehörige Sehnen, deren Länge mit a bezeichnet werden möge, so besteht die Beziehung:

$$\frac{|1-x|}{1-|x|} < \frac{4}{a} \tag{4}$$

für alle von 1 verschiedenen Stellen im Innern und auf der Begrenzung desjenigen Bereiches $\mathfrak{B}$, welcher begrenzt wird von jenen beiden Sehnen und dem innerhalb des von ihnen gebildeten Winkels liegenden Bogen eines Kreises mit dem Mittelpunkt $\frac{1}{2}$ und Radius $\frac{1}{2}$.

Beweis. Man bemerke zunächst, daß der mit dem Radius $\frac{1}{2}$ um den Punkt $x = \frac{1}{2}$ beschriebene Kreis alle vom Punkte $x = 1$ aus gezogenen Sehnen halbiert. Wird sodann x vorläufig auf einer der beiden *begrenzenden* Sehnen von der Länge a angenommen, so hat man (s. die Figur):

$$|x|^2 = \overline{Ox}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{Ax}^2$$

$$= 1^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - |1-x|\right)^2$$

$$= 1 - a \cdot |1-x| + |1-x|^2,$$

also:

$$1 - |x|^2 = |1-x| \cdot (a - |1-x|)$$

$$\geqq |1-x| \cdot \frac{a}{2}$$

Fig 15

(wobei das Gleichheitszeichen nur für den einzigen Fall $|1-x| = \frac{a}{2}$ gilt, d. h. wenn x im *Mittelpunkt* der betreffenden Sehne liegt).

Daraus folgt weiter:

$$\frac{|1-x|}{1-|x|} \leqq \frac{2}{a}(1+|x|) < \frac{4}{a}.$$

Liegt jetzt x auf einer *anderen* vom Punkte 1 aus gezogenen, innerhalb des in Betracht kommenden Winkelraumes verlaufenden Sehne, deren Länge mit a' bezeichnet werden möge, so ist offenbar $a' > a$ und andererseits auf Grund des eben gewonnenen Resultates:

$$\frac{|1-x|}{1-|x|} < \frac{4}{a'}, \quad \text{also } a \textit{ fortiori} < \frac{4}{a},$$

womit der ausgesprochene Hilfssatz bewiesen ist.

4. Nunmehr beweisen wir den am Schlusse von Nr. 2 ausgesprochenen Satz folgendermaßen.

Infolge der vorausgesetzten Konvergenz von $\sum a_\nu$ läßt sich, wenn gesetzt wird:

$$\sum_n^{n+k} a_\nu = R_n^{(n+k)},$$

zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ eine Zahl n so fixieren, daß für $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left|R_n^{(n+k)}\right| \equiv \left|\sum_n^{n+k} a_\nu\right| < \varepsilon \tag{5}$$

Andererseits findet man wiederum mit Hilfe der *Abel*schen Transformation:

$$\sum_n^{n+k} a_\nu x^\nu = x^n \sum_0^k a_{n+\nu} x^\nu = x^n \left\{\sum_0^{k-1} R_n^{(n+\nu)}(x^\nu - x^{\nu+1}) + R_n^{(n+k)} x^k\right\}$$

$$= x^n \cdot (1-x) \left\{\sum_0^{k-1} R_n^{(n+\nu)} x^\nu + R_n^{(n+k)} \cdot \frac{x^k}{1-x}\right\}$$

und daher, mit Berücksichtigung von Ungl. (5):

$$\left|\sum_n^{n+k} a_\nu x^\nu\right| < \varepsilon \cdot |x|^n \cdot |1-x| \cdot \left\{\frac{1-|x|^k}{1-|x|} + \frac{|x|^k}{|1-x|}\right\}$$

Da aber unter der Voraussetzung $|x| < 1$:

$$|1-x| \geqq \left|1 - |x|\right| = 1 - |x|,$$

so kann man im Nenner des letzten Gliedes $|1-x|$ *a fortiori* durch $1 - |x|$ ersetzen und findet daher:

$$\left|\sum_n^{n+k} a_\nu x^\nu\right| < \varepsilon \cdot \frac{|1-x|}{1-|x|}. \tag{6}$$

Gehört jetzt x einem Bereiche an, wie er in dem zuvor bewiesenen Hilfssatz mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet wurde, so findet man mit Benutzung von Ungl. (4):

$$\left|\sum_n^{n+k} a_\nu x^\nu\right| < \varepsilon \cdot \frac{4}{a} \qquad \text{(mit Ausschluß von } x = 1\text{)}, \tag{7}$$

während für $x = 1$ diese Ungleichung auf Grund von Ungl. (5) ohnehin erfüllt ist. Es konvergiert somit die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ *gleichmäßig* im Innern und auf der Begrenzung jedes solchen Bereiches $\mathfrak{B}$. Da die Reihe überdies für jeden, einschließlich seiner Grenzen *innerhalb* des Einheitskreises gelegenen Bereich *gleichmäßig* konvergiert, so steht es ohne weiteres frei, durch Hinzufügung eines beliebigen, dem Innern des Einheitskreises an-

gehörigen Stückes zum Bereiche $\mathfrak{B}$ den Bereich gleichmäßiger Konvergenz entsprechend zu vergrößern, womit also die Richtigkeit des am Schlusse von Nr. 2 ausgesprochenen Satzes in dem dort behaupteten Umfange vollständig bewiesen ist.

5. Aus dem vorstehenden Satze und der in Nr. 2 erwiesenen Möglichkeit, denselben unmittelbar auf den Fall eines *beliebigen* Konvergenzradius R und einer *beliebigen* auf dem Kreise $|x| = R$ gelegenen Stelle X zu übertragen, ergibt sich bezüglich der *Stetigkeit* eine Potenzreihe für irgend eine Stelle des Konvergenzkreises das folgende Resultat:

Konvergiert die Reihe $\mathfrak{P}(x) \equiv \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu$ für irgend eine Stelle X ihres Konvergenzkreises, so ist $\mathfrak{P}(x)$ stetig für jeden Bereich, welcher aus der Umgebung von X durch irgend zwei von X ausgehende Sehnen ausgeschnitten wird.

Es wird also in diesem Falle $\lim_{x \to X} \mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}(X)$, wenn x auf einem beliebigen *Strahle* aus dem *Innern* des Konvergenzkreises der Stelle X zustrebt (oder auch auf einer beliebigen *Kurve*, die in der Nachbarschaft der Stelle X einen gewissen, übrigens beliebig großen Sehnenwinkel nicht überschreitet).

Dagegen darf *keineswegs* aus der Existenz eines *endlichen* $\lim_{x \to X} \mathfrak{P}(x)$ (selbst wenn dieser bei *ganz beliebigem* Grenzübergange aus dem Innern des Konvergenzkreises zustande kommen sollte) auf die *Konvergenz* der Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu X^\nu$ geschlossen werden. Dies zeigen schon Beispiele allereinfachster Art, wie die geometrische Progression $\sum_0^\infty x^\nu$. Diese besitzt ja für $|x| < 1$ die Summe $\frac{1}{1-x}$ und man findet daher, wenn X eine ganz beliebige Stelle auf dem Konvergenzkreise $|x| = 1$ mit einziger Ausnahme per Stelle 1 bedeutet:

$$\lim_{x \to X} \sum_0^\infty {}^\nu x^\nu = \frac{1}{1-X} \qquad \text{(also endlich und bestimmt).}$$

Nichts destoweniger konvergiert die Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu X^\nu$ (wegen $|X| = 1$, $\lim_{\nu \to \infty} |X^\nu| = 1$) für *keine einzige* Stelle X auf dem Konvergenzkreise

Gestattet hiernach die bloße Existenz eines *endlichen* $\lim_{\vartheta \to 1} \mathfrak{P}(\vartheta X)$ noch keinen Schluß auf die *Konvergenz* der Reihe $\mathfrak{P}(X)$, so läßt sich doch wenigstens zeigen, daß diese letztere in dem betreffenden Falle niemals *eigentlich* divergieren kann (vgl. I_3, § 75, Nr. 1, S. 575).

6. Um dies nachzuweisen, schicken wir zunächst den folgenden Satz voraus:

Ist $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ *für* $|x| < 1$ *konvergent,* $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \equiv \sum_0^\infty{}^\nu (\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ ***eigentlich** divergent, so ist bei reellen, positiv wachsenden Werten von* ϱ: $\lim_{\varrho \to 1} \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu = \infty$ (*d. h.* $\lim_{\varrho \to 1} \left|\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu\right| = +\infty$).

Beweis. Die Voraussetzung besagt, daß mindestens eine der beiden Reihen $\sum \alpha_\nu$, $\sum \beta_\nu$ *eigentlich*, d. h. nach $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert. Um irgendeine Festsetzung zu treffen, werde etwa angenommen, daß:

$$\sum_0^\infty{}^\nu \alpha_\nu = +\infty.$$

Setzt man sodann:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_\nu = A_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

so ergibt sich mit Hilfe der *Abel*schen Transformation für jedes beliebige m und $n > m$:

$$\sum_0^n{}^\nu \alpha_\nu \varrho^\nu = \sum_0^{m-1}{}^\nu A_\nu(\varrho^\nu - \varrho^{\nu+1}) + \sum_m^{n-1}{}^\nu A_\nu(\varrho^\nu - \varrho^{\nu+1}) + A_n \varrho^n. \tag{9}$$

Da $\lim_{\nu \to \infty} A_\nu = +\infty$, so werden alle A_ν, zum mindesten von einem bestimmten Index ν anfangend, *positiv* und bei hinlänglicher Vergrößerung von ν *beliebig groß*. Man kann aber ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die A_ν schon für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ durchweg *positiv* ausfallen, da man dies ja eventuell durch passende (die Gültigkeit des Satzes offenbar in keiner Weise beeinflussende) Abänderung des Anfangsgliedes α_0 stets erzielen könnte. Es besitzt alsdann die unendliche Zahlenfolge

$$A_\nu, A_{\nu+1}, A_{\nu+2}, \ldots$$

bei beliebiger Annahme von ν eine *positive* untere Grenze, die mit γ_ν bezeichnet werde, so daß also für jedes $\nu \geqq 0$ und $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$:

$$A_{\nu+\lambda} \geqq \gamma_\nu > 0. \tag{10}$$

Alsdann ergibt sich aus Gl. (9) für $0 < \varrho < 1$:

$$\begin{aligned} \sum_0^n{}^\nu \alpha_\nu \varrho^\nu &> \sum_0^{m-1}{}^\nu \gamma_0(\varrho^\nu - \varrho^{\nu+1}) + \sum_m^{n-1}{}^\nu \gamma_m(\varrho^\nu - \varrho^{\nu+1}) + \gamma_m \varrho^n \\ &= \gamma_0(1 - \varrho^m) + \gamma_m \varrho^m \\ &> \gamma_m \varrho^m. \qquad (11) \end{aligned}$$

Unterwirft man jetzt ϱ der Bedingung

$$\varrho \geqq \frac{m}{m+1},$$

so wird (s. I_1, § 33, S. 199, Ungl. [10]):

$$\varrho^m \geqq \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m} > \frac{1}{e} \quad \text{für } \textit{jedes} \text{ (noch so große) } m \tag{12}$$

und somit:

$$\sum_0^\infty \alpha_\nu \varrho^\nu > \sum_0^n \alpha_\nu \varrho^\nu > \frac{1}{e} \cdot \gamma_m. \tag{13}$$

Da gleichzeitig mit $\lim_{\nu \to \infty} A_\nu = +\infty$ auch $\lim_{\nu \to \infty} \gamma_\nu = +\infty$ wird, so kann man für m eine untere Schranke so fixieren, daß $\frac{1}{e} \cdot \gamma_m$ eine *beliebig groß* vorzuschreibende positive Zahl G übersteigt, so daß also nach Ungl. (13)

$$\sum_0^\infty \alpha_\nu \varrho^\nu > G \tag{14}$$

wird für $\varrho \geqq \frac{m}{m+1}$. Mithin ergibt sich:

$$\lim_{\varrho \to 1} \sum_0^\infty \alpha_\nu \varrho^\nu = +\infty \tag{15}$$

und schließlich, wegen: $\left|\sum_0^\infty (\alpha_\nu + \beta_\nu i)\varrho^\nu\right|^2 = \left|\sum_0^\infty \alpha_\nu \varrho^\nu\right|^2 + \left|\sum_0^\infty \beta_\nu \varrho^\nu\right|^2$,

also: $\left|\sum_0^\infty (\alpha_\nu + \beta_\nu i)\varrho^\nu\right| \geqq \left|\sum_0^\infty \alpha_\nu \varrho^\nu\right|$, wie behauptet:

$$\lim_{\varrho \to 1} \mathfrak{P}(\varrho) \equiv \lim_{\varrho \to 1} \sum_0^\infty (\alpha_\nu + \beta_\nu i) \cdot \varrho^\nu = \infty, \tag{16}$$

ohne daß über die β_ν eine weitere Voraussetzung gemacht zu werden braucht.

Ganz analog gestaltet sich der Beweis im Falle $\sum \alpha_\nu = -\infty$, bzw. $\sum \beta_\nu = \pm\infty$.

7. Ersetzt man in dem eben bewiesenen Satze a_ν durch $a_\nu X^\nu$, so folgt ohne weiteres:

Ist $\mathfrak{P}(x) \equiv \sum_0^\infty a_\nu x^\nu$ *konvergent für* $|x| < |X|$ *und* $\sum_0^\infty a_\nu X^\nu$ *eigentlich divergent, so wird:*

$$\lim_{\vartheta \to 1} \mathfrak{P}(\vartheta X) = \infty.$$

Hieraus ergibt sich aber in Verbindung mit dem *Abel*schen Satze von Nr. 1 auch sofort die Richtigkeit der am Schlusse von Nr. 5 ausgesprochenen Behauptung, nämlich:

Besitzt $\lim\limits_{\vartheta \to 1} \mathfrak{P}(\vartheta X)$ *für irgend eine Stelle* X *auf dem Konvergenzkreise einen endlichen Wert, so kann* $\mathfrak{P}(X)$ *nur konvergieren oder uneigentlich divergieren*

§ 33. Reihen $\mathfrak{P}(x - x_0)$ und $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ nach positiven Potenzen von $(x - x_0)$ und $\frac{1}{x}$. — Reihen $P(x)$, $P(x - x_0)$ nach positiven und negativen Potenzen von x und $(x - x_0)$.

1. Bedeutet x_0 eine beliebige Konstante, so läßt sich der Konvergenzbereich einer Potenzreihe von der Form: $\mathfrak{P}(x - x_0) = \sum\limits_0^\infty{}^\nu a_\nu (x - x_0)^\nu$ mit Hilfe der Substitution: $x - x_0 = y$ ohne weiteres aus demjenigen der Reihe $\mathfrak{P}(y)$ bestimmen. Er wird also, falls die Reihe überhaupt für irgendeine von x_0 verschiedene Stelle x konvergiert, *entweder* definiert durch eine Bedingung von der Form $|x - x_0| < R$, d. h. er wird dargestellt durch einen Kreis um den Punkt x_0 mit dem Radius R; *oder* die Reihe konvergiert für jeden noch so großen endlichen Wert von $(x - x_0)$, also *beständig*. Im übrigen besitzt dann die Reihe $\mathfrak{P}(x - x_0)$ im Innern und auf der Grenze ihres Konvergenzbereiches offenbar genau dieselben Konvergenz- und Stetigkeitseigenschaften wie eine Reihe von der Form $\mathfrak{P}(x)$.

In analoger Weise wird sich auch das Verhalten einer Reihe von der Form: $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \sum\limits_0^\infty{}^\nu a_\nu x^{-\nu}$ vermöge der Substitution: $\frac{1}{x} = y$ aus demjenigen der Reihe $\mathfrak{P}(y)$ beurteilen lassen. Konvergiert die letztere für $|y| < R$, so wird die erstere für $\left|\frac{1}{x}\right| < R$, d. h. für $|x| > \frac{1}{R} = R_0$ konvergieren, also für alle Stellen, die *außerhalb* eines mit dem Radius R_0 um den Nullpunkt beschriebenen Kreises liegen. Darf R größer als jede noch so große positive Zahl genommen werden, so sinkt R_0 *unter jede noch so kleine* positive Zahl herab und die Reihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ konvergiert in diesem Falle für *jedes* x mit einzigem Ausschluß der Stelle $x = 0$. Ist R der Konvergenzradius von $\mathfrak{P}(y)$, so ist auch $R_0 = \frac{1}{R}$ derjenige von $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$, d. h. die Konvergenzgrenze für $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ ist wiederum ein *Kreis*, jedoch mit dem Unterschiede, daß $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ *außerhalb* dieses „*Konvergenzkreises*" *kon-*

vergiert, dagegen *im Innern divergiert.* Oder anders ausgesprochen: Die *Stelle* $x = \infty$, für welche sich $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ auf das Anfangsglied a_0 reduziert, gehört allemal zum *Konvergenzbereiche*, die Stelle $x = 0$ zum *Divergenzbereiche* einer solchen Reihe. Man pflegt dies auch so auszudrücken: Eine Reihe von der Form $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ konvergiert, wenn überhaupt, für eine *gewisse Umgebung der Stelle* $x = \infty$.

Im übrigen lehrt die Beziehung: $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathfrak{P}(y)$, daß die Reihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ im Innern und auf der Grenze ihres Konvergenzbereiches die entsprechenden Eigenschaften besitzen wird, wie $\mathfrak{P}(y)$. Sie konvergiert also *absolut* für $|x| > R_0$ und *gleichmäßig* für $|x| \geqq R_0'$, falls $R_0' > R_0$ angenommen wird; während auf der Konvergenzgrenze, also für $|x| = R_0$, die nämlichen verschiedenen Eventualitäten eintreten können, wie bei der Reihe $\mathfrak{P}(y)$ für $|y| = \frac{1}{R_0}$. Zerlegt man also $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ in: $\mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{x}\right) + \mathfrak{R}_n\left(\frac{1}{x}\right)$ $\left(\text{wo: } \mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_0^{n-1} {}^{\nu}\, a_\nu x^{-\nu}\right)$, so kann man für den *gesamten* Bereich gleichmäßiger Konvergenz durch Wahl einer passenden Zahl n $\left|\mathfrak{R}_n\left(\frac{1}{x}\right)\right| < \varepsilon$ machen; und da die *rationale* Funktion $\mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{x}\right)$ für diesen ganzen Bereich eine *stetige* Funktion von x ist[1]), so folgt, daß auch $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ im Innern des Konvergenzbereiches und eventuell auch bei passendem Übergange zur Konvergenzgrenze eine *stetige* Funktion von x darstellt.

Das analoge gilt offenbar auch für eine Reihe von der Form $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x - x_0}\right)$, mit der einzigen Modifikation, daß die Stelle $x = x_0$ hier diejenige Rolle spielt wie die Stelle $x = 0$ für $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. Wir betrachten schließlich noch solche Reihen, welche sowohl *positive* als *negative* Potenzen von x bzw. $(x - x_0)$ in unbegrenzter Anzahl enthalten. Eine solche Reihe soll generell stets durch das Symbol $P(x)$ bezeichnet werden, so daß also:

$$P(x) = \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right) + \mathfrak{P}(x), \tag{1}$$

wo etwa:

$$\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_1^{\infty} {}^{\nu}\, a_\nu' \cdot x^{-\nu}, \qquad \mathfrak{P}(x) = \sum_0^{\infty} {}^{\nu}\, a_\nu x^\nu. \tag{2}$$

---

1) Die einzige Unstetigkeitsstelle von $\mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{x}\right)$, nämlich $x = 0$, gehört ja niemals dem Konvergenzbereich von $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ an.

Setzt man sodann: $a'_\nu = a_{-\nu}$, so pflegt man statt:

$$P(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_{-\nu} x^{-\nu} + \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \sum_{-1}^{-\infty}{}^\nu a_\nu x^\nu + \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$$

kürzer zu schreiben:

$$P(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^\nu a_\nu x^\nu.\text{[1]} \tag{3}$$

Für die *Konvergenz* von $P(x)$ ist alsdann notwendig und hinreichend, daß *jede* der beiden Reihen $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)$ und $\mathfrak{P}(x)$ *konvergiert.*[2]) Bedeutet dann R_0 bzw. R den *Konvergenzradius* von $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)$ bzw. $\mathfrak{P}(x)$, so daß also $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)$ für $|x| > R_0$, $\mathfrak{P}(x)$ für $|x| < R$ *absolut* konvergiert, dagegen $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)$ für $|x| < R_0$, $\mathfrak{P}(x)$ für $|x| > R$ *divergiert*, so existiert offenbar für $P(x)$ überhaupt *kein* Konvergenzbereich, falls $R_0 > R$. Ist $R_0 = R$, so besteht der Konvergenzbereich von $P(x)$ eventuell aus denjenigen Stellen der Kreis*linie* $|x| = R_0 = R$, für welche $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)$ und $\mathfrak{P}(x)$ gleichzeitig konvergieren (unter Umständen also aus dieser ganzen Kreislinie). Ist endlich $R_0 < R$, so *konvergiert* offenbar $P(x)$ *absolut* für $R_0 < |x| < R$, d. h. im Innern eines *Kreisringes*, welcher von zwei um den Nullpunkt mit den Radien R_0 und R beschriebenen Kreisen begrenzt wird; und sie konvergiert *gleichmäßig* für $R'_0 \leqq |x| \leqq R'$, wo: $R_0 < R'_0 < R' < R$. Dabei kann möglicherweise auch $R_0 = 0$, $R = \infty$ sein, jedoch gehört dann die Grenzstelle $x = 0$ bzw $x = \infty$ niemals dem Konvergenzbereiche von $P(x)$ an, außer wenn $P(x)$ sich auf eine Reihe von der Form $\mathfrak{P}(x)$ bzw. $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ reduziert. Sieht man von den Spezialfällen $R_0 = 0$ bzw. $R = \infty$ ab, so kann $P(x)$ offenbar auch noch für $|x| = R_0$ und $|x| = R$ durchweg oder teilweise *konvergieren*

Aus dem über Reihen von der Form $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ Gesagten folgt dann wiederum ohne weiteres, daß die Reihe $P(x)$ im Innern ihres Konvergenzbereiches und eventuell auch beim Übergange zur Konvergenzgrenze eine *stetige* Funktion von x darstellt.

1) Da beliebig viele Koeffizienten den Wert *Null* haben können, so kann in irgendwelchem besonderen Zusammenhange auch der Fall eintreten, daß dies für *alle* a_ν mit *negativem* oder *alle* mit *positivem* Index zutrifft, so daß alsdann $P(x)$ eine Reihe von der Form $\mathfrak{P}(x)$ bzw. $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ vorstellen würde (worin kein Widerspruch liegt, da $P(x)$ als Zeichen für den *allgemeineren* Begriff auch den *spezielleren* umfaßt).

2) Vgl. I_2, § 44, Nr. 7, S. 303/4.

Auch lassen sich die vorstehenden Betrachtungen wieder unmittelbar auf Reihen von der Form $\sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{\nu} a_\nu (x - x_0)^\nu$ übertragen, wobei dann die Stelle $x = x_0$ die Rolle des Mittelpunktes übernimmt.

§ 34. Über die Wurzeln der Gleichung $x^{2^n} = 1$ und ihren Zusammenhang für $n \to \infty$ mit der Maßzahl für die Länge des Einheitskreises.

1. Bei den bisherigen Betrachtungen über Potenzreihen wurden die *Koeffizienten* a_ν als *gegebene* Zahlen angesehen und aus ihrer Beschaffenheit gewisse Schlüsse auf die Existenz und die Eigenschaften der Summe $\mathfrak{P}(x) = \sum_0^\infty {}^{\nu} a_\nu x^\nu$ bzw. $P(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{\nu} a_\nu x^\nu$ gezogen. Wir wollen nun umgekehrt untersuchen, inwieweit die *Koeffizienten* a_ν durch die *Summenwerte* $\mathfrak{P}(x)$ bzw. $P(x)$ *bestimmt* bzw *darstellbar* sind. Es wird sich zeigen, daß dies in der Tat der Fall ist, sobald $P(x)$ für alle Stellen einer um den Nullpunkt beschriebenen, dem Bereiche gleichmäßiger Konvergenz angehörigen Kreislinie als bekannt angesehen wird. Um aber dieses für die späteren Untersuchungen fundamentale Resultat erweisen zu können, bedürfen wir gewisser Kenntnisse über die Wurzeln der Gleichung $x^{2^n} = 1$, welche zunächst hergeleitet werden sollen. Dabei machen wir absichtlich keinen Gebrauch von dem früher erwiesenen Satze über die Wurzelexistenz einer jeden algebraischen Gleichung, da die zu gewinnenden Resultate späterhin auch dazu dienen sollen, einen *neuen* Beweis für diese Wurzelexistenz zu liefern.

2. Wie in I_3, § 70, Nr. 4 (S. 537/9) gezeigt wurde, hat die Gleichung:

$$x^2 = \alpha + \beta i \qquad (\text{wo: } \beta \neq 0) \tag{1}$$

stets *zwei* und *nur* zwei Wurzeln:

$$x_1 = \xi_1 + \eta_1 i, \quad x_2 = \xi_2 + \eta_2 i, \tag{2}$$

wo:

$$\begin{cases} \xi_1 = +\sqrt{\tfrac{1}{2}|\alpha + \beta i| + \tfrac{1}{2}\alpha}, & \xi_2 = -\sqrt{\tfrac{1}{2}|\alpha + \beta i| + \tfrac{1}{2}\alpha}, \\ \eta_1 = \dfrac{\beta}{|\beta|} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}|\alpha + \beta i| - \tfrac{1}{2}\alpha}, & \eta_2 = -\dfrac{\beta}{|\beta|} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}|\alpha + \beta i| - \tfrac{1}{2}\alpha}, \end{cases} \tag{3}$$

und sämtliche Quadratwurzeln als *positive* Zahlen zu verstehen sind. Ist nun insbesondere $\beta > 0$, so wird, ohne daß $\alpha + \beta i$ irgendwelcher anderen Beschränkung unterliegt, *eine* Lösung der Gleichung (1) die Form haben:

$$\sqrt{\alpha + \beta i} = \xi_1 + \eta_1 i, \tag{4}$$

wo ξ_1, η_1 *beide wesentlich positiv* sind, nämlich:

$$\xi_1 = +\sqrt{\tfrac{1}{2}|\alpha + \beta i| + \tfrac{1}{2}\alpha}, \quad \eta_1 = +\sqrt{\tfrac{1}{2}|\alpha + \beta i| - \tfrac{1}{2}\alpha}. \tag{4a}$$

Dieser besondere Wert der Quadratwurzel aus $\alpha + \beta i$ (wo $\beta > 0$) soll im folgenden schlechthin als die *positivgliedrige* Quadratwurzel bezeichnet und durch das Symbol ${}^{+}\sqrt{\alpha + \beta i}$ dargestellt werden, so daß also:

$$(5) \qquad {}^{+}\sqrt{\alpha + \beta i} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\,|\alpha + \beta i| + \tfrac{1}{2}\alpha} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}\,|\alpha + \beta i| - \tfrac{1}{2}\alpha}.$$

3. Betrachtet man jetzt die Gleichung:

$$(6) \qquad x^N = 1\,, \quad \text{wo:} \quad N = 2^n,$$

so folgt zunächst aus der Identität:

$$x^N = \left(x^{2^n - 1}\right)^2,$$

daß $x^{2^n - 1}$ nur die beiden Werte haben kann:

$$x^{2^n - 1} = \pm\sqrt{1}\,, \quad \text{d. h.} \quad = \pm 1\,.$$

Daraus ergibt sich analog:

$$x^{2^n - 2} = \pm\sqrt{\pm 1}\,,$$

$$x^{2^n - 3} = \pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm 1}}\,,$$

und so weiter fortschließend findet man, daß alle überhaupt möglichen Lösungen der Gleichung (6) in der Form enthalten sein müssen:

$$(7) \qquad x = \pm\underset{n-1}{\sqrt{\pm\underset{n-2}{\sqrt{\pm \cdots \pm\underset{1}{\sqrt{\pm 1}}}}}}$$

(wobei die Indizes unter den Wurzelzeichen lediglich dazu dienen sollen, deren *Anzahl* zu charakterisieren). Da die n vorhandenen doppelten Vorzeichen im ganzen $2^n = N$ verschiedene Kombinationen zulassen, so lehrt der Ausdruck (7) unmittelbar, daß Gl. (6) *höchstens* N *verschiedene* Wurzeln haben kann. Wir zeigen nun, daß die Anzahl der *verschiedenen* Wurzeln auch *wirklich* N ist und daß sich dieselben sämtlich als Potenzen einer ganz bestimmten unter ihnen darstellen lassen.

Hierzu setzen wir zunächst:

$$(8) \qquad c_1 = \sqrt[2]{1} = -1$$

$$(9) \qquad c_2 = \sqrt[2^2]{1} = \sqrt[2]{c_1} = i$$

und definieren sodann c_3 als die im oben bezeichneten Sinne *positivgliedrige* Quadratwurzel aus c_2, ebenso c_4 als diejenige aus c_3 und allgemein $c_{\varkappa+1}$ als diejenige aus $c_\varkappa$. Man findet also mit Benutzung von Gl. (5):

$$(10) \qquad c_3 = \sqrt[2^3]{1} = {}^{+}\sqrt{c_2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$(11) \qquad c_4 = \sqrt[2^4]{1} = {}^{+}\sqrt{c_3} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}} + i\sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}\,.$$

Setzt man sodann allgemein:

$$(12) \qquad c_{\varkappa+1} = \sqrt[2^{\varkappa+1}]{1} = {}^{+}\sqrt{c_\varkappa} = \gamma_{\varkappa+1} + \delta_{\varkappa+1} i\,,$$

so wird Gl. (4) und (5) zunächst:

$$\begin{aligned}\gamma_{\varkappa+1} + \delta_{\varkappa+1} i &= {}^{+}\sqrt{\gamma_\varkappa + \delta_\varkappa i} \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{2}|\gamma_\varkappa + \delta_\varkappa i| + \tfrac{1}{2}\gamma_\varkappa} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}|\gamma_\varkappa + \delta_\varkappa i| - \tfrac{1}{2}\gamma_\varkappa}.\end{aligned}$$

Da aber:

$$|\gamma_\varkappa + \delta_\varkappa i| = |c_\varkappa| = 1 \qquad (\text{wegen: } c_\varkappa^{2^\varkappa} = 1),$$

so ergibt sich schließlich:

$$\gamma_{\varkappa+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\gamma_\varkappa}, \quad \delta_{\varkappa+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\gamma_\varkappa} \tag{13}$$

und hieraus insbesondere für $\varkappa = n - 1$:

$$\gamma_n = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\gamma_{n-1}}, \quad \delta_n = \sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\gamma_{n-1}}. \tag{14}$$

Drückt man jetzt γ_{n-1} wiederum mit Hilfe der Rekursionsformel (13) durch γ_{n-2} aus, so folgt:

$$\gamma_n = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\gamma_{n-2}}}, \quad \delta_n = \sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\gamma_{n-2}}}$$

und durch weitere sukzessive Anwendung der Formel (13):

$$\gamma_n = \underset{1}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\underset{2}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{2}\underset{n-4}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\underset{n-3}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\gamma_3}}}}}}}}$$

(wobei die Indizes unter den Wurzelzeichen wiederum nur deren Anzahl charakterisieren sollen), also mit Berücksichtigung von Gl. (10) schließlich:

$$\gamma_n = \underset{1}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\underset{2}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{2}\underset{n-4}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\underset{n-3}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\underset{n-2}{\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}}}}}}}} \tag{15a}$$

und analog:

$$\delta_n = \underset{1}{\sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\underset{2}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{2}\underset{n-4}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\underset{n-3}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\underset{n-2}{\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}}}}}}}}. \tag{15b}$$

Dabei ist dann:

$$(\gamma_n + \delta_n i)^{2^n} \equiv c_n^N = 1. \tag{16}$$

Da *alle möglichen* Wurzeln der Gleichung $x^N = 1$, wie Gl. (3) lehrt, durch sukzessive Quadratwurzel-Ausziehungen berechnet werden können, so läßt sich aus der besonderen Art der Herstellung von c_n erschließen, daß es *keine komplexe* Wurzel der Gleichung $x^N = 1$ geben kann, deren *reeller* Teil *numerisch größer* als γ_n wäre. Hat man nämlich:

$$c = \gamma + \delta i, \quad \gamma^2 + \delta^2 = 1,$$

wo γ, δ im übrigen beliebig *positiv* oder *negativ* sein mögen, so sind die beiden *überhaupt möglichen* Werte von $\sqrt{c}$ nach Gl. (3) stets in der Form enthalten:

$$\sqrt{c} = \pm \left\{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\gamma} + \frac{\delta}{|\delta|} \cdot i\sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\gamma}\right\}.$$

Danach fällt der *reelle* Teil von $\sqrt{c}$ bei *positiven* Werten von γ stets *numerisch größer* aus als bei den entsprechenden *negativen*, und wiederum noch um so *größer*, je *größer* γ selbst ist. Da nun, wie unmittelbar zu sehen, c_3 unter allen möglichen *komplexen* Werten von $\sqrt[2^3]{1}$ einen *positiven reellen* Teil besitzt, der von keinem anderen übertroffen wird[1]), so gilt das analog zunächst für c_4, folglich ebenso für c_5 — also schließlich für c_n.

Da überdies für jedes $n > 2$:

(17) $$\gamma_n < 1 \quad \text{und daher:} \quad \delta_n > 0,$$

wie man ohne weiteres erkennt, wenn man in Gl (15a) die innerste $\sqrt{\frac{1}{2}}$ durch die *zu große* Zahl 1 ersetzt, so folgt, daß c_n diejenige Lösung der Gleichung $x^N = 1$ darstellt, welche nach der in § 23, Nr. 3 (S. 197) eingeführten Terminologie als die N^{te} *Grund*einheitswurzel zu bezeichnen ist.

4. Aus dem a. a. O Gesagten würde dann ohne weiteres folgen, daß die N Zahlen: $c_n^0, c_n^1, c_n^2, \ldots, c_n^{N-1}$ die N (wirklich verschiedenen) Wurzeln der Gleichung $x^N = 1$ darstellen und daß denselben n äquidistante, mit 1 beginnende, in der Richtung der wachsenden Winkel aufeinanderfolgende Punkte auf dem Einheitskreise entsprechen. Indessen läßt sich dieses Resultat, unabhängig von den dort angestellten Betrachtungen, für den besonderen hier vorliegenden Fall auch in folgender Weise ableiten.

Aus $(c_n^\nu)^N = (c_n^N)^\nu = 1$ folgt zunächst, daß jede der Zahlen

$$c_n^0, \; c_n^1, \; c_n^2, \; \ldots, \; c_n^{N-1}$$

eine Wurzel der Gleichung $x^N = 1$ darstellt. Wären nun irgendzwei dieser Zahlen einander gleich, so hätte man etwa für: $0 \leqq \nu < \nu' \leqq N-1$:

$$c_n^{\nu'} = c_n^{\nu},$$

also:

$$c_n^{\nu'-\nu} = 1, \qquad \text{wo: } 0 < \nu' - \nu \leqq N-1,$$

d. h. es gäbe mindestens einen *von Null verschiedenen* und *unterhalb* N liegenden Exponenten, welcher zu c_n gesetzt den Wert 1 liefert.

Angenommen nun, es sei μ der *kleinste* solche Exponent. Dann erkennt man zunächst, daß μ keine Zahl von der Form 2^λ $(\lambda = 0, 1, \ldots, n-1)$ sein kann. Denn aus:

$$c_\varkappa = +\sqrt{c_{\varkappa-1}}, \quad \text{also: } \quad c_\varkappa^2 = c_{\varkappa-1}$$

folgt:

$$\begin{aligned} c_n^{2^\lambda} &= (c_n^2)^{2^{\lambda-1}} \\ &= c_{n-1}^{2^{\lambda-1}} = c_{n-2}^{2^{\lambda-2}} = \cdots = c_{n-\lambda} \quad (\text{wo: } n - \lambda \geqq 1), \end{aligned}$$

so daß also $c_n^{2^\lambda}$ stets von 1 verschieden ist.

---

1) Die acht verschiedenen Werte von $\sqrt[2^3]{1}$ sind nämlich:

$$1, \; -1, \; i, \; -i, \; \sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \; -\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right).$$

Da hiernach μ *kein Teiler* von N sein kann, so darf man setzen:

$$N = p \cdot \mu + \mu',$$

wo p eine positive ganze Zahl und μ' der Reihe $1, 2, \ldots, (\mu - 1)$ angehört. Alsdann wäre aber:

$$c_n^{p\mu + \mu'} = 1$$

und, wegen $c_n^{p\mu} = (c_n^{\mu})^p = 1$, schließlich:

$$c_n^{\mu'} = 1,$$

d. h. es gäbe einen von Null verschiedenen Exponenten $\mu' < \mu$ von der gedachten Beschaffenheit — was der Voraussetzung widerspricht. Da es somit überhaupt keinen von Null verschiedenen Exponenten $\mu < N$ geben kann, so daß $c_n^{\mu} = 1$, so folgt in der Tat, daß die Zahlen c_n^{ν} für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, (N - 1)$ durchweg voneinander verschieden sein müssen und daher die sämtlichen Wurzeln der Gleichung $x^N = 1$ darstellen. ♠

5 Um sich über die Anordnung der den Zahlen

$$c_n^0, \quad c_n^1, \quad c_n^2, \quad \ldots, \quad c_n^{N-1}$$

entsprechenden Punkte etwas genauer zu orientieren, bemerke man folgendes. Da für jedes ganzzahlige ν:

$$|c_n^{\nu}| = 1, \quad |c_n^{\nu} - c_n^{\nu+1}| = |c_n^{\nu}| \cdot |1 - c_n| = |1 - c_n|,$$

so folgt zunächst, daß jenen N Zahlen ebensoviele äquidistante Punkte auf dem Einheitskreise entsprechen, wobei der Abstand jedes Punktes von dem unmittelbar vorangehenden oder folgenden den Wert $|1 - c_n|$ besitzt. Beachtet man nun, daß $c_n^0 = 1$, $c_n^1 = \gamma_n + \delta_n i$, wo γ_n und δ_n *beide positiv*, und daß *niemals* $c_n^{\nu+1} = c_n^{\nu-1}$ werden kann, so folgt, daß die Punkte $c_n^0, c_n^1, c_n^2, \ldots$ in der Richtung der wachsenden Winkel und nach der Reihenfolge der Exponenten aufeinanderfolgen. Und zwar ist leicht zu sehen, daß bei Verfolgung der Punkte c_n^{ν} $(\nu = 0, 1, \ldots, (N - 1))$ in dem durch die Folge der Exponenten angegebenen Sinne die Peripherie des Einheitskreises gerade *einmal* durchlaufen wird, derart, daß der *letzte* jener Punkte, nämlich c_n^{N-1}, von dem *ersten*, d. h. $c_n^0 = 1$, wiederum den Abstand $|1 - c_n|$ besitzt.

Würde nämlich die Kreisperipherie hierbei *mehr als einmal* durchlaufen, so müßte *entweder* mindestens *ein* Punkt c_n^{ν}, wo $1 \leqq \nu \leqq N - 1$, mit dem Ausgangspunkte $c_n^0 = 1$ *zusammenfallen*, was nach dem oben Gesagten unmöglich ist; *oder* es müßte ein solcher Punkt c_n^{ν} *zwischen* c_n^0 und c_n^1 liegen: in diesem Falle würde aber die Zahl c_n^{ν} eine Wurzel der Gleichung $c^N = 1$ darstellen, deren *reeller* Teil *größer* wäre als derjenige von c_n, was ebenfalls ausgeschlossen erscheint. Da im übrigen:

$$|c_n^0 - c_n^{N-1}| = |c_n^N - c_n^{N-1}| = |c_n|^{N-1} \cdot |c_n - 1| = |1 - c_n|,$$

so ist die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung vollständig erwiesen.

6. Da die Punkte c_n^ν $(\nu = 0, 1, \ldots, (N-1))$ die Eckpunkte eines dem Einheitskreise einbeschriebenen regelmäßigen N-Ecks mit der Seitenlänge $|1 - c_n|$ bilden, so ist geometrisch ohne weiteres ersichtlich, daß $|1 - c_n|$ bei unbegrenzt wachsendem n der *Null* zustrebt. Um diese Tatsache auch arithmetisch zu begründen, gehen wir aus von der Beziehung:

$$(18)\qquad \begin{aligned} |1 - c_n| = \sqrt{(1-\gamma_n)^2 + \delta_n^2} &= \sqrt{2(1-\gamma_n)} \quad (\text{wegen: } \gamma_n^2 + \delta_n^2 = 1) \\ &= 2\delta_{n+1} \qquad (\text{s. Gl. } (13)), \end{aligned}$$

also:

$$(19)\qquad 2^n \cdot |1 - c_n| = 2^{n+1}\delta_{n+1},$$

und zeigen, daß $2^n|1 - c_n|$, d. h. geometrisch gesprochen, die *Maßzahl* für den *Umfang* jenes regelmäßigen N-Ecks, für $n \to \infty$ einen bestimmten Grenzwert besitzt, der dann als *Maßzahl* für die *Länge der Kreislinie* mit dem Radius 1 zu gelten hat und vorläufig mit $2p$ bezeichnet werden mag.[1])

Man hat nach Gl. (13):

$$\gamma_{n+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\gamma_n)}, \qquad \delta_{n+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\gamma_n)}$$

und daher:

$$(20)\qquad 2\gamma_{n+1}\delta_{n+1} = \sqrt{1-\gamma_n^2} = \delta_n.$$

Daraus folgt, wegen $\gamma_{n+1} < 1$, daß:

$$2\delta_{n+1} > \delta_n,$$

mithin:

$$(21)\qquad 2^{n+1}\delta_{n+1} > 2^n\delta_n \geqq 2^3\delta_3 = 4\cdot\sqrt{2} \qquad (\text{für } n \geqq 3).$$

Andererseits hat man für $n \geqq 3$, wiederum wegen $0 < \gamma_{n+1} < 1$:

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} < \frac{\delta_{n+1}}{\gamma_{n+1}} = \frac{2\gamma_{n+1}\delta_{n+1}}{2\gamma_{n+1}^2} &= \frac{\delta_n}{1+\gamma_n} \qquad (\text{nach Gl. (20) und (13)}) \\ &= \frac{\gamma_n}{1+\gamma_n}\cdot\frac{\delta_n}{\gamma_n} < \frac{1}{2}\,\frac{\delta_n}{\gamma_n} \end{aligned}$$

und daher:

$$(22)\qquad 2^{n+1}\delta_{n+1} < 2^{n+1}\frac{\delta_{n+1}}{\gamma_{n+1}} < 2^n\frac{\delta_n}{\gamma_n} \leqq 2^3\frac{\delta_3}{\gamma_3} = 8.$$

Die Zahlen $2^\nu\delta_\nu$ $(\nu = 3, 4, \ldots)$ bilden also nach Ungl. (21) eine *monoton zunehmende*, oberhalb $4\sqrt{2}$ und nach Ungl. (22) unterhalb 8 bleibende

1) Wir vermeiden hier die schon in der Elementargeometrie übliche Bezeichnung 2π, da wir aus Zweckmäßigkeitsgründen das Zeichen π späterhin zunächst in anderem Zusammenhange einführen und daran anknüpfend erst die Existenz der Beziehung $p = \pi$ nachweisen werden (s. § 62, Nr. 2).

Folge.[1]) Mithin *existiert* $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{n+1}\delta_{n+1}$ im engeren Sinne, so daß man mit Berücksichtigung von Gl. (19) und mit Benutzung des bereits oben in Aussicht genommenen Zeichens $2p$ setzen kann:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \cdot |1-c_n| = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1}\cdot\delta_{n+1} = 2p, \tag{23}$$

wo also p eine *bestimmte* zwischen $2\sqrt{2}$ und 4 gelegene Zahl bedeutet, zu deren genauerer Bestimmung sich späterhin noch geeignete Hilfsmittel ergeben werden.

Des weiteren folgt aus Ungl. (22) mit Benutzung von Gl. (18):

$$|1-c_n| = 2\delta_{n+1} < \frac{8}{2^n}, \tag{24}$$

also, wie oben behauptet:

$$\lim_{n\to\infty} |1-c_n| = 0. \tag{25}$$

Schließlich wollen wir für spätere gelegentliche Benutzung an die Gl. (23) noch die folgende Bemerkung knüpfen. Erhebt man Gl. (23) ins Quadrat, so folgt mit Berücksichtigung von Gl. (18):

$$\lim_{n\to\infty} 2^{2n+1}(1-\gamma_n) = 4p^2$$

und daher:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n(1-\gamma_n) = 0. \tag{26}$$

Nun ist:

$$c_n - 1 = (\gamma_n - 1) + \delta_n i,$$

also:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n(c_n-1) = \lim_{n\to\infty} 2^n(\gamma_n-1) + i\lim_{n\to\infty} 2^n\delta_n,$$

und daher mit Benutzung von Gl. (26) und (23):

$$\lim_{n\to\infty} 2^n(c_n-1) = 2pi. \tag{27}$$

§ 35. Definition und allgemeine Eigenschaften eines gewissen Mittelwertes $\mathfrak{M}f(\mathfrak{e}r)$.

1. Es sei eine Funktion $f(x)$ eindeutig definiert und beschränkt für alle Stellen x mit dem absoluten Betrage $|x| = r$, anders geschrieben für $x = \mathfrak{e}r$, wo $\mathfrak{e}$ jeden beliebigen Einheitsfaktor[2]), also eine komplexe Veränderliche mit dem absoluten Betrage 1 bedeutet. Ferner werde nach Annahme einer beliebigen natürlichen Zahl n unter c_n, wie im vorigen

1) Man bemerke, daß, geometrisch gesprochen, $4\sqrt{2}$ bzw 8 den Umfang des einem Kreise mit dem Radius 1 eingeschriebenen bzw umschriebenen Quadrats darstellt

2) Vgl. I_3, § 72, Nr 1, S 552

Paragraphen, die *Grundwurzel* der Gleichung: $x^N = 1$, wo $N = 2^n$, verstanden. Dann soll der *Mittelwert* (das arithmetische Mittel) der N Werte, welche $f(\mathfrak{e}r)$ für $\mathfrak{e} = c_n^\nu$ ($\nu = 0, 1, \ldots N-1$) annimmt durch das Symbol $\mathfrak{M}_n f(\mathfrak{e}r)$ bezeichnet werden, so daß also die Definitionsgleichung besteht:

$$\mathfrak{M}_n f(\mathfrak{e}r) = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_0^{2^n - 1} {}_\varkappa f(c_n^\varkappa r) \tag{1}$$

Wird jetzt noch angenommen, daß $f(x)$ *längs* des Kreises $(0)r$ *stetig* (also *eo ipso gleichmäßig* stetig[1]) ist, so läßt sich zeigen, daß $\mathfrak{M}_n f(\mathfrak{e}r)$ für $n \to \infty$ einen bestimmten *Grenzwert* besitzt. Hierzu ist lediglich der Nachweis erforderlich, daß

$$|\mathfrak{M}_{n+p} f(\mathfrak{e}r) - \mathfrak{M}_n f(\mathfrak{e}r)|$$

durch passende Wahl von n für jedes noch so große p *beliebig klein* gemacht werden kann.

2. Auf Grund der Definitionsgleichung (1) hat man:

$$\mathfrak{M}_{n+p} f(\mathfrak{e}r) = \frac{1}{2^{n+p}} \cdot \sum_0^{2^{n+p}-1} {}_\varkappa f(c_{n+p}^\varkappa r). \tag{2}$$

Um die beiden Summen (1) und (2) zu vergleichen, sei daran erinnert, daß den Zahlen $c_n^\varkappa r$ ($\varkappa = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$) nach Nr. 5 des vorigen Paragraphen 2^n äquidistante Punkte auf der Peripherie des Kreises $(0)r$ entsprechen, also den Zahlen $c_{n+p}^\varkappa r$ ($\varkappa = 0, 1, \ldots, 2^{n+p} - 1$) analog 2^{n+p} solche Punkte. Durch wiederholte Anwendung der ins Quadrat erhobenen und rückwärts gelesenen Gl. (12) des vorigen Paragraphen findet man:

$$c_n = c_{n+1}^2 = c_{n+2}^{2^2} = \cdots = c_{n+p}^{2^p},$$

und daher:

$$c_n^\varkappa = c_{n+p}^{\varkappa 2^p}, \qquad c_n^{\varkappa+1} = c_{n+p}^{\varkappa 2^p + 2^p} \quad (\varkappa = 0, 1, \ldots, 2^n - 1). \tag{3}$$

Hiernach fällt der Punkt $c_n^\varkappa$ mit $c_{n+p}^{\nu\, 2^p}$, ebenso $c_n^{\varkappa+1}$ mit $c_{n+p}^{(\varkappa+1)\cdot 2^p} = c_{n+p}^{\varkappa 2^p + 2^p}$ zusammen, während die Punkte

$$c_{n+p}^{\varkappa 2^p + 1}, \quad c_{n+p}^{\varkappa 2^p + 2}, \ldots, c_{n+p}^{\varkappa 2^p + 2^p - 1}$$

1) Es ist nämlich $f(x)$ längs der oberen bzw. unteren Hälfte des Kreises $(0)r$ *je eine* (bei $\xi = \pm r$ in eine *einzige* zusammenfallende) *stetige* Funktion von ξ und $\eta = \pm\sqrt{r^2 - \xi^2}$ bei $|\xi| \leq r$, also schließlich eine *stetige* Funktion der *einen* reellen Veränderlichen ξ (nach dem Satze von § 6, Nr. 5, S 51) für den abgeschlossenen Bereich $|\xi| \leq r$. (Bezüglich der für diesen Schluß erforderlichen *Stetigkeit* von $\sqrt{r^2 - \xi^2}$ vgl § 18, Nr. 4, Fußn. 1, S. 170).

zwischen $c_n^{\varkappa}$ und $c_n^{\varkappa+1}$ liegen. Vergleicht man nun die beiden Summen (1) und (2), so erscheinen an der Stelle des *einen* der Summe (1) angehörigen Summanden:

$$(4) \qquad \frac{1}{2^n} \cdot f(c_n^{\varkappa} r)$$

in der Summe (2) die folgenden 2^p Summanden:

$$(5) \qquad \frac{1}{2^{n+p}} \cdot f(c_{n+p}^{\varkappa\, 2^p+\mu} \cdot r), \qquad \text{wo}: \mu = 0, 1, \ldots 2^p - 1,$$

also, zusammengefaßt, die Teilsumme:

$$(5') \qquad \frac{1}{2^{n+p}} \cdot \sum_{0}^{2^p-1}{}^{\mu} f(c_{n+p}^{\varkappa\, 2^p+\mu} \cdot r).$$

Ersetzt man hiernach den einen Summanden (4) mit Benutzung von (3) durch 2^p Summanden von der zur Vergleichung mit (5′) zweckmäßigeren Form:

$$(4') \qquad \frac{1}{2^{n+p}} \cdot f(c_{n+p}^{\varkappa\, 2^p} \cdot r),$$

so findet man als Differenz der Ausdrücke (5′) und (4) den Ausdruck:

$$(6) \qquad \frac{1}{2^{n+p}} \sum_{0}^{2^p-1}{}^{\mu} \left\{ f(c_{n+p}^{\varkappa\, 2^p+\mu} \cdot r) - f(c_{n+p}^{\varkappa\, 2^p} \cdot r) \right\}$$

und daher durch Substitution von $\varkappa = 0, 1, \ldots 2^n - 1$ und Addition:

$$(7) \quad \mathfrak{M}_{n+p} f(\mathfrak{e} r) - \mathfrak{M}_n f(\mathfrak{e} r) = \frac{1}{2^{n+p}} \sum_{0}^{2^n-1}{}^{\varkappa} \sum_{0}^{2^p-1}{}^{\mu} \left\{ f(c_{n+p}^{\varkappa\, 2^p+\mu}\; r) - f(c_{n+p}^{\varkappa\, 2^p} \cdot r) \right\}.$$

Infolge der bestehenden *gleichmäßigen Stetigkeit* von $f(x)$ für alle $x = \mathfrak{e} r$ hat man, wenn auch $\mathfrak{e}'$ einen Einheitsfaktor bedeutet, bei beliebig klein vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ und passend dazu bestimmtem $\delta > 0$:

$$(8) \qquad |f(\mathfrak{e} r) - f(\mathfrak{e}' r)| < \varepsilon, \qquad \text{wenn: } r\,|\mathfrak{e} - \mathfrak{e}'| < \delta.$$

Nimmt man also n von vornherein so groß an, daß:

$$(9) \qquad r \cdot |1 - c_n| < \delta$$

ausfällt — eine Bedingung, die wegen: $|1 - c_n| < \frac{8}{2^n}$ (s. Ungl (24), S. 269) erfüllt ist, wenn $\frac{8r}{2^n} \leq \delta$, also $2^n \geq \frac{8r}{\delta}$ — und beachtet, daß:

$$(10) \qquad |1 - c_n| = |c_n^{\varkappa+1} - c_n^{\varkappa}| = |c_{n+p}^{\varkappa\, 2^p + 2^p} - c_{n+p}^{\varkappa\, 2^p}|,$$

so folgt aus Ungl. (9) *a fortiori*, daß für $\mu = 0, 1, \ldots 2^p - 1$:

$$(11) \qquad r \cdot | c_{n+p}^{\varkappa\, 2^p + \mu} - c_{n+p}^{\varkappa\, 2^p} | < \delta$$

und daher auf Grund von Ungl. (8) der Absolutwert eines jeden der in der Doppelsumme (7) auftretenden 2^{n+p} Summanden $< \varepsilon$ wird. Mithin ergibt sich schließlich:

$$(12) \qquad | \mathfrak{M}_{n+p} f(\mathfrak{e} r) - \mathfrak{M}_n f(\mathfrak{e} r) | < \varepsilon$$

und damit die Existenz eines bestimmten endlichen Grenzwertes $\lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{M}_n f(\mathfrak{e} r)$, welcher schlechthin der *Mittelwert* von $f(x)$ für $|x| = r$ oder auch, etwas kürzer, *Mittelwert* von $f(\mathfrak{e} r)$ heißen und durch das Symbol $\mathfrak{M} f(\mathfrak{e} r)$ bezeichnet werden soll. Für das letztere besteht somit die Definitionsgleichung:

$$(13) \qquad \mathfrak{M} f(\mathfrak{e} r) = \lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_n f(\mathfrak{e} r).$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{0}^{2^n - 1} {}_{\varkappa} f(c_n^{\varkappa} r).$$

3. Die Existenz von $\lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{M}_n f(\mathfrak{e} r)$ bleibt erhalten, wenn $f(x)$ für eine endliche Anzahl — etwa m — Stellen $x = \mathfrak{e} r$ endlich-unstetig wird oder überhaupt nicht definiert ist, sofern es im letzteren Falle freistehen soll, der Funktion $f(x)$ einen beliebigen Wert beizulegen, mit der einzigen Einschränkung, daß der absolute Betrag, gerade so wie derjenige aller anderen Werte $f(\mathfrak{e} r)$, eine gewisse positive Zahl G nicht übersteigt.

Der Einfluß einer solchen Ausnahmestelle auf die in Gl. (7) auftretende Doppelsumme erstreckt sich dann nur auf *einen* oder, falls diese Stelle gerade die Form $c_{n+p}^{\lambda} \cdot r$ haben sollte, auf *zwei* (konsekutive) Summanden, somit der Einfluß aller möglichen Ausnahmestellen *höchstens* auf $2m$ jener Summanden. Da aber:

$$|f(\mathfrak{e} r) - f(\mathfrak{e}' r)| \leqq |f(\mathfrak{e} r)| + |f(\mathfrak{e}' r)| \leqq 2G,$$

so ist der *Gesamtbetrag*, der auf diese Weise zu der fraglichen Summe geliefert wird, absolut genommen *höchstens* $\leqq \frac{2mG}{2^{n+p}}$, also *a fortiori* $< \frac{2mG}{2^n}$ und daher $< \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geqq n_0$, wenn n_0 so gewählt wird, daß:

$$\frac{2mG}{2^{n_0}} \leqq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{d. h.} \qquad n_0 \geqq 2 + \frac{\lg \frac{m}{\varepsilon} G}{\lg 2}.$$

Für alle übrigen Summanden der Doppelsumme (7) bleibt die Stetigkeit

von $f(\mathfrak{e}r)$ erhalten Man braucht also nur in der Stetigkeitsbedingung (8) ε durch $\frac{\varepsilon}{2}$ zu ersetzen, um durch entsprechende Bestimmung von δ bzw. $n \geqq n_0$ zu erzielen, daß der Absolutwert dieses Teils der Doppelsumme gleichfalls $< \frac{\varepsilon}{2}$ ausfällt und somit schließlich wieder die für die Existenz eines endlichen $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{M}_n f(\mathfrak{e}r)$ hinreichende Bedingung (12) zum Vorschein kommt.

Übrigens läßt sich mit Hilfe gewisser Prinzipien der Mengenlehre dieses Ergebnis auch auf den Fall übertragen, daß die Menge der betreffenden Ausnahmestellen mit gewissen Einschränkungen *unendlich groß* ist.

4. Unmittelbar aus der Definition (13) von $\mathfrak{M}f(\mathfrak{e}r)$ ergibt sich, daß:

$$\mathfrak{M}(K \cdot f(\mathfrak{e}r)) = K \cdot \mathfrak{M}f(\mathfrak{e}r), \tag{14}$$

wenn K einen für alle $\mathfrak{e}r$ unveränderlichen Faktor bedeutet; ebenso:

$$|\mathfrak{M}f(\mathfrak{e}r)| \leqq G, \tag{15}$$

wenn: $|f(\mathfrak{e}r)| \leqq G$ für alle Werte von $\mathfrak{e}$.

Ferner folgt gleichfalls unmittelbar aus der Definition (13), daß:

$$\mathfrak{M}\sum_0^m{}^{\nu} f_\nu(\mathfrak{e}r) = \sum_0^m{}^{\nu} \mathfrak{M}f_\nu(\mathfrak{e}r), \tag{16}$$

falls $f_0(x), f_1(x), \ldots f_m(x)$ Funktionen bedeuten, die für $x = \mathfrak{e}r$ die oben von $f(x)$ vorausgesetzten Eigenschaften besitzen.

Dabei läßt sich die Beziehung (16) auch auf den Fall $m \longrightarrow \infty$ übertragen, falls (unter den entsprechenden Voraussetzungen über die Folge der $f_\nu(x)$) die Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu} f_\nu(x)$ für alle $x = \mathfrak{e}r$ *gleichmäßig* konvergiert. Unter dieser Voraussetzung ist nämlich $\sum_0^\infty{}^{\nu} f_\nu(x)$ eine für $x = \mathfrak{e}r$ *stetige* Funktion, so daß $\mathfrak{M}\sum_0^\infty{}^{\nu} f_\nu(\mathfrak{e}r)$ eine bestimmte Zahl vorstellt. Zugleich existiert dann zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl m', derart daß:

$$|R_m(\mathfrak{e}r)| \equiv \left|\sum_{m+1}^\infty{}^{\nu} f_\nu(\mathfrak{e}r)\right| < \varepsilon \quad \text{für } m \geqq m' \text{ und } \textit{alle } \mathfrak{e}. \tag{17}$$

Sodann findet man mit Benutzung von Gl. (16):

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}\sum_0^\infty{}^{\nu} f_\nu(\mathfrak{e}r) &= \mathfrak{M}\sum_0^m{}^{\nu} f_\nu(\mathfrak{e}r) + \mathfrak{M}R_m(\mathfrak{e}r)\\ &= \sum_0^m{}^{\nu} \mathfrak{M}f_\nu(\mathfrak{e}r) + \mathfrak{M}R_m(\mathfrak{e}r),\end{aligned}$$

also mit Berücksichtigung der Ungleichungen (17) und (15):

$$(18)\qquad \left|\mathfrak{M}\sum_0^\infty{}_\nu f_\nu(er) - \sum_0^m{}_\nu \mathfrak{M} f_\nu(er)\right| < \varepsilon \qquad \text{für } m \geqq m'$$

und, da es freisteht ε unbegrenzt zu verkleinern, m' entsprechend zu vergrößern, schließlich:

$$(19)\qquad \mathfrak{M}\sum_0^\infty{}_\nu f_\nu(er) = \sum_0^\infty{}_\nu \mathfrak{M} f_\nu(er).$$

5. Für eine alsbald zu machende Anwendung erscheint es nützlich, den Mittelwert $\mathfrak{M} f(er)$ für den einfachen Fall: $f(x) = x^{\pm\nu}$ zu bestimmen, unter ν eine beliebige natürliche Zahl verstanden.

Nimmt man n von vornherein so groß an, daß $2^n > \nu$, so ist nach Nr. 4 des vorigen Paragraphen $c_n^{\pm\nu} \neq 1$ und daher:

$$(20)\qquad \sum_0^{2^n-1}{}_\varkappa c_n^{\pm\nu\varkappa} = \frac{1 - c_n^{\pm\nu\, 2^n}}{1 - c_n^{\pm\nu}} = 0.$$

Infolgedessen ergibt sich:

$$\mathfrak{M}_n(er)^{\pm\nu} = \frac{1}{2^n}\sum_0^{2^n-1}{}_\varkappa c_n^{\pm\nu\varkappa}\cdot r^{\pm\nu} = 0$$

und daher schließlich für $n \to \infty$ auch:

$$(21)\qquad \mathfrak{M}(er)^{\pm\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Zieht man auch noch den besonderen Wert $\nu = 0$ in Betracht, so findet man für *jedes* n:

$$\mathfrak{M}_n(er)^0 = \frac{1}{2^n}\sum_0^{2^n-1}{}_\varkappa c_n^{0\varkappa} r^0 = \frac{1}{2^n}\cdot 2^n = 1$$

und daher auch:

$$(22)\qquad \mathfrak{M}(er)^0 = 1.$$

6. Die Definition des Mittelwertes läßt sich auch ohne Schwierigkeit auf den Fall übertragen, daß an die Stelle von $x = 0$ als Mittelpunkt des in Frage kommenden Kreises irgendein anderer Wert $x = x_0$ tritt. Die Punkte auf der Peripherie eines Kreises $(x_0)r$ sind dann charakterisiert durch die Beziehung $x = x_0 + er$. Setzt man hiernach:

$$(23)\qquad \mathfrak{M}_n f(x_0 + er) = \frac{1}{2^n}\cdot\sum_0^{2^n-1}{}_\varkappa f(x_0 + c_n^\varkappa r),$$

so ergibt sich

$$(24)\qquad \mathfrak{M} f(x_0 + er) = \lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}_n(f(x_0 + er))$$

als *Mittelwert* von $f(x)$ für $|x - x_0| = r$, vorausgesetzt, daß $f(x)$ für alle $x = x_0 + er$ die in Nr. 1 bezeichneten Stetigkeitseigenschaften besitzt.

§ 36. Der Mittelwert von $|P(\varepsilon r)|^2$. — Der Cauchysche Koeffizientensatz.

1. Es werde gesetzt:

$$P_m(x) = \sum_{-m}^{+m} {}^{\nu}\, a_\nu x^\nu \tag{1}$$

(wo von den Koeffizienten a_ν beliebig viele, z. B. auch *alle* mit negativem Index, *Null* sein können: vgl. § 33, Fußn. 1, S. 262).

Ferner werde analog wie bei früherer Gelegenheit[1]) mit $\tilde{x}$ bzw. $\tilde{f}(x)$ die zu x bzw. $f(x)$ *konjugierte* Zahl bezeichnet. Da andererseits $c_n^{-\lambda}$ zu c_n^λ konjugiert ist (wegen: $c_n^\lambda \cdot c_n^{-\lambda} = 1$), so folgt aus:

$$P_m(c_n^\varkappa r) = \sum_{-m}^{+m} {}^{\nu}\, a_\nu c_n^{\varkappa\nu} r^\nu,$$

daß:

$$\tilde{P}_m(c_n^\varkappa r) = \sum_{-m}^{+m} {}^{\nu}\, \tilde{a}_\nu c_n^{-\varkappa\nu} r^\nu$$

und, wenn man in der zweiten Summe den Index ν durch μ ersetzt, durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen:

$$|P_m(c_n^\varkappa r)|^2 = \sum_{-m}^{+m} {}^{\mu} \sum_{-m}^{+m} {}^{\nu}\, a_\nu \tilde{a}_\mu c_n^{(\nu-\mu)\varkappa} r^{\nu+\mu}, \tag{2}$$

sodann durch Summation über $\varkappa = 0, 1, \ldots, N-1$ (wo wiederum $N = 2^n$):

$$\sum_0^{N-1} {}^{\varkappa} |P_m(c_n^\varkappa r)|^2 = \sum_{-m}^{+m} {}^{\mu} \sum_{-m}^{+m} {}^{\nu}\, a_\nu \tilde{a}_\mu r^{\nu+\mu} \sum_0^{N-1} {}^{\varkappa}\, c_n^{(\nu-\mu)\varkappa}. \tag{3}$$

Dabei ist: $|\nu - \mu| \leqq 2m$. Nimmt man also n so groß an, daß $2m < 2^n$, d. h.

$$2^{n-1} > m \qquad \left(n > 1 + \frac{\lg m}{\lg 2}\right), \tag{4}$$

so ergibt sich aus Gl. (20) des vorigen Paragraphen, daß:

$$\sum_0^{N-1} {}^{\varkappa}\, c_n^{(\nu-\mu)\varkappa} = 0 \quad \text{für:} \quad \mu \neq \nu,$$

während *nur* für $\mu = \nu$:

$$\sum_0^{N-1} {}^{\varkappa}\, c_n^{(\nu-\mu)\varkappa} \equiv \sum_0^{N-1} {}^{\varkappa}\, c_n^0 = N$$

1) Vgl. § 16, Nr. 5, letzter Absatz (S. 155).

wird. Da überdies $a_\nu \cdot \tilde{a}_\nu = |a_\nu|^2$, so geht hiernach die Gl. (3) in die folgende über:

$$(5) \qquad \sum_0^{N-1}{}^{\nu} |P_m(c_n^\nu r)|^2 = N \cdot \sum_{-m}^{+m}{}^{\nu} |a_\nu|^2 \cdot r^{2\nu},$$

woraus durch Division mit N folgt:

$$(6) \qquad \mathfrak{M}_n |P_m(\mathfrak{e} r)|^2 = \sum_{-m}^{+m}{}^{\nu} |a_\nu|^2 \cdot r^{2\nu},$$

gültig für jedes der Bedingung (4) genügende n, insbesondere also auch für $n \to \infty$. Mithin ergibt sich:

$$(7) \qquad \mathfrak{M} |P_m(\mathfrak{e} r)|^2 = \sum_{-m}^{+m}{}^{\nu} |a_\nu|^2 \cdot r^{2\nu}.$$

2. Das vorstehende Ergebnis läßt sich wiederum unmittelbar auf den Fall $m \to \infty$ übertragen, wobei also an die Stelle der rationalen Funktion $P_m(x)$ eine unendliche Reihe $P(x) \equiv \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} a_\nu x^\nu$ tritt, von welcher vorausgesetzt werden soll, daß sie bei irgendeinem bestimmten $r > 0$ für alle $x = \mathfrak{e} r$ *gleichmäßig* konvergiert.

Man hat zunächst, wenn x dem Konvergenzbereich von $P(x)$ angehört:

$$(8) \quad P(x) = P_m(x) + R_m(x), \quad \text{wo:} \quad R_m(x) = \sum_{m+1}^{\infty}{}^{\nu} (a_\nu x^\nu + a_{-\nu} x^{-\nu}),$$

und daher:

$$(9) \qquad \begin{aligned} |P(x)|^2 &= (P_m(x) + R_m(x))(\tilde{P}_m(x) + \tilde{R}_m(x)) \\ &= |P_m(x)|^2 + Q_m(x), \end{aligned}$$

wo:

$$(10) \qquad Q_m(x) = P_m(x) \cdot \tilde{R}_m(x) + \tilde{P}_m(x) \cdot R_m(x) + |R_m(x)|^2,$$

und aus Gl. (9) für $x = \mathfrak{e} r$ durch Mittelwertbildung mit Benutzung von Gl. (7):

$$(11) \qquad \mathfrak{M} |P(\mathfrak{e} r)|^2 - \sum_{-m}^{+m}{}^{\nu} |a_\nu|^2 \cdot r^{2\nu} = \mathfrak{M}\, Q_m(\mathfrak{e} r)$$

Infolge der gleichmäßigen Konvergenz von $P(\mathfrak{e} r)$ läßt sich aber zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein m' so fixieren, daß für $m \geqq m'$:

$$(12) \qquad |R_m(\mathfrak{e} r)| = |\tilde{R}_m(\mathfrak{e} r)| < \varepsilon.$$

Ferner hat $|P(\mathfrak{e} r)|$ und damit gleichlautend $|\tilde{P}(\mathfrak{e} r)|$ eine bestimmte *obere Grenze*, die mit $\overline{P(r)}$ bezeichnet werden möge (übrigens infolge der

gleichmäßigen Konvergenz von $P(er)$ ein *reales Maximum*), so daß sich aus Gl. (8) ergibt:

$$(13)\qquad |P_m(er)| < \overline{P(r)} + \varepsilon, \quad |\tilde{P}_m(er)| < \overline{P(r)} + \varepsilon \qquad (m \geqq m'),$$

und sodann aus Gl. (10):

$$(14)\qquad |Q_m(er)| < \varepsilon \cdot (2\bar{P}(r) + 3\varepsilon) = \varepsilon' \qquad (m \geqq m')$$

Hieraus folgt mit Benutzung von Ungl. (15) des vorigen Paragraphen, daß:

$$(15)\qquad |\mathfrak{M}\, Q_m(er)| \leqq \varepsilon',$$

und man findet daher auf Grund von Gl (11):

$$(16)\qquad \left|\mathfrak{M}\,|P(er)|^2 - \sum_{-m}^{+m}{}' |a_\nu|^2 \cdot r^{2\nu}\right| \leqq \varepsilon' \quad \text{für} \quad m \geqq m',$$

also schließlich:

$$(17)\qquad \mathfrak{M}\,|P(er)|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' |a_\nu|^2\, r^{2\nu}$$

Es gilt also der folgende Satz:

Ist $P(x) \equiv \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' a_\nu x^\nu$ *gleichmäßig konvergent für alle* x *mit dem Absolutwert* $|x| = r$, *so ist der Mittelwert von* $|P(x)|^2$ *für* $|x| = r$ *gleich der Summe der aus den Quadraten der absoluten Beträge gebildeten Reihe.*

Dabei steht es selbstverständlich wieder frei, in beliebigem Umfange $a_\nu = 0$ anzunehmen, so daß also z. B in der Gl. (17) auch die folgende:

$$(17\text{a})\qquad \mathfrak{M}\,|\mathfrak{P}(er)|^2 = \sum_{0}^{\infty}{}' |a_\nu|^2 \cdot r^{2\nu},$$

(wo $\mathfrak{P}(x) \equiv \sum_{0}^{\infty}{}' a_\nu x^\nu$ für $|x| = r$ als gleichmäßig konvergent vorausgesetzt wird), ebenso unsere zuerst abgeleitete Gl. (7) als spezielle Fälle enthalten sind

Ferner bleibt die Beziehung (17) unverändert bestehen, wenn man von der folgenden ausgeht:

$$P(x - x_0) \equiv \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' a_\nu (x - x_0)^\nu,$$

sofern diese Reihe für $|x - x_0| = r$, also für alle $x - x_0 = er$ gleichmäßig konvergiert.

3. Da nach Ungl. (15) des vorigen Paragraphen:

$$\mathfrak{M}\,|P(\mathfrak{e}r)|^2 \leqq \overline{P(r)}^2,$$

so folgt aus (17), daß:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu}\,|a_\nu|^2\cdot r^{2\nu} \leqq \overline{P(r)}^2$$

und hieraus *a fortiori*:

(19) $|a_\nu|\cdot r^\nu < \overline{P(r)}$, also: $|a_\nu| < r^{-\nu}\cdot\overline{P(r)}$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

mit Ausschluß der Gleichheit, abgesehen von dem (trivialen und bei allen Anwendungen des Satzes *niemals* ernstlich in Betracht kommenden) Falle, daß $P(x)$ aus einem *einzigen* Gliede $a_\nu x^\nu$ besteht (also $|a_\nu(\mathfrak{e}r)^\nu|$ *konstant* ist).

Die Ungleichungen (19) werden gewöhnlich als *Cauchyscher Koeffizientensatz* bezeichnet und leisten in der zweiten Form nützliche Dienste zur Abschätzung der Koeffizienten a_ν, während sie in der ersten Form, rückwärts gelesen, eine untere Schranke für den Maximalwert von $|P(x)|$ für alle $x = \mathfrak{e}r$ liefern.

Wendet man die letzte Bemerkung auf eine Reihe von der Form $\mathfrak{P}(x)$ und die spezielle Wahl $\nu = 0$ an, so ergibt sich zunächst:

$$\overline{\mathfrak{P}(r)} > |a_0|. \tag{20}$$

Da es freisteht, r unbegrenzt zu verkleinern und andererseits $a_0 = \mathfrak{P}(0)$ ist, so läßt sich dieses Ergebnis folgendermaßen aussprechen:

Es gibt in jeder beliebigen Nähe von $x = 0$ solche Stellen x, für welche:

$$|\mathfrak{P}(x)| > |\mathfrak{P}(0)|.$$

Ein anderer Beweis und zugleich eine Vervollständigung dieses Satzes wird in § 38 Nr. 4 mitgeteilt werden.

§ 37. Darstellung der Koeffizienten und der Summe einer Potenzreihe $P(x)$ durch Mittelwerte.

1. Wir haben bisher die Koeffizienten a_ν einer Potenzreihe $P(x) \equiv \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu}\, a_\nu x^\nu$ als eine abzählbare Menge *gegebener* Zahlen angesehen, vermöge deren der Wert von $P(x)$ für jede Stelle x des Konvergenzbereiches eindeutig bestimmt ist. Wir wollen jetzt zeigen, daß umgekehrt jene Koeffizienten eindeutig bestimmt sind, wenn die Werte von $P(x)$ für eine passend gewählte abzählbare Menge von Stellen x, nämlich diejenigen Stellen $x = \mathfrak{e}r$ $(\mathfrak{e} = c_n^\varkappa, c_{n+1}^\varkappa, c_{n+p}^\varkappa, \ldots)$, welche zur Mittelwertbildung erforderlich sind, als *bekannt* angesehen werden.

Setzt man:

$$(1) \qquad P(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu} a_\mu x^\mu,$$

so wird für $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$:

$$(2) \qquad x^{-\nu} \cdot P(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu} a_\mu x^{\mu-\nu} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu} a_{\mu+\nu} x^\mu,$$

und diese Reihe konvergiert offenbar *gleichmäßig* für alle x mit einem gewissen Absolutwert $|x| = r$, wenn das nämliche für die Reihe $P(x)$ vorausgesetzt wird (da ja die *Gleichmäßigkeit* der Konvergenz durch den Faktor $x^{-\nu}$ nicht gestört wird). Infolgedessen ergibt sich mit Benutzung von Gl. (19) und (14) des vorletzten Paragraphen (S. 274 bzw. 272):

$$(3) \qquad \mathfrak{M}((er)^{-\nu} \cdot P(er)) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu} a_{\mu+\nu} \mathfrak{M}(er)^\mu.$$

Da aber nach Gl. (21), (22) des vorletzten Paragraphen:

$$\mathfrak{M}(er)^\mu = 0 \quad \text{für } \mu = \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad \mathfrak{M}(er)^0 = 1,$$

so reduziert sich die Gleichung (3) bei Vertauschung ihrer beiden Seiten auf die folgende:

$$(4) \qquad a_\nu = \mathfrak{M}((er)^{-\nu} \cdot P(er)) \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

und es gilt somit der Satz:

Ist die Reihe $P(x) \equiv \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} a_\nu x^\nu$ *gleichmäßig konvergent für alle x mit dem absoluten Betrage $|x| = r$, so lassen sich die Koeffizienten a_ν durch die Formel (4) darstellen.*

Enthält die fragliche Reihe keine negativen Potenzen, reduziert sie sich also auf eine solche von der Form: $\mathfrak{P}(x) \equiv \sum_{0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, so folgt aus (4) durch Nullsetzen von a_ν für $\nu = -1, -2, \ldots$, daß

$$(4\text{a}) \qquad a_\nu = \mathfrak{M}((er)^{-\nu} \cdot \mathfrak{P}(er)) \quad \text{für:} \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

dagegen:

$$(4\text{b}) \qquad \mathfrak{M}((er)^\nu \cdot \mathfrak{P}(er)) = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Ist ferner:

$$(5) \qquad f(x) = P(x - x_0) \equiv \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} a_\nu (x - x_0)^\nu$$

und konvergiert diese Reihe *gleichmäßig* für alle der Bedingung. $|x - x_0| = r$ genügenden x, so findet man analog mit Gl. (4):

$$(6) \qquad a_\nu = \mathfrak{M}((\mathfrak{e}r)^{-\nu} \cdot P(\mathfrak{e}r)) = \mathfrak{M}((\mathfrak{e}r)^{-\nu} \cdot f(x_0 + \mathfrak{e}r)).$$

2. Bezeichnet man wieder mit $\overline{P(r)}$ das Maximum von $|P(x)|$ auf dem Kreise $|x| = r$, so folgt aus Gl. (4) nach bekannter Schlußweise:

$$(7) \qquad |a_\nu| \leqq r^{-\nu} \cdot \overline{P(r)},$$

d. h. man erhält auf diese Weise, ohne den Weg über den Mittelwertsatz von Nr. 2 des vorigen Paragraphen zu nehmen, wieder den *Cauchyschen Koeffizientensatz* (Ungl. (19) des vorigen Paragraphen), freilich in etwas unvollkommenerer Form, insofern als hier nicht unmittelbar ersichtlich wird, daß das *Gleichheits*zeichen in Wahrheit ausschließlich dann gilt, wenn die Reihe $P(x)$ sich auf das *einzige* Glied $a_\nu x^\nu$ reduziert. Für die üblichen Anwendungen des Satzes (der in der Regel in prinzipiell ähnlicher Art wie an dieser Stelle, also schließlich in der Form (7) hergeleitet wird) ist diese kleine Unvollkommenheit ohne Belang. Immerhin wäre es z. B. nicht möglich, das am Schlusse des vorigen Paragraphen ausgesprochene Ergebnis aus der Fassung (7) des fraglichen Satzes zu erschließen.

3. Ebenso wie die *Koeffizienten* läßt sich auch die *Summe* der Reihe $P(x) \equiv \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_\nu\, a_\nu x^\nu$ für jedes dem *Innern* ihres Konvergenzbereiches angehörige x durch einen gewissen *Mittelwert* darstellen. Angenommen, die Reihe konvergiere *gleichmäßig* für alle Stellen auf den beiden Kreisen $|x| = R_0$ und $|x| = R$, wo $R_0 < R$. Sie konvergiert dann *absolut* für alle der Bedingung:

$$(8) \qquad R_0 < |x| < R$$

genügenden Stellen x und *gleichmäßig* für jedes der Bedingung: $R_0 \leqq r \leqq R$ genügende $|x| = r$, so daß für jedes solche r auf Grund von Gl. (4) die Beziehung gilt:

$$a_\nu = \mathfrak{M}((\mathfrak{e}r)^{-\nu} \cdot P(\mathfrak{e}r)).$$

Wählt man für die a_ν mit positivem Index: $r = R$, für diejenigen mit negativem Index: $r = R_0$ und schreibt in letzterem Falle $a_{-\nu}$ statt a_ν, wobei dann wieder $\nu > 0$ zu nehmen ist, so wird:

$$a_\nu = \mathfrak{M}((\mathfrak{e}R)^{-\nu} \cdot P(\mathfrak{e}R)) \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$
$$a_{-\nu} = \mathfrak{M}((\mathfrak{e}R_0)^{\nu} \cdot P(\mathfrak{e}R_0)) \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

und daher für jedes der Bedingung (8) genügende x:

$$(9) \quad P(x) = \sum_0^\infty {}_\nu\, \mathfrak{M}((\mathfrak{e}R)^{-\nu} \cdot P(\mathfrak{e}R)) \cdot x^\nu + \sum_1^\infty {}_\nu\, \mathfrak{M}((\mathfrak{e}R_0)^{\nu} \cdot P(\mathfrak{e}R_0)) \cdot x^{-\nu}$$

oder, wenn man mit Benutzung der (rückwärts gelesenen) Gleichung (14) des vorletzten Paragraphen (S. 273) den Faktor $x^{\pm\nu}$ in die betreffenden Mittelwerte hineinzieht:

$$(10) \qquad P(x) = \sum_0^\infty {}_\nu\, \mathfrak{M}\left(\left(\frac{x}{\mathfrak{e}R}\right)^\nu \cdot P(\mathfrak{e}R)\right) + \sum_1^\infty {}_\nu\, \mathfrak{M}\left(\left(\frac{\mathfrak{e}R_0}{x}\right)^\nu \cdot P(\mathfrak{e}R_0)\right).$$

Des weiteren ist es auf Grund der (wiederum rückwärts gelesenen) Gleichung (19), S. 274) gestattet, die Reihenfolge von Summation und Mittelwertbildung zu vertauschen, also zu setzen:

$$(11) \qquad P(x) = \mathfrak{M}\left(\sum_0^\infty {}_\nu \left(\frac{x}{\mathfrak{e}R}\right)^\nu \cdot P(\mathfrak{e}R)\right) + \mathfrak{M}\left(\sum_1^\infty {}_\nu \left(\frac{\mathfrak{e}R_0}{x}\right)^\nu \cdot P(\mathfrak{e}R_0)\right),$$

falls die hierbei in Betracht kommenden Reihen, nämlich:

$$P(\mathfrak{e}R) \cdot \sum_0^\infty {}_\nu \left(\frac{x}{\mathfrak{e}R}\right)^\nu \qquad \text{und} \qquad P(\mathfrak{e}R_0) \cdot \sum_1^\infty {}_\nu \left(\frac{\mathfrak{e}R_0}{x}\right)^\nu$$

auf den Kreisen mit den Radien R und R_0 (d. h. für alle möglichen Werte des Einheitsfaktors $\mathfrak{e}$) *gleichmäßig* konvergieren. Dies ist aber sicher der Fall, da infolge der Bedingung (8):

$$\left|\frac{x}{R}\right| < 1, \quad \left|\frac{R_0}{x}\right| < 1$$

ist und daher die fraglichen Reihen für alle möglichen $\mathfrak{e}$ sogar *absolut und gleichmäßig* konvergieren (woran durch die längs der Kreise $(0)R$ und $(0)R_0$ *stetigen*, also *beschränkten* Faktoren $P(\mathfrak{e}R)$, $P(\mathfrak{e}R_0)$ nichts geändert wird, auch wenn man sie unter die Summenzeichen zieht). Da überdies:

$$(12) \qquad \begin{cases} P(\mathfrak{e}R) \cdot \sum_0^\infty {}_\nu \left(\frac{x}{\mathfrak{e}R}\right)^\nu = P(\mathfrak{e}R) \cdot \frac{\mathfrak{e}R}{\mathfrak{e}R - x} \\ P(\mathfrak{e}R_0) \cdot \sum_1^\infty {}_\nu \left(\frac{\mathfrak{e}R_0}{x}\right)^\nu = -P(\mathfrak{e}R_0) \cdot \frac{\mathfrak{e}R_0}{\mathfrak{e}R_0 - x}, \end{cases}$$

so ergibt sich durch Einsetzen dieser Summen in Gl. (11):

$$(13) \qquad P(x) = \mathfrak{M}\,\frac{\mathfrak{e}R \cdot P(\mathfrak{e}R)}{\mathfrak{e}R - x} - \mathfrak{M}\,\frac{\mathfrak{e}R_0 \cdot P(\mathfrak{e}R_0)}{\mathfrak{e}R_0 - x}$$

als die angekündigte, für alle der Bedingung: $R_0 < |x| < R$ genügenden x gültige Mittelwertdarstellung. Entsprechend ergibt sich wiederum, wenn die Reihe $P(x)$ sich auf eine solche von der Form $\mathfrak{P}(x)$ reduziert und diese letztere für $|x| = R$ gleichmäßig konvergiert:

$$(13\text{a}) \qquad \mathfrak{P}(x) = \mathfrak{M}\,\frac{\mathfrak{e}R \cdot \mathfrak{P}(\mathfrak{e}R)}{\mathfrak{e}R - x} \quad (0 \leqq |x| < R)$$

Diese Beziehungen zeigen in etwas prägnanterer Darstellungsform, was ja inhaltlich schon aus den Koeffizientendarstellungen (4) bzw. (4a) zu ersehen war, daß nämlich die Werte von $P(x)$ bzw. $\mathfrak{P}(x)$ für alle der Bedingung $R_0 < |x| < R$ bzw. $0 \leqq |x| < R$ genügenden Stellen x vollständig durch diejenigen Werte bestimmt erscheinen, welche $P(x)$ für eine abzählbare Menge von Stellen auf den Kreisen $|x| = R_0$ und $|x| = R$ bzw. $\mathfrak{P}(x)$ auf dem Kreise $|x| = R$ annimmt. Da man andererseits von den Beziehungen (13) bzw. (13a), wenn man den Weg, der zu ihnen geführt, rückwärts verfolgt, auch wieder zu den ursprünglichen Reihendarstellungen gelangen kann, so ist somit ein Prinzip gegeben, das sich späterhin als außerordentlich nützlich erweisen wird. Wenn es nämlich gelingt nachzuweisen, daß eine Funktion $f(x)$ unter gewissen Voraussetzungen einer Mittelwertbeziehung von der Form (13) bzw. (13a) genügt (wie das später tatsächlich der Fall sein wird), so resultiert daraus unmittelbar die Möglichkeit, $f(x)$ in eine Reihe von der Form $P(x)$ bzw. $\mathfrak{P}(x)$ zu entwickeln.

§ 38. Verhalten einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ für relativ große und relativ kleine Werte von x. — Über das Maximum von $|\mathfrak{P}(x)|$ für $|x| \leq r$. — Identitätssätze für Potenzreihen $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{P}(x - x_0)$.

1. Wir machen zunächst eine Anwendung des *Cauchy*schen Koeffizientensatzes, um das Verhalten einer *beständig* konvergierenden Potenzreihe $\mathfrak{P}(x) \equiv \sum_{0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ für unendlich wachsende Werte von x zu untersuchen.

Es bedeute a_n *irgendeinen von Null verschiedenen* Koeffizienten jener Reihe außer a_0, $\overline{\mathfrak{P}(r)}$ wieder das Maximum von $|\mathfrak{P}(x)|$ für alle x mit dem absoluten Betrage $|x| = r$, so hat man

$$\overline{\mathfrak{P}(r)} > |a_n| \cdot r^n \quad (n \geqq 1). \tag{1}$$

Da man die rechte Seite dieser Ungleichung durch Wahl von r *beliebig groß* machen kann, so folgt, daß der *Maximalwert* von $|\mathfrak{P}(x)|$ bei hinlänglicher Vergrößerung von $|x|$ eine *beliebig große* Zahl übersteigt, oder anders ausgesprochen, daß $|\mathfrak{P}(x)|$ *unter anderen Werten* jedenfalls auch *beliebig große* annimmt, d. h. man hat stets:

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} |\mathfrak{P}(x)| = \infty. \tag{2a}$$

Dagegen läßt sich hieraus keineswegs folgern, daß $|\mathfrak{P}(x)|$ für irgendeinen Bereich $|x| \geqq R$ *ausschließlich beliebig große* Werte annimmt, in der Art, wie das für jede *ganze rationale Funktion* $g(x)$ bewiesen werden konnte

(§ 20, Nr. 3, S. 182). Dies ist in Wahrheit auch gar nicht der Fall: vielmehr wird später noch gezeigt werden (s. § 57, Nr. 7), daß die Reihe $\mathfrak{P}(x)$, falls sie sich nicht auf eine ganze rationale Funktion reduziert, für hinlänglich große Werte von x (anders ausgesprochen: in der Nähe der Stelle $x = \infty$) jedem *beliebigen* Werte, insbesondere auch dem Werte *Null* beliebig nahe kommt und daß daher neben Gl. (2a) stets auch die folgende besteht:

$$\text{(2b)} \qquad \underline{\lim}_{x \to \infty} |\mathfrak{P}(x)| = 0.$$

Das analoge gilt für Potenzreihen von der Form:

$$\text{(3)} \qquad \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_1^\infty{}_\nu\, a_{-\nu} x^{-\nu}, \quad \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x - x_0}\right) = \sum_1^\infty{}_\nu\, a_{-\nu}(x - x_0)^{-\nu},$$

und daher auch für:

$$\text{(4)} \qquad P(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\nu\, a_\nu x^\nu, \quad P(x - x_0) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\nu\, a_\nu (x - x_0)^\nu,$$

falls diese Reihen für *beliebig kleine* Werte von $|x|$ bzw. $|x - x_0|$ konvergieren, d. h. man kann in diesem Falle eine positive Zahl ϱ *so klein* fixieren, daß $\left|\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right|$, $|P(x)|$ bzw. $\left|\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x - x_0}\right)\right|$, $|P(x - x_0)|$ für $|x| \leqq \varrho$ bzw. $|x - x_0| \leqq \varrho$ unter anderen Werten auch *beliebig große* annehmen.

2. Es sei jetzt wieder $\mathfrak{P}(x) \equiv \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu x^\nu$ *gleichmäßig* konvergent für alle x mit dem absoluten Betrage $|x| = r$, also *absolut* konvergent für $|x| < r$ und schließlich *gleichmäßig* konvergent für $|x| \leqq r$.[1]) Es besitzt dann $|\mathfrak{P}(x)|$ für die Gesamtheit der durch die Bedingung $|x| \leqq r$ charakterisierten Stellen x ein *reales Maximum*, welches mit $\mathfrak{P}^{(r)}$ bezeichnet werden möge. Dann soll gezeigt werden:

Es gibt auf dem Kreise $|x| = r$ mindestens eine Stelle X' (so daß also $|X'| = r$), für welche $|\mathfrak{P}(X')| = \mathfrak{P}^{(r)}$ wird.[2])

Beweis. Setzt man:

$$\text{(5)} \qquad \mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}_n(x) + \mathfrak{R}_n(x), \quad \text{wo:} \quad \mathfrak{P}_n(x) = \sum_0^n{}_\nu\, a_\nu x^\nu,$$

so läßt sich (infolge der *gleichmäßigen* Konvergenz von $\mathfrak{P}(x)$ für $|x| \leqq r$)

---

1) S. § 32, Nr. 1, Fußn. 1, S. 254.

2) Es sei ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß dieses $\mathfrak{P}^{(r)}$ sich *nicht*, wie das $\overline{\mathfrak{P}(r)}$ der vorigen Nummer, *von vornherein* nur auf die Kreis*linie* $|x| = r$, sondern auf die Kreis*fläche* $|x| \leqq r$ bezieht. Der zu beweisende Satz besagt erst, daß *schließlich* der Wert von $\overline{\mathfrak{P}(r)}$ mit $\mathfrak{P}^{(r)}$ zusammenfällt.

zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ ein n so fixieren, daß:

$$|\mathfrak{R}_n(x)| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad |x| \leqq r,$$

und es ergeben sich alsdann aus Gl. (5) die beiden Ungleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll}(6\text{a}) & |\mathfrak{P}(x)| \geqq |\mathfrak{P}_n(x)| - |\mathfrak{R}_n(x)| > |\mathfrak{P}_n(x)| - \varepsilon \\ (6\text{b}) & |\mathfrak{P}_n(x)| \geqq |\mathfrak{P}(x)| - |\mathfrak{R}_n(x)| > |\mathfrak{P}(x)| - \varepsilon\end{array}\right\} (|x| \leqq r)$$

Ist x_0 eine dem Bereiche $|x| \leqq r$ angehörige Stelle, für welche

$$|\mathfrak{P}(x_0)| = \mathfrak{P}^{(r)}$$

wird, so folgt aus Ungl. (6b), daß:

$$(7) \qquad |\mathfrak{P}_n(x_0)| > |\mathfrak{P}(x_0)| - \varepsilon, \quad \text{also:} \quad > \mathfrak{P}^{(r)} - \varepsilon.$$

Andererseits besitzt auch die ganze Funktion $\mathfrak{P}_n(x)$ im Bereiche $|x| \leqq r$ ein gewisses *Maximum*, welches nach § 21 Nr. 3 (S. 188) *ausschließlich* auf dem Kreise $|x| = r$, etwa an der Stelle X_0 (wo $|X_0| = r$) angenommen wird. Für diesen Maximalwert $|\mathfrak{P}_n(X_0)|$ hat man dann zunächst:

$$(8) \qquad |\mathfrak{P}_n(X_0)| \geqq |\mathfrak{P}_n(x_0)|$$

und daher mit Benutzung von Ungl. (7):

$$(9) \qquad |\mathfrak{P}_n(X_0)| > \mathfrak{P}^{(r)} - \varepsilon,$$

schließlich mit Benutzung von Ungl. (6a):

$$(10) \qquad |\mathfrak{P}(X_0)| > |\mathfrak{P}_n(X_0)| - \varepsilon > \mathfrak{P}^{(r)} - 2\varepsilon$$

für eine gewisse Stelle X_0 mit dem Absolutwerte $|X_0| = r$ Da es hierbei freisteht, ε unbegrenzt zu verkleinern (wobei X_0 im allgemeinen variieren wird), so zeigt diese Ungleichung, daß die *obere Grenze* von $|\mathfrak{P}(x)|$ für die Stellen $|x| = r$ *mindestens gleich* $\mathfrak{P}^{(r)}$ sein muß, und da sie andererseits *nicht größer* als $\mathfrak{P}^{(r)}$ sein kann, so ist sie wirklich *gleich* $\mathfrak{P}^{(r)}$. Alsdann gibt es aber infolge der Stetigkeit von $|\mathfrak{P}(x)|$ längs des Kreises $|x| = r$ daselbst mindestens eine Stelle X', derart, daß:

$$(11) \qquad |\mathfrak{P}(X')| = \mathfrak{P}^{(r)} \quad (\text{wo also: } |X'| = r).$$

Damit ist der ausgesprochene Satz bewiesen.[1])

3. Ist die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x) \equiv \sum_0^\infty a_\nu x^\nu$ nicht beständig divergent, so

1) Der Beweis läßt die Möglichkeit offen, daß $|\mathfrak{P}(x)|$ den Maximalwert $\mathfrak{P}^{(r)}$ noch für irgendwelche Stellen *im Innern* des Kreises $|x| = r$ annehmen könnte. Daß dies tatsächlich *nicht* der Fall ist, wird sich bei späterer Gelegenheit ergeben (s § 44, Nr. 3). Für eine zunächst in Aussicht genommene Anwendung (s. § 39, Nr. 3, S. 295) genügt indessen das vorläufig gewonnene Ergebnis

hat man nicht nur:

(12) $$\mathfrak{P}(0) = a_0,$$

sondern infolge der Stetigkeit von $\mathfrak{P}(x)$ auch:

(13) $$\lim_{x \to 0} \mathfrak{P}(x) = a_0.$$

Ist nun a_0 *von Null verschieden*, so besagen diese beiden Gleichungen, daß $\mathfrak{P}(x)$ nicht nur für $x = 0$ selbst, sondern auch in hinlänglicher Nähe der Stelle $x = 0$ *von Null verschieden* sein muß. Mit Benutzung des *Cauchy*schen Koeffizientensatzes können wir aber geradezu eine *bestimmte Umgebung*: $|x| \leqq \varrho$ der Stelle $x = 0$ angeben, für welche durchweg $|\mathfrak{P}(x)| > 0$ ausfällt.[1])

Es sei wiederum $r > 0$ so gewählt, daß die Reihe $\mathfrak{P}(x)$ auf dem Kreise $|x| = r$ *gleichmäßig* konvergiert, also $|\mathfrak{P}(x)|$ daselbst ein gewisses Maximum $\overline{\mathfrak{P}(r)}$ besitzt Nach dem *Cauchy*schen Koeffizientensatze hat man alsdann für jedes ν:

(14) $$|a_\nu| r^\nu < \overline{\mathfrak{P}(r)}.$$

Wird jetzt $|x| < r$ angenommen, so findet man:

(15) $$\left|\sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu\right| \leqq \sum_1^\infty {}^\nu |a_\nu| r^\nu \cdot \left|\frac{x}{r}\right|^\nu$$

also mit Beziehung auf die Ungl. (15):

(16) $$\left|\sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu\right| < \overline{\mathfrak{P}(r)} \cdot \sum_1^\infty {}^\nu \left|\frac{x}{r}\right|^\nu = \overline{\mathfrak{P}(r)} \cdot \frac{|x|}{r - |x|}.$$

---

1) Es läßt sich dies auch *ohne* Benutzung jenes *Cauchy*schen Satzes erzielen Doch wird hierbei die entsprechende Umgebung $|x| \leqq \varrho'$ im allgemeinen *kleiner* ausfallen. Nimmt man an, daß $\mathfrak{P}(x)$ auf dem Kreise $|x| = r$ noch *absolut* konvergiert, und setzt sodann:

$$\sum_0^\infty {}^\nu |a_\nu| r^\nu = \mathfrak{P}[r],$$

so ergibt sich ohne weiteres, daß für jedes ν:

$$|a_\nu| r^\nu < \mathfrak{P}[r],$$

und man findet daher, genau wie im Text, als Ausdruck für den Radius ϱ' der fraglichen Umgebung nach Analogie von Gl. (18):

$$\varrho' = \frac{|a_0| \, r}{|a_0| + \mathfrak{P}[r]}.$$

Dabei wird aber, wenn nicht sämtliche a_ν den gleichen Einheitsfaktor besitzen, stets:

$$\mathfrak{P}[r] > \overline{\mathfrak{P}(r)}, \quad \text{also:} \quad \varrho' < \varrho.$$

Infolgedessen wird:

$$(17) \qquad \left|\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu x^\nu\right| < |a_0| \quad \text{(mit Ausschluß der Gleichheit)},$$

wenn nur:

$$\overline{\mathfrak{P}(r)} \cdot \frac{|x|}{r - |x|} \leqq |a_0|,$$

d. h. wenn:

$$(18) \qquad |x| \leqq \varrho, \quad \text{wo:} \quad \varrho = \frac{|a_0| \cdot r}{|a_0| + \overline{\mathfrak{P}(r)}}.$$

Alsdann wird aber für $|x| \leqq \varrho$:

$$(19) \qquad |\mathfrak{P}(x)| = \left|\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu x^\nu\right| \geqq |a_0| - \left|\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu x^\nu\right| > 0,$$

also $\mathfrak{P}(x)$ für $|x| \leqq \varrho$ durchweg *von Null verschieden.*

4. Des weiteren gilt für den Fall $\mathfrak{P}(0) \neq 0$ der folgende Satz, welcher eine zunächst nur teilweise[1]) Übertragung eines für ganze rationale Funktionen bewiesenen Satzes (§ 21, Nr. 2, S. 185) auf Potenzreihen darstellt, nämlich:

Ist $\mathfrak{P}(0) \neq 0$, so gibt es in beliebig kleiner Umgebung von $x = 0$ stets solche Stellen x, für welche

$$|\mathfrak{P}(x)| > |\mathfrak{P}(0)|,$$

als auch solche, für welche:

$$|\mathfrak{P}(x)| < |\mathfrak{P}(0)|.$$

Es kann also $|\mathfrak{P}(0)|$, verglichen mit allen möglichen Werten $|\mathfrak{P}(x)|$ einer gewissen Umgebung von $x = 0$ weder ein Maximum noch ein Minimum sein.[2])

Beweis. Um den Fall mit zu umfassen, daß von den unmittelbar auf a_0 folgenden Koeffizienten a_ν einer oder mehrere den Wert *Null* haben, werde $\mathfrak{P}(x)$ in die Form gesetzt:

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_m x^m + \sum_{m+1}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu x^\nu,$$

wo also $m \geqq 1$ und a_m den *ersten* nächst a_0 nicht verschwindenden Koeffizienten bedeutet, x dem Bereiche absoluter Konvergenz von $\mathfrak{P}(x)$ an-

1) Insofern, als es sich hier zunächst nur um das Verhalten von $\mathfrak{P}(x)$ in der Umgebung der besonderen Stelle $x = 0$ handelt. Die Ausdehnung auf den allgemeinen Fall $\mathfrak{P}(x_0) \neq 0$ kann erst später erfolgen (s. § 44, Nr. 3)

2) Ist $\mathfrak{P}(0) = 0$, so ist $|\mathfrak{P}(0)|$ selbstverständlich auch *kein Maximum*, dagegen, wie des näheren aus Nr. 5 hervorgeht, ein *Minimum* für alle $|\mathfrak{P}(x)|$ einer gewissen Umgebung der Stelle $x = 0$ in dem Sinne, daß in dieser Umgebung durchweg $|\mathfrak{P}(x)| > 0$.

gehören soll. Man hat also:

$$(20) \qquad \frac{\mathfrak{P}(x)}{a_0} = 1 + \frac{a_m}{a_0} x^m + \sum_{m+1}^{\infty} \frac{a_\nu}{a_0} x^\nu.$$

Setzt man sodann:

$$(21) \qquad |x| = \varrho \quad \text{und für } \nu \geqq m: \quad \frac{a_\nu}{a_0} x^\nu = (\alpha_\nu + \beta_\nu i) \cdot \varrho^\nu,$$

so läßt sich auf Grund eines früher bewiesenen Hilfssatzes (§ 21, Nr. 1, S. 184) der *Einheitsfaktor* von x *so* bestimmen, daß der *reelle Teil* von $\alpha_m + \beta_m i$ von Null verschieden ist und ein vorgeschriebenes Vorzeichen erhält, zunächst etwa das *positive*. Um dies kenntlich zu machen, werde gesetzt:

$$(22) \qquad \frac{a_m}{a_0} x^m = (|\alpha_m| + \beta_m i) \cdot \varrho^m,$$

also:

$$(23) \qquad \frac{\mathfrak{P}(x)}{a_0} = 1 + (|\alpha_m| + \beta_m i) \cdot \varrho^m + \sum_{m+1}^{\infty} (\alpha_\nu + \beta_\nu i) \cdot \varrho^\nu$$

$$= 1 + |\alpha_m| \cdot \varrho^m + \varrho^{m+1} \cdot \sum_{0}^{\infty} \alpha_{m+\nu+1} \varrho^\nu + i \cdot \varrho^m \cdot \sum_{0}^{\infty} \beta_{m+\nu} \varrho^\nu$$

und daher:

$$(24) \qquad \left|\frac{\mathfrak{P}(x)}{a_0}\right|^2 = \left(1 + |\alpha_m| \cdot \varrho^m + \varrho^{m+1} \cdot \sum_{0}^{\infty} \alpha_{m+\nu+1} \varrho^\nu\right)^2 + \varrho^{2m} \cdot \left(\sum_{0}^{\infty} \beta_{m+\nu} \varrho^\nu\right)^2,$$

Denkt man sich die Quadrate der beiden absolut konvergierenden reellen Reihen nach der *Cauchy*schen Multiplikationsregel (I_2, § 58, Nr. 5, S. 412) ausgeführt, so erscheinen dieselben nach steigenden Potenzen von ϱ geordnet und nach Zusammenfassung der beiden Potenzreihen in eine einzige nimmt die Beziehung (24) die Form an:

$$(25) \qquad \left|\frac{\mathfrak{P}(x)}{a_0}\right|^2 = 1 + 2|\alpha_m| \cdot \varrho^m + \varrho^{m+1} \cdot \mathfrak{P}_1(\varrho),$$

wo $\mathfrak{P}_1(\varrho)$ eine absolut konvergente Reihe in ϱ bedeutet, anders geschrieben:

$$(26) \qquad \left|\frac{\mathfrak{P}(x)}{a_0}\right|^2 = 1 + |\alpha_m| \cdot \varrho^m + \varrho^m(|\alpha_m| + \varrho \cdot \mathfrak{P}_1(\varrho))$$

$$\geqq 1 + |\alpha_m| \cdot \varrho^m + \varrho^m(|\alpha_m| - \varrho \cdot |\mathfrak{P}_1(\varrho)|).$$

Durch hinlängliche Verkleinerung von ϱ — etwa für $\varrho \leqq \delta$ — kann man (ganz analog wie in Nr. 3) erzielen, daß der letzte Klammerausdruck *positiv* ausfällt, und man findet daher:

$$(27) \qquad \left|\frac{\mathfrak{P}(x)}{a_0}\right|^2 > 1 + |\alpha_m| \cdot \varrho^m > 1,$$

und schließlich:

$$(28) \qquad |\mathfrak{P}(x)| > |a_0| = |\mathfrak{P}(0)| \quad \text{für} \quad |x| = \varrho \leqq \delta$$

(sc. nachdem der Einheitsfaktor von x gemäß der Gl. (22) bestimmt ist).

Wird jetzt zweitens der Einheitsfaktor von x so ausgewählt, daß der *reelle Teil* von $\alpha_m + \beta_m i$ das *negative* Vorzeichen erhält, also an die Stelle der Beziehung (22) eine solche von folgender Form tritt:

$$(29) \qquad \frac{a_m}{a_0} x^m = (-|\alpha_m| + \beta_m i) \cdot \varrho^m,$$

so findet man analog mit Gl. (24) und (26):

$$(30) \quad \left|\frac{\mathfrak{P}(x)}{a_0}\right|^2 = \left(1 - |\alpha_m| \cdot \varrho^m + \varrho^{m+1} \sum_0^\infty {}^\nu \alpha_{m+\nu+1} \varrho^\nu\right)^2 + \varrho^{2m} \left(\sum_0^\infty {}^\nu \beta_{m+\nu} \varrho^\nu\right)^2,$$

$$= 1 - |\alpha_m| \cdot \varrho^m - \varrho^m(|\alpha_m| - \varrho \cdot \mathfrak{P}_2(\varrho)),$$

also:

$$\left|\frac{\mathfrak{P}(x)}{a_0}\right|^2 \leqq 1 - |\alpha_m| \cdot \varrho^m - \varrho^m(|\alpha_m| - \varrho \cdot |\mathfrak{P}_2(\varrho)|),$$

und bei hinlänglicher Verkleinerung von ϱ, vermöge deren der letzte Klammerausdruck wieder positiv ausfällt, etwa für $\varrho \leqq \delta'$:

$$(31) \qquad \left|\frac{\mathfrak{P}(x)}{a_0}\right|^2 < 1 - |\alpha_m| \cdot \varrho^m < 1$$

und schließlich:

$$(32) \qquad |\mathfrak{P}(x)| < |a_0| = \mathfrak{P}(0) \quad \text{für} \quad |x| = \varrho \leqq \delta'.$$

5 Ist $\mathfrak{P}(x) = 0$ für $x = 0$, so muß jedenfalls $a_0 = 0$ sein. Sei dann a_n, wo $n \geqq 1$, der *erste* von Null verschiedene unter den Koeffizienten a_ν, so hat man:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_n^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu = x^n \cdot \sum_0^\infty {}^\nu a_{n+\nu} x^\nu$$

$$(33) \qquad = x^n \cdot \mathfrak{P}_1(x),$$

wo $\mathfrak{P}_1(0) = a_n$ *von Null verschieden* ist. Man sagt in diesem Falle, die Stelle $x = 0$ sei eine *n-fache Nullstelle* oder eine *Nullstelle n^{ter} Ordnung* für $\mathfrak{P}(x)$.

Da sodann nach dem zuvor Gesagten eine bestimmte positive Zahl ϱ existiert, so daß $\mathfrak{P}_1(x)$ für *keinen* der Bedingung $|x| \leqq \varrho$ genügenden Wert x verschwindet, so folgt, daß auch $\mathfrak{P}(x)$ außer $x = 0$ *keine weitere* Nullstelle x' *innerhalb* des Kreises mit dem Radius ϱ besitzen kann.

Hieraus erkennt man aber, daß allemal, wenn $\mathfrak{P}(x)$ *in jeder beliebigen Nähe* von $x = 0$ *Nullstellen* besitzt (in welchem Falle dann auf Grund des Satzes von Nr. 3 die Stelle $x = 0$ *selbst* eine *Nullstelle* sein muß und zugleich ein *Häufungspunkt* von Nullstellen ist) $\mathfrak{P}(x)$ überhaupt *keinen von Null verschiedenen* Koeffizienten a_ν enthalten kann. Denn wäre a_n *der erste von Null verschiedene* Koeffizient, so hätte man, wie oben:

$$\mathfrak{P}(x) = x^n \cdot \mathfrak{P}_1(x), \quad \text{wo:} \quad \mathfrak{P}_1(0) = a_n,$$

und es müßte daher eine bestimmte Umgebung der Stelle $x=0$ existieren, innerhalb deren $\mathfrak{P}(x)$ keine weitere Nullstellen besitzt. Somit muß für jeden Wert von ν: $a_\nu = 0$ sein, d. h. die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ *verschwindet* in diesem Falle *identisch.*

Daraus folgt noch: *Stimmen die Werte zweier Potenzreihen*

$$\mathfrak{P}_1(x) = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu \quad \textit{und} \quad \mathfrak{P}_2(x) = \sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu$$

für Stellen in jeder beliebigen Nähe von $x=0$ überein, so sind die beiden Reihen identisch, d. h. man hat: $a_\nu = b_\nu$ für jeden Wert von ν.

Denn die Reihe $\mathfrak{P}_1(x) - \mathfrak{P}_2(x) = \sum_0^\infty{}^\nu (a_\nu - b_\nu)x^\nu$ würde für alle jene Stellen verschwinden, folglich hat man $a_\nu - b_\nu = 0$ für jeden Wert von ν.

6. Ersetzt man in den vorangehenden Betrachtungen x durch $(x-x_0)$, so gehen die betreffenden Ergebnisse in die folgenden über:

Ist $f(x) = \mathfrak{P}(x-x_0) = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu (x-x_0)^\nu$ und $f(x_0) = a_0$ von Null verschieden, so läßt sich eine bestimmte Umgebung der Stelle x_0 fixieren, innerhalb deren $f(x)$ nicht verschwindet; und zwar gibt es in beliebiger Nähe von x_0 solche Stellen x, für welche $|f(x)| > |f(x_0)|$, als auch solche, für welche $|f(x)| < |f(x_0)|$.[1] *Ist $f(x_0) = 0$ und a_n der erste von Null verschiedene Koeffizient, so daß also:*

$f(x) = (x-x_0)^n \cdot \sum_0^\infty{}^\nu a_{n+\nu}(x-x_0)^\nu$, so heißt die Stelle x_0 eine n-fache Nullstelle für $f(x)$. Alsdann existiert eine bestimmte Umgebung der Stelle x_0, innerhalb deren $f(x)$ keine weitere Nullstelle besitzt.

Gibt es in jeder noch so kleinen Umgebung von x_0 Stellen x, für welche $\mathfrak{P}(x-x_0)$ verschwindet, so ist $\mathfrak{P}(x-x_0)$ identisch Null.

Stimmen die Werte zweier Potenzreihen $\mathfrak{P}_1(x-x_0)$ und $\mathfrak{P}_2(x-x_0)$ für Stellen in jeder beliebig kleinen Umgebung von x_0 überein, so sind die beiden Reihen identisch.

---

1) Mit anderen Worten: Im Falle $f(x_0) \neq 0$ ist $|f(x_0)|$ verglichen mit allen Werten $|\mathfrak{P}(x-x_0)|$ einer gewissen Umgebung der Stelle x_0 *weder ein Maximum noch ein Minimum.* Dabei bleibt die auf das *Maximum*-bezügliche Aussage auch im Falle $f(x_0) = 0$ selbstverständlich gültig, während dann $|f(x_0)|$ als *Minimum* erscheint.

7. Für Reihen nach *positiven* und *negativen* Potenzen von x bzw. $(x - x_0)$ läßt sich aus der Koeffizientendarstellung Gl. (4) des vorigen Paragraphen zunächst noch folgendes erschließen. Es sei $P(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{\nu} a_\nu x^\nu$ für $|x| = r$ *gleichmäßig konvergent* und *beständig Null*. Dann folgt aus der Beziehung: $a_\nu = \mathfrak{M}((\mathfrak{e}r)^{-\nu} \cdot P(\mathfrak{e}r))$, daß $a_\nu = 0$ sein muß für jeden Wert von ν, so daß also $P(x)$ *identisch Null* ist. Das Analoge gilt für eine Reihe von der Form $P(x - x_0)$. Hieraus folgt:

> *Sind die beiden Potenzreihen $P_0(x)$, $P_1(x)$ bzw. $P_0(x - x_0)$, $P_1(x - x_0)$ gleichmäßig konvergent für alle x, welche der Bedingung genügen: $|x| = r$ bzw. $|x - x_0| = r$, und ist für alle solchen Werte x: $P_0(x) = P_1(x)$ bzw. $P_0(x - x_0) = P_1(x - x_0)$, so sind $P_0(x)$ und $P_1(x)$ bzw. $P_0(x - x_0)$ und $P_1(x - x_0)$ identisch.*

Die im vorstehenden ausgesprochenen Sätze, welche gestatten, aus der *Gleichheit* zweier Potenzreihen für ein gewisses beschränktes Wertegebiet der Variablen auf ihre völlige *Identität* zu schließen, lassen noch eine erhebliche, für die weiteren Betrachtungen fundamentale Erweiterung zu. Es wird sich nämlich zeigen, daß die *Identität* zweier Potenzreihen (auch solcher von der Form $P(x)$ bzw. $P(x - x_0)$) schon dann gefolgert werden kann, wenn die *Gleichheit* ihrer Summen für (unendlich viele) Stellen in jeder noch so kleinen Umgebung einer *ganz beliebigen Stelle* im Innern ihres Konvergenzbereiches feststeht. Um dieses Resultat zu gewinnen, ist eine Vorbetrachtung über die Umformung einer *Summe von unendlich vielen Potenzreihen* in eine einzige Potenzreihe notwendig, die wir mit Rücksicht auf anderweitige Anwendungen gleich in etwas weiterem Umfange anstellen, als für den angedeuteten Zweck zunächst erforderlich wäre.

§ 39. Summen unendlich vieler Potenzreihen: Der Cauchysche und der (erweiterte) Weierstraßsche Doppelreihensatz.

1. Hat man eine *endliche* Anzahl von Potenzreihen:

$$(1) \qquad P_\nu(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{\mu} a_\mu^{(\nu)} \cdot x^\mu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

welche für einen gewissen Bereich: $R_0 < |x| < R$ oder $R_0 \leq |x| \leq R$ gemeinsam konvergieren, so folgt aus der Regel für die Addition unendlicher Reihen ohne weiteres, daß man setzen darf:

$$(2) \qquad \sum_0^n {}^{\nu} P_\nu(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{\mu} A_\mu x^\mu \quad \left(\text{wo:} \quad A_\mu = \sum_0^n {}^{\nu} a_\mu^{(\nu)}\right),$$
$$= P(x)$$

und zwar konvergiert dann $P(x)$ *zum mindesten* für jenen Bereich $R_0 < |x| < R$, bzw. $R_0 \leqq |x| \leqq R$.

Man erkennt leicht, daß der wahre Konvergenzbereich von $P(x)$ sehr wohl *größer* sein kann als der gemeinsame Konvergenzbereich der $P_\nu(x)$. Man betrachte z. B. den einfachsten Fall zweier Reihen nach positiven Potenzen: $\sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu x^\nu$, $\sum_0^\infty {}_\nu\, b_\nu x^\nu$, deren Konvergenzradien mit r_1, r_2 bezeichnet werden mögen. Ist dann etwa $r_1 < r_2$, also r_1 der Radius des beiden Reihen *gemeinsamen* Konvergenzbereiches, so wird offenbar $\mathfrak{P}(x) = \sum_0^\infty {}_\nu\,(a_\nu + b_\nu) \cdot x^\nu$ genau den Konvergenzradius r_1 besitzen. Ist dagegen $r_1 = r_2$, so kann der Konvergenzradius von $\mathfrak{P}(x)$ *keinesfalls* einen *kleineren*, wohl aber einen beliebig viel *größeren* Wert haben. Denn setzt man etwa:

$$a_\nu = a_\nu' + b_\nu' \qquad b_\nu = a_\nu' - b_\nu'$$

und ist r_1 zwar der Konvergenzradius der Reihe $\sum b_\nu' x^\nu$, dagegen $R > r_1$ derjenige von $\sum a_\nu' x^\nu$, so werden in der Tat die Reihen $\sum a_\nu x^\nu$, $\sum b_\nu x^\nu$ auf Grund des unmittelbar zuvor Gesagten *beide* den Konvergenzradius r_1 besitzen, während derjenige von $\sum (a_\nu + b_\nu) \cdot x^\nu = 2 \sum a_\nu' x^\nu$ den Wert R hat. $\left(\text{Beispiel: } a_\nu = \frac{1 + 2^\nu}{2^\nu},\ b_\nu = \frac{1 - 2^\nu}{2^\nu}\right)$.

2. Es sei nun eine *unendliche Folge* von Potenzreihen — zunächst etwa nach positiven Potenzen von x — vorgelegt

$$\mathfrak{P}_\nu(x) = \sum_0^\infty {}_\mu\, a_\mu^{(\nu)} \cdot x^\mu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

welche sämtlich zum mindesten für $|x| < R$ *konvergieren* sollen. Sie sind dann für diesen Bereich durchweg *absolut* konvergent, d. h. es *konvergiert*, wenn $|a_\mu^{(\nu)}| = \alpha_\mu^{(\nu)}$ gesetzt wird, auch jede der Reihen:

$$\overline{\mathfrak{P}_\nu(\varrho)} = \sum_0^\infty {}_\mu\, \alpha_\mu^{(\nu)} \cdot \varrho^\mu \quad \text{für:} \quad 0 \leqq \varrho < R. \tag{4}$$

Ist nun für $\varrho < R$ auch $\sum_0^\infty {}_\nu\, \overline{\mathfrak{P}_\nu(\varrho)}$ *konvergent*, oder anders ausgesprochen, *konvergiert* in dem Schema:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_0^{(0)} + \alpha_1^{(0)}\varrho + \cdots + \alpha_\mu^{(0)}\varrho^\mu + \cdots \\ \alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)}\varrho + \cdots + \alpha_\mu^{(1)}\varrho^\mu + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_0^{(\nu)} + \alpha_1^{(\nu)}\varrho + \cdots + \alpha_\mu^{(\nu)}\varrho^\mu + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right. \tag{5}$$

jede einzelne *Zeile* und die aus den *Zeilensummen* gebildete unendliche Reihe, so folgt aus dem sogenannten *Cauchyschen Doppelreihensatze* (I_2, § 75, Nr. 3, S. 579), daß für $|x| = \varrho$ in dem Schema:

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_0^{(0)} + a_1^{(0)}x + \cdots + a_\mu^{(0)}x^\mu + \cdots \\ a_0^{(1)} + a_1^{(1)}x + \cdots + a_\mu^{(1)}x^\mu + \cdots \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu)}x + \cdots + a_\mu^{(\nu)}x^\mu + \cdots \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{array}\right.$$

nicht nur jede *Zeile* und die aus den *Zeilensummen* gebildete Reihe, sondern auch jede *Kolonne* und die aus den *Kolonnensummen* gebildete Reihe *konvergiert*, und zwar die letztere gegen *denselben* Wert wie die Reihe der Zeilensummen, d. h. es ergibt sich:

$$(7)\qquad \sum_0^\infty{}^\nu \sum_0^\infty{}^\mu a_\mu^{(\nu)} x^\mu = \sum_0^\infty{}^\mu \Big(\sum_0^\infty{}^\nu a_\mu^{(\nu)}\Big) \cdot x^\mu \qquad (|x| < R)$$

oder anders geschrieben:

$$(8)\qquad \sum_0^\infty{}^\nu \mathfrak{P}_\nu(x) = \sum_0^\infty{}^\mu A_\mu x^\mu, \quad \text{wo} \quad A_\mu = \sum_0^\infty{}^\nu a_\mu^{(\nu)}.$$

Das analoge ergibt sich offenbar für eine unendliche Anzahl von Reihen der Form:

$$(9)\qquad \mathfrak{P}_\nu\Big(\frac{1}{x}\Big) = \sum_1^\infty{}^\mu a_\mu^{(\nu)} x^{-\mu}$$

und aus der Zusammenfassung beider Resultate auch für solche von der Form:

$$(10)\qquad P_\nu(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^\mu a_\mu^{(\nu)} x^\mu.$$

Schließlich erkennt man noch, daß es ohne weiteres auch gestattet ist, die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu P_\nu(x)$ durch eine solche von der Form $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^\nu P_\nu(x)$ zu ersetzen, so daß man durch bloße Anwendung des *Cauchyschen Doppelreihensatzes* auf den besonderen Fall der Potenzreihen den folgenden Satz erhält:

Sind die Reihen:

$$(11)\qquad P_\nu(x) \equiv \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^\mu a_\mu^{(\nu)} x^\mu \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$$

konvergent für einen gewissen Bereich $R_0 < |x| < R$, ebenso wie

ihre Summe:

$$S(x) \equiv \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} P_\nu(x), \tag{12}$$

und ***bleibt*** *diese letztere Reihe* ***konvergent****, wenn man in den einzelnen $P_\nu(x)$ jedes Glied durch seinen absoluten Betrag ersetzt, so hat man für $R_0 < |x| < R$:*

$$S(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu} A_\mu x^\mu, \quad \text{wo:} \quad A_\mu = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} a_\mu^{(\nu)}.\text{[1]} \tag{13}$$

Dabei können in den $P_\nu(x)$ entweder die negativen oder die positiven Potenzen gänzlich fehlen bzw. nur in endlicher Anzahl auftreten. Auch können sich die $P_\nu(x)$ auf *ganze* Funktionen von x *und* $\frac{1}{x}$ bzw. von x *oder* $\frac{1}{x}$ reduzieren.

Auch behält der vorstehende Satz offenbar seine Gültigkeit, wenn man x durch $(x - x_0)$ ersetzt.

3. Wesentlich weitere Formen von *hinreichenden* Bedingungen für die Darstellbarkeit einer unendlichen Reihe von der Form $\sum \mathfrak{P}_\nu(x)$ durch eine einfache Potenzreihe liefert der folgende Satz:

Es sei jede der unendlich vielen Potenzreihen:

$$\mathfrak{P}_\nu(x) \equiv \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} a_\mu^{(\nu)} x^\mu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{14}$$

gleichmäßig *konvergent für alle x mit dem Absolutwerte $|x| = r$ (also schließlich gleichmäßig konvergent für $|x| \leq r$[2]) und absolut konvergent für $|x| < r$). Ferner genüge die Reihe:*

$$S(x) \equiv \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \mathfrak{P}_\nu(x) \tag{15}$$

einer *der folgenden zwei Bedingungsformen:*

(A) *Sie konvergiere* ***gleichmäßig*** *für alle x mit dem Absolutwerte $|x| = r$.*

(B) *Sie konvergiere für unendlich viele Stellen in beliebiger Nähe von $x = 0$[3]) und außerdem sei die Gesamtheit der Reihen-*

---

1) Ist die Voraussetzung auch noch für $|x| = R_0$ bzw. $|x| = R$ erfüllt, so gelten die betreffenden Schlüsse und somit der Satz selbst auch noch für $|x| = R_0$ bzw. $|x| = R$.

2) Vgl. Fußn. 1 auf S. 295.

3) Es wird sich später zeigen (s. § 45, Nr. 4, S. 343), daß es schon genügt, wenn die *Konvergenz* von $\sum \mathfrak{P}_\nu(x)$ für unendlich viele Stellen in der Nähe einer

summen:

$$(16)\qquad S_n(x) = \sum_0^n{}^\nu \mathfrak{P}_\nu(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

beschränkt für $|x| \leqq r$.[1])

Dann konvergiert $\sum_0^\infty{}^\nu \mathfrak{P}_\nu(x)$ ***gleichmäßig*** *im Falle* (A) *für* $|x| \leqq r$, *im Falle* (B) *für* $|x| \leqq r' < r$ *und läßt sich in beiden Fällen in eine zum mindesten für* $|x| < r$ *konvergierende einfache Potenzreihe anordnen, nämlich:*

$$(17)\qquad S(x) = \sum_0^\infty{}^\mu A_\mu x^\mu, \quad \text{wo:} \quad A_\mu = \sum_0^\infty{}^\nu a_\mu^{(\nu)}.$$

Beweis zu (A). Auf Grund der Voraussetzung (A) hat man für jedes $\varepsilon > 0$, bei passender Wahl von $n \geqq n'$ und beliebigem $p = 1, 2, 3, \ldots$:

$$(18)\qquad |S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{n+1}^{n+p}{}^\nu \mathfrak{P}_\nu(x)\right| < \varepsilon, \quad \text{wenn:} \quad |x| = r.$$

Diese Summe einer *endlichen* Anzahl für $|x| \leqq r$ gleichmäßig konvergie-

---

beliebigen, im Inneren des Kreises $|x| = r$ gelegenenen Stelle x_0 feststeht Der in dieser Weise vervollständigte Satz wird dann als „*Vitali*scher" Doppelreihensatz bezeichnet werden.

1) Das soll selbstverständlich besagen: *Alle* $|S_n(x)|$ bleiben unter einer (von x und n unabhängigen) *Schranke.* Ich habe dabei im Text schon, um jedes Mißverständnis auszuschließen, für die *Folge* $|S_n(x)|$ den Ausdruck *Gesamtheit* ihrer Glieder gebraucht, möchte aber ausdrücklich betonen, daß es vollständig genügt hätte, zu sagen, die *Folge* $S_n(x)$ sei in dem betreffenden Bereiche *beschränkt* (was ja bei korrekter Ausdrucksweise entsprechend *mehr* bedeutet oder doch bedeuten sollte, als die Aussage, *jedes einzelne Glied der Folge* sei daselbst beschränkt).

Ich hebe dies hervor, da es leider Mode geworden ist, den fraglichen Sachverhalt durch die Aussage zu kennzeichnen, die Folge sei in dem Bereiche *gleichmäßig* beschränkt — ein Beiwort, das ich in diesem Zusammenhange für *überflüssig* und *irreführend* halte. *Überflüssig*, da es wohl bisher noch kein Mathematiker für notwendig gehalten hat, eine in einem Bereiche *beschränkte* Funktion $f(x, y)$ als *gleichmäßig* beschränkt zu bezeichnen. Warum also eine *Folge* $f_n(x)$, die doch nichts anderes ist, als eine *Funktion* der beiden Veränderlichen x und n? Und *irreführend*: denn die Bezeichnung *gleichmäßig* hat, auf Grund ihrer Provenienz von der *gleichmäßigen Konvergenz*, in der Funktionenlehre eine ganz spezifische Bedeutung, für die gerade in dem vorliegenden Zusammenhange ein Analogon leicht *hergestellt* (vgl. I_2, S 934) und deshalb auch vermutet werden könnte, aber bei der *obigen* Anwendung vollständig *fehlt.* Die bloße *Gemeinsamkeit* einer oberen Schranke als *Gleichmäßigkeit* der Beschränkung zu bezeichnen, scheint mir eine recht wenig glückliche Eingebung

render Potenzreihen läßt sich ohne weiteres in eine zum mindesten für $|x| \leqq r$ ebenfalls gleichmäßig konvergierende Potenzreihe, nämlich:

$$(19) \qquad \sum_{n+1}^{n+p}{}^{\nu} \mathfrak{P}_\nu(x) \equiv \sum_{n+1}^{n+p}{}^{\nu} \sum_0^\infty{}^{\mu} a_\mu^{(\nu)} x^\mu = \sum_0^\infty{}^{\mu} \left(\sum_{n+1}^{n+p}{}^{\nu} a_\mu^{(\nu)}\right) \cdot x^\mu$$

umformen, deren absoluter Betrag für den Bereich $|x| \leqq r$ einen gewissen *Maximalwert* besitzen muß. Der letztere wird dann nach § 38, Nr. 2 (S. 284) mindestens für eine (sc. mit p im allgemeinen veränderliche) Stelle x_p auf dem Kreise $|x| = r$ wirklich angenommen, so daß also:

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p}{}^{\nu} \mathfrak{P}_\nu(x)\right| \leqq \left|\sum_{n+1}^{n+p}{}^{\nu} \mathfrak{P}_\nu(x_p)\right| \quad \text{für } |x| \leqq r.$$

Da andererseits mit Berücksichtigung von Ungl. (18):

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p}{}^{\nu} \mathfrak{P}_\nu(x_p)\right| < \varepsilon$$

so folgt, daß

$$(20) \qquad |S_{n+p}(x) - S_n(x)| \equiv \left|\sum_{n+1}^{n+p}{}^{\nu} \mathfrak{P}_\nu(x)\right| < \varepsilon$$

gleichmäßig für *alle* x des Bereiches $|x| \leqq r$. Dies besagt aber, daß aus der nur für $|x| = r$ vorausgesetzten *gleichmäßigen* Konvergenz von $S(x) \equiv \sum_0^\infty{}^{\nu} \mathfrak{P}_\nu(x)$ die Existenz der nämlichen Eigenschaft für den gesamten Bereich $|x| \leqq r$ hervorgeht.[1])

Man hat nun nach Analogie von Gl. (19):

$$(21) \qquad S_n(x) \equiv \sum_0^n{}^{\nu} \mathfrak{P}_\nu(x) = \sum_0^\infty{}^{\mu} A_\mu^{(n)} x^\mu, \quad \text{wo: } A_\mu^{(n)} = \sum_0^n{}^{\nu} a_\mu^{(\nu)}.$$

Da (auf Grund der soeben für $|x| \leqq r$ erwiesenen gleichmäßigen Konvergenz) $S(x)$, d. h. $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ und somit wegen Ungl. (20) auch die Gesamtheit der $S_n(x)$ für $|x| \leqq r$ *beschränkt* ist[2]), etwa:

$$(22) \qquad |S_n(x)| \leqq G \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

---

1) Dieses Ergebnis (als eine wesentliche Verallgemeinerung des auf den speziellen Fall: $\mathfrak{P}_\nu(x) = a_\nu x^\nu$ bezüglichen von § 32, Fußn. 1, S. 254) ist an sich bemerkenswert. Andererseits würde aber daraus folgen, daß nunmehr die Bedingungen (B) erfüllt sind (s. Ungl. (22)) und daß es daher genügen würde, den weiteren Beweis unter der Voraussetzung (B) durchzuführen. Da sich aber diese Durchführung auf Grund des obigen Ergebnisses unter der Voraussetzung (A) merklich einfacher gestaltet, so schien es zweckmäßig, sie hier vollständig mitzuteilen.

2) Aus (20) folgt zunächst für $n \geqq n'$ und $p \to \infty$:

$$|S(x) - S_n(x)| \leqq \varepsilon,$$

so liefert die Anwendung des *Cauchy*schen Koeffizientensatzes auf Gl. (21) die Beziehung:

$$(23) \qquad |A_\mu^{(n)}| \equiv \left|\sum_0^n {}^\nu a_\mu^{(\nu)}\right| \leqq G \cdot r^{-\mu} \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich aus (18) mit Berücksichtigung von Gl. (19):

$$(24) \qquad |A_\mu^{(n+p)} - A_\mu^{(n)}| \equiv \left|\sum_{n+1}^{n+p} {}^\nu a_\mu^{(\nu)}\right| < \varepsilon . r^{-\mu} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots),$$

und zwar für *alle* μ bei dem *nämlichen* (nur von der Wahl von ε abhängigen) $n \geqq m$. Daraus folgt aber, daß die $A_\mu^{(n)}$ für $n \to \infty$ bestimmten Grenzwerten zustreben, etwa:

$$(25) \qquad \lim_{n \to \infty} A_\mu^{(n)} \equiv \sum_0^\infty {}^\nu a_\mu^{(\nu)} = A_\mu .$$

Zugleich ergibt sich dann aus Ungl. (23), daß:

$$(26) \qquad |A_\mu| \leqq G \cdot r^{-\mu} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Wird jetzt $r' < r$ angenommen, so hat man für $|x| \leqq r'$:

$$(27) \qquad \sum_{n+1}^\infty {}^\mu |A_\mu x^\mu| \leqq G \cdot \sum_{n+1}^\infty {}^\mu \left(\frac{r'}{r}\right)^\mu = \left(\frac{r'}{r}\right)^n G \frac{r'}{r - r'}$$

(d. h. bei hinlänglicher Vergrößerung von n beliebig klein), mithin ist die Potenzreihe:

$$\sum_0^\infty {}^\mu A_\mu x^\mu$$

für $|x| \leqq r' < r$ *absolut konvergent*.

Schließlich findet man:

$$(28) \qquad \sum_0^\infty {}^\mu A_\mu x^\mu - S_n(x) = \sum_0^\infty {}^\mu (A_\mu - A_\mu^{(n)}) \cdot x^\mu.$$

Da aber aus (24) für $n \geqq n'$ und $p \to \infty$ sich ergibt:

$$(29) \qquad |A_\mu - A_\mu^{(n)}| \leqq \varepsilon \cdot r^{-\mu} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots),$$

---

also:

$$|S_n(x)| \leqq |S(x)| + \varepsilon \qquad (n \geqq n'),$$

d. h. $|S_n(x)|$ ist zunächst *beschränkt* für $n \geqq n'$. Von den hierbei noch nicht berücksichtigten $|S_n(x)|$ $(n = 0, 1, \ldots, n' - 1)$ ist aber jedes einzelne (als Summe einer endlichen Anzahl gleichmäßig konvergenter Potenzreihen) *beschränkt*, somit schließlich die Gesamtheit *aller* $S_n(x)$ für $|x| \leqq r$.

so folgt für $|x| = r' < r$:

$$\left|\sum_0^\infty{}^\mu A_\mu x^\mu - S_n(x)\right| \leqq \varepsilon \cdot \sum_0^\infty{}^\mu \left(\frac{r'}{r}\right)^\mu = \varepsilon \cdot \frac{r}{r-r'},$$

also, wie behauptet:

$$\sum_0^\infty{}^\mu A_\mu x^\mu = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_0^\infty{}^\nu \mathfrak{P}_\nu(x) \quad \text{für:} \quad |x| < r.$$

4. Beweis zu (B). Setzt man wiederum (s. Gl. (21)):

$$(21\text{a}) \qquad S_n(x) \equiv \sum_0^n{}^\nu \mathfrak{P}_\nu(x) = \sum_0^\infty{}^\mu A_\mu^{(n)} x^\mu, \quad \text{wo:} \quad A_\mu^{(n)} = \sum_0^n{}^\nu a_\mu^{(\nu)},$$

und beachtet, daß die Potenzreihe $S_n(x)$ geradeso wie jedes einzelne $\mathfrak{P}_\nu(x)$ auf dem Kreise $|x| = r$ *gleichmäßig* konvergiert und die $|S_n(x)|$ auf Grund der Voraussetzung (B) für $n = 0, 1, 2, \ldots$ und $|x| \leqq r$ *beschränkt* sind, etwa mit Benutzung der in Ungl. (22) angewendeten Bezeichnung:

$$(22\text{a}) \qquad |S_n(x)| \leqq G,$$

so ergibt sich übereinstimmend mit Ungl. (23), die Beziehung:

$$(23\text{a}) \qquad |A_\mu^{(n)}| \leqq G \cdot r^{-\mu} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dagegen erfordert hier der für das Endergebnis unentbehrliche Beweis der *Existenz* von $\lim_{n\to\infty} A_\mu^{(n)}$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$ (welche im Falle (A) unmittelbar aus der Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum_0^\infty{}^\nu \mathfrak{P}_\nu(x)$ für $|x| = r$ bzw. den daraus hervorgehenden Ungleichungen (18) und (24) sich ergab) eine etwas umständlichere Herleitung.

Man hat für $|x| \leqq r$:

$$S_{n+p}(x) - S_n(x) = \sum_0^\infty{}^\mu (A_\mu^{(n+p)} - A_\mu^{(n)}) x^\mu$$

und daner, wenn man das konstante Glied der unendlichen Reihe isoliert:

$$(30) \quad |A_0^{(n+p)} - A_0^{(n)}| \leqq |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + \left|\sum_1^\infty{}^\mu (A_\mu^{(n+p)} - A_\mu^{(n)}) x^\mu\right|$$

Mit Berücksichtigung von (23a) ergibt sich für $|x| < r$:

$$(31) \qquad \left|\sum_1^\infty{}^\mu (A_\mu^{(n+p)} - A_\mu^{(n)}) \cdot x^\mu\right| \leqq 2G \frac{|x|}{r-|x|}$$

und man erzielt, daß:

$$(32) \qquad 2G \frac{|x|}{r-|x|} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{wenn:} \quad |x| < \frac{r\varepsilon}{4G+\varepsilon} = \delta.$$

Andererseits gibt es unter den Werten x, für welche $|x| < \delta$, auf Grund der *ersten* Voraussetzung (B) sicher solche, für die $\sum_0^\infty \mathfrak{P}_\nu(x)$ konvergiert, also $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ (im engeren Sinne) *existiert*, und es läßt sich daher, wenn x' irgendeinen dieser Werte x bedeutet, eine untere Schranke n' für n so fixieren, daß:

$$(33)\quad |S_{n+p}(x') - S_n(x')| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad n \geqq n' \quad \text{und} \quad p = 1, 2, 3, \ldots$$

Setzt man also in Ungl. (30) $x = x'$, so ergibt sich mit Benutzung von Ungl. (31)—(33):

$$(34)\qquad |A_0^{(n+p)} - A_0^{(n)}| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geqq n',$$

d. h. die Folge $(A_0^{(n)})$ ist eine *konvergente*, so daß man setzen kann:

$$(35)\qquad \lim_{n\to\infty} A_0^{(n)} = A_0,$$

wo A_0 eine bestimmte Zahl vorstellt, die im übrigen auf Grund von Ungl. (23a) der Beziehung genügen muß:

$$(36)\qquad |A_0| \leqq G.$$

Angenommen nun, es sei bereits erwiesen, daß außer $A_0^{(n)}$ auch $A_1^{(n)}, \ldots A_{m-1}^{(n)}$ für $n \to \infty$ bestimmte Grenzwerte besitzen, etwa wieder:

$$(37)\qquad \lim_{n\to\infty} A_\mu^{(n)} = A_\mu \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m-1),$$

in welchem Falle dann nach Ungl. (23a):

$$(38)\quad |A_\mu| \leqq G \cdot r^{-\mu} \quad (\text{also: } |A_\mu x^\mu| \leqq |A_\mu| r^\mu \leqq G \text{ für } |x| \leqq r)$$

sein muß. Alsdann betrachte man an Stelle der Funktion $S_n(x)$ diejenige, welche durch Subtraktion ihrer ersten m Glieder und Division mit x^m daraus hervorgeht, also:

$$(39)\quad \begin{aligned} S_n^{(m)}(x) &\equiv \frac{1}{x^m}\left(S_n(x) - A_0^{(n)} - A_1^{(n)}x - \cdots - A_{m-1}^{(n)}x^{m-1}\right) \\ &= A_m^{(n)} + \sum_1^\infty{}^{\mu} A_{m+\mu}^{(n)} x^\mu. \end{aligned}$$

Dieselbe genügt wieder den Bedingungen (B). Denn *erstens* ist sie für $|x| \leqq r$ und alle möglichen n *beschränkt*, da ihr absoluter Betrag seinen Maximalwert für den Bereich $|x| \leqq r$, geradeso wie die rechtsstehende Potenzreihe, auf dem Kreise $|x| = r$ annehmen muß, und zwar ergibt sich auf diese Weise mit Berücksichtigung von Ungl. (22a) und (23a):

$$|S_n^{(m)}(x)| \leqq \frac{(m+1)G}{r^m} \qquad (|x| \leqq r).$$

Zweitens existiert (im engeren Sinne) $\lim_{n\to\infty} S_n^{(m)}(x')$ für alle (von 0 verschiedenen) x', für welche $\lim_{n\to\infty} S_n(x')$ existiert $\left(\text{d. h. } \sum_0^\infty{}^\nu \mathfrak{P}_\nu(x') \text{ konvergiert}\right)$, da ja auch $\lim_{n\to\infty} A_0^{(n)}, \lim_{n\to\infty} A_1^{(n)}, \ldots, \lim_{n\to\infty} A_{m-1}^{(n)}$ bestimmte Zahlen sind. Infolgedessen läßt sich auf $S_n^{(m)}(x)$ dieselbe Schlußweise anwenden, wie zuvor auf $S_n(x)$, und man findet daher:

$$(40) \qquad \lim_{n\to\infty} A_m^{(n)} = A_m \quad \text{(d. h. gleich einer bestimmten Zahl),}$$

wo wiederum nach Ungl. (23a):

$$(41) \qquad |A_m| \leqq G \cdot r^{-m}.$$

Da die Richtigkeit der Prämisse (37) für $\mu = 0$ erwiesen ist, so ergibt sich durch vollständige Induktion die Gültigkeit von Gl. (40) und somit auch von Ungl. (41) für jedes beliebige m.

Hiernach besitzt also die Potenzreihe $\sum_0^\infty{}^\mu A_\mu x^\mu$ formale Existenz und erweist sich auf Grund von Ungl. (41) als *absolut konvergent* für $|x| < r$.

Man hat dann auch wieder in Übereinstimmung mit Gl. (28):

$$(28\,\text{a}) \qquad \sum_0^\infty{}^\mu A_\mu x^\mu - S_n(x) = \sum_0^\infty{}^\mu (A_\mu - A_\mu^{(n)}) x^\mu.$$

Indessen läßt sich, um das Verschwinden der rechts stehenden Potenzreihe für $n \to \infty$ zu begründen, die im Falle (A) benutzte Schlußweise hier nicht in Anwendung bringen. Dieselbe beruhte nämlich wesentlich auf der Ungleichung (29), die ihrerseits aus der *Voraussetzung* der *gleichmäßigen* Konvergenz von $S(x) \equiv \sum_0^\infty{}^\nu \mathfrak{P}_\nu(x)$ für $|x| = r$ hervorging, während hier diese gleichmäßige Konvergenz (übrigens in dem beschränkteren Umfange $|x| \leqq r'$, wo $r' < r$) überhaupt erst bewiesen werden soll, und andererseits an Stelle jener Ungleichung (29) nur die Beziehungen (23a), (40) und (41), d. h.:

$$|A_\mu^{(n)}| \leqq G \cdot r^{-\mu}, \quad \lim_{n\to\infty} A_\mu^{(n)} = A_\mu, \quad |A_\mu| \leqq G \cdot r^{-\mu} \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

zur Verfügung stehen.

Nichtsdestoweniger führt hier die folgende Schlußweise zum Ziel. Man hat für $|x| \leqq r' < r$ bei beliebigem m und n mit Benutzung der letzten Ungleichungen:

$$\left| \sum_{m+1}^\infty{}^\mu (A_\mu - A_\mu^{(n)}) x^\mu \right| \leqq 2G \cdot \sum_{m+1}^\infty{}^\mu \left(\frac{r'}{r}\right)^\mu = \left(\frac{r'}{r}\right)^m \cdot \frac{2Gr'}{r - r'},$$

kann daher m zu dem Faktor $\left(\frac{r'}{r}\right)^m$ so fixieren, daß:

$$(42)\qquad \left|\sum_{m+1}^{\infty}{}^{\mu}(A_\mu - A_\mu^{(n)})x^\mu\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (|x| \leqq r').$$

Andererseits hat man für $|x| \leqq r'$:

$$(43)\qquad \left|\sum_{0}^{m}{}^{\mu}(A_\mu - A_\mu^{(n)})x^\mu\right| \leqq \sum_{0}^{m}{}^{\mu}|A_\mu - A_\mu^{(n)}| \cdot r'^\mu$$

und kann sodann, wegen $\lim\limits_{n\to\infty} A_\mu^{(n)} = A_\mu$, eine untere Schranke n' für n so bestimmen, daß $|A_\mu - A_\mu^{(n)}|$ für $\mu = 0, 1, \ldots, m$ beliebig klein, insbesondere:

$$(44)\qquad \sum_{0}^{m}{}^{\mu}|A_\mu - A_\mu^{(n)}| \cdot r'^\mu < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } n \geqq n'$$

wird. Alsdann ergibt sich aber aus Gl. (28a) mit Benutzung von (42), (44):

$$(45)\qquad \left|\sum_{0}^{\infty}{}^{\mu}A_\mu x^\mu - S_n(x)\right| < \varepsilon \quad \text{für } |x| \leqq r',\ n \geqq n',$$

und somit schließlich:

$$\sum_{0}^{\infty}{}^{\mu}A_\mu x^\mu = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\mathfrak{P}_\nu(x) \quad \text{für } |x| \leqq r' \text{ d. h. für } |x| < r,$$

und zwar konvergiert, wie Ungl. (45) zeigt, $S_n(x)$ mit $n \to \infty$ für alle x des Bereiches $|x| \leqq r'$ *gleichmäßig* gegen die Grenzfunktion $\sum\limits_{0}^{\infty}{}^{\mu}A_\mu x^\mu$, mit anderen Worten, die Reihe $\sum\limits_{0}^{\infty}{}^{\nu}\mathfrak{P}_\nu(x)$ konvergiert, wie behauptet, für $|x| \leqq r'$, sofern nur $r' < r$, *gleichmäßig*.

5. Der mit (A) bezeichnete Fall des vorstehenden Satzes soll zunächst noch in folgender Weise weiter ausgestaltet werden.

Angenommen, es finde die *Konvergenz* der Potenzreihen:

$$\mathfrak{P}_\nu(x) \equiv \sum_{0}^{\infty}{}^{\mu}a_\mu^{(\nu)}x^\mu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

sowie die *gleichmäßige Konvergenz* der Reihe:

$$S(x) \equiv \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\mathfrak{P}_\nu(x)$$

für $|x| = r$ bei *jedem* einzelnen der Bedingung $0 < r < R$ genügendem

Werte r statt[1]), so gilt offenbar die Umformung:

$$S(x) = \sum_0^\infty{}^\mu A_\mu x^\mu$$

schließlich für alle x, welche dem Bereiche $|x| < R$ angehören.

Ein analoges Resultat ergibt sich für eine unbegrenzte Folge von Potenzreihen der Form:

$$\mathfrak{P}_\nu\left(\frac{1}{x}\right) \equiv \sum_1^\infty{}^\mu a_\mu^{(\nu)} x^{-\mu},$$

sobald dieselben für $|x| > R_0$ sämtlich *konvergieren* und die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu \mathfrak{P}_\nu\left(\frac{1}{x}\right)$ für $|x| = r$ bei jedem einzelnen Werte $r > R_0$ *gleichmäßig konvergiert.*

Schließlich ist es offenbar auch gestattet, in den vorstehenden Betrachtungen die Reihen von der Form $\sum_0^\infty{}^\nu \mathfrak{P}_\nu$ durch solche von der Form $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^\nu \mathfrak{P}_\nu$ zu ersetzen.

Durch Zusammenfassung dieser Ergebnisse gelangt man zu dem folgenden Satze (dem „*Weierstraßschen Doppelreihensatze*"):

Sind die Reihen:

$$(42) \qquad P_\nu(x) \equiv \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^\mu a_\mu^{(\nu)} x^\mu \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

sämtlich konvergent für $R_0 < |x| < R$ und ist die Reihe:

$$(43) \qquad S(x) \equiv \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^\nu \mathfrak{P}_\nu(x)$$

gleichmäßig konvergent auf jedem Kreise $|x| = r$, falls $R_0 < r < R$, so besteht für alle x des Ringbereiches $R_0 < |x| < R$ die Beziehung:

$$(44) \; S(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^\mu A_\mu x^\mu, \text{ wo: } A_\mu = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^\nu a_\mu^{(\nu)} \quad (\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$[2])

1) Wie der Beweis in Nr. 3 zu dem Falle (A) des vorigen Satzes zeigt, würde es schon hinreichen, die gleichmäßige Konvergenz von $S(x)$ für $|x| = r$ bei jedem einzelnen r des Intervalls $R - \varepsilon < r < R$ (wo $\varepsilon > 0$ beliebig klein) vorauszusetzen.

2) Man bemerke, daß auch dann, wenn die gemachten Voraussetzungen noch an den Grenzen, also für $R_0 \leq |x| \leq R$, erfüllt sind, auf die Gültigkeit der Beziehung (44) dennoch nur für den Bereich $R_0 < |x| < R$ geschlossen werden kann — anders wie beim *Cauchy*schen Satze, wo die Gültigkeit der Voraussetzungen für

Im übrigen gelten auch hier die am Schlusse von Nr. 2 gemachten Bemerkungen in bezug auf die möglichen Spezialisierungen der $P_\nu(x)$ und die Zulässigkeit der Substitution von $(x - x_0)$ an Stelle von x.

6. Bezüglich der gegenseitigen Stellung des *Cauchy*schen und *Weierstraß*schen Doppelreihensatzes sei noch folgendes bemerkt. Der erstere dieser beiden Sätze verlangte, daß außer der Reihe $\sum P_\nu(x)$ auch die Reihe $\sum P_\nu[|x|]$ für $R_0 < |x| < R$ konvergiert: dabei bedeutet $P_\nu[x]$ diejenige Reihe, welche aus $P_\nu(x)$ durch Verwandlung sämtlicher *Koeffizienten* in ihre *absoluten Beträge* hervorgeht. Dagegen wird bei dem *Weierstraß*schen Satze nur die *Gleichmäßigkeit* der Konvergenz von $\sum P_\nu(x)$ auf jedem Kreise $|x| = r$ für $R_0 < r < R$ gefordert. Nun ist leicht ersichtlich, daß die *erste* dieser Bedingungen stets die *zweite* nach sich zieht, aber nicht umgekehrt. Denn jede der *Cauchy*schen Bedingung genügende Reihe $\sum P_\nu(x)$ ist ja auf jedem Kreise $|x| = r$ *maximal* konvergent, also auch *gleichmäßig* konvergent. Dagegen braucht ja eine in irgendeinem Bereiche *gleichmäßig* konvergente Reihe $\sum P_\nu(x)$ *nicht absolut* (s. § 29, Nr. 2, Fußn. 1, S. 239), d. h. als $\sum |P_\nu(x)|$ und um so weniger als $\sum P_\nu[|x|]$ zu konvergieren.

Beispiel. Nimmt man $\nu \geqq 3$, so ist: $\lg \nu > \lg e = 1$ für $\nu \geqq 3$ und daher:

$$\frac{1}{\lg \nu - x} = \sum_0^\infty{}^{\mu} \frac{x^\mu}{(\lg \nu)^{\mu+1}} \quad \text{für} \quad |x| < \lg 3,$$

also insbesondere für $|x| \leqq 1$. Die Reihe:

$$\sum_3^\infty{}^{\nu} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\lg \nu - x} = \sum_3^\infty{}^{\nu} (-1)^{\nu-1} \sum_0^\infty{}^{\mu} \frac{x^\mu}{(\lg \nu)^{\mu+1}}$$

ist dann für $|x| \leqq 1$ zwar nur *bedingt*, aber durchweg *gleichmäßig* konvergent. Vereinigt man nämlich je zwei konsekutive Glieder, so findet man:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\lg(2\nu-1) - x} - \frac{1}{\lg 2\nu - x}\right| &= \left|\frac{\lg 2\nu - \lg(2\nu-1)}{(\lg(2\nu-1) - x)(\lg 2\nu - x)}\right| \\ &\leqq \frac{\lg\left(1 + \frac{1}{2\nu-1}\right)}{(\lg(2\nu-1) - 1)^2} \\ &< \frac{1}{(2\nu-1)(\lg(2\nu-1))^2} \cdot \left(\frac{\lg(2\nu-1)}{\lg(2\nu-1) - 1}\right)^2\end{aligned}$$

(s. I_1, § 34, S. 206, Gl. (3)).

$|x| \geqq R_0$ bzw. $|x| \leqq R$ auch diejenige der entsprechenden Endgleichung in demselben Umfange nach sich zieht (s. S. 293, Fußn. 1).

Eine Ausnahme macht in diesem Zusammenhange der Fall $R_0 = 0$, wenn die Reihen $P_\nu(x)$ sich auf solche von der Form $\mathfrak{P}_\nu(x)$ reduzieren. Alsdann gelten Voraussetzung und Endresultat stets auch für $x = 0$.

Der erste Faktor rechts ist das allgemeine Glied einer (absolut) konvergenten Reihe (s. I_2, § 49, Nr. 4, S. 334), der zweite hat für $\nu \to \infty$ den Grenzwert 1. Die obige Reihe wird also für $|x| \leqq 1$ bei Vereinigung je zweier konsekutiver Glieder *maximal* konvergent, sie konvergiert somit für $|x| \leqq 1$ *gleichmäßig*, und zwar $\Big($da $\frac{1}{\lg \nu - x}$ für $|x| \leqq 1$ und $\nu \to \infty$ *gleichmäßig* gegen *Null* konvergiert$\Big)$ auch dann, wenn die obige Vereinigung wieder aufgehoben wird, in diesem Falle jedoch nur *bedingt*, da

$$\left|\frac{1}{\lg \nu - x}\right| \geqq \frac{1}{\lg \nu + |x|}$$

und $\sum \frac{1}{\lg \nu + 1}$ *divergiert*. Die Anwendbarkeit des *Cauchy*schen Satzes ist also hier vollständig ausgeschlossen, während der *Weierstraß*sche die Beziehung liefert:

$$\sum_{3}^{\infty}{}_{\nu} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\lg \nu - x} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} A_\mu x^\mu, \quad \text{wo:} \quad A_\mu = \sum_{3}^{\infty}{}_{\nu} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{(\lg \nu)^{\mu+1}}.$$

Man bemerke, daß die Reihen für *sämtliche* Koeffizienten A_μ in *divergente* übergehen, wenn man jedes Reihenglied (wie die Anwendung des *Cauchy*schen Satzes erfordern würde) durch seinen absoluten Betrag ersetzt.

Hiernach wird also der *Cauchy*sche Satz durch den *Weierstraß*schen in Wahrheit durchaus entbehrlich.[1]) Dennoch schien es nicht angezeigt, ihn zu übergehen, da er auf *wesentlich elementareren* Hilfsmitteln beruht und tatsächlich für eine Anzahl wichtiger Anwendungen vollständig ausreicht. Wenn wir daher im weiteren Verlauf uns gelegentlich ausdrücklich auf den *Cauchy*schen Satz berufen, so soll damit nur angedeutet werden, daß das betreffende Ergebnis lediglich die Anwendung jenes *einfacheren* Beweismittels erfordert, während der direkte und ausschließliche Hinweis auf den *Weierstraß*schen Satz ausdrücken soll, daß der *Cauchy*sche für den gerade vorliegenden Fall versagt.

§ 40. Produkte und ganze positive Potenzen von Potenzreihen. — Darstellbarkeit von $g(P(x))$, $\mathfrak{P}(P(x))$ durch Potenzreihen.

1. Es seien die Reihen:

$$(1) \qquad P_1(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} a_\nu x^\nu, \quad P_2(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} b_\nu x^\nu$$

konvergent für $R_0 < |x| < R$, so hat man für diesen Bereich zunächst:

---

1) Allenfalls abgesehen von dem in der vorigen Fußnote erwähnten Grenzfalle $|x| = R_0$ bzw. $|x| = R$.

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} a_\nu (x^\nu \cdot P_2(x))$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} a_\nu \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu} b_\mu x^{\mu+\nu} \right)$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu} a_\nu b_{\mu-\nu} x^\mu \right)$$

und, da man in dieser Beziehung auch x und die sämtlichen a_ν, b_ν durch ihre absoluten Beträge ersetzen darf, nach dem *Cauchy*schen Satze des vorigen Paragraphen:

$$(2) \qquad P_1(x) \cdot P_2(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu} \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} a_\nu b_{\mu-\nu} \right) \cdot x^\mu \qquad (R_0 < |x| < R).$$

Konvergieren $P_1(x)$, $P_2(x)$ noch für irgendeine Stelle X auf der Begrenzung $|X| = R$ oder $|X| = R_0$ (wenn auch durchweg oder teilweise nur *bedingt*) so behält Gl. (2) ihre Gültigkeit, falls die *rechtstehende Potenzreihe* gleichfalls *konvergiert*. Denn bezeichnet x' eine auf dem Strahle OX *im Innern* des Konvergenzbereiches gelegene Stelle, so gilt Gl. (2) für $x = x'$, wie nahe auch x' an X liegen mag, und da, infolge der über die *Konvergenz* der obigen Reihen gemachten Voraussetzung, nach dem *Abel*schen Satze (§ 32, Nr. 1, S. 252):

$$\lim_{x' \to X} P_1(x') = P_1(X), \quad \lim_{x' \to X} P_2(x') = P_2(X),$$

$$\lim_{x' \to X} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu} \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} a_\nu b_{\mu-\nu} \right) \cdot x'^\mu = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu} \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} a_\nu b_{\mu-\nu} \right) \cdot X^\mu,$$

so folgt in der Tat:

$$(3) \qquad P_1(X) \cdot P_2(X) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu} \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} a_\nu b_{\mu-\nu} \right) \cdot X^\mu.$$

Treten an die Stelle von $P_1(x)$, $P_2(x)$ zwei für $|x| < R$ konvergierende Reihen nach *positiven* Potenzen:

$$(4) \qquad \mathfrak{P}_1(x) = \sum_0^{\infty}{}^{\nu} a_\nu x^\nu, \quad \mathfrak{P}_2(x) = \sum_0^{\infty}{}^{\nu} b_\nu x^\nu,$$

so kann man das entsprechende Resultat aus dem eben gefundenen in der Weise ableiten, daß man für $\nu < 0$: $a_\nu = 0$, $b_\nu = 0$ setzt. Hierbei findet man zunächst:

$$\mathfrak{P}_1(x) \cdot \mathfrak{P}_2(x) = \sum_0^{\infty}{}^{\mu} \left(\sum_0^{\infty}{}^{\nu} a_\nu b_{\mu-\nu} \right) \cdot x^\mu,$$

und da sodann noch $b_{\mu-\nu}=0$ wird für $\mu-\nu<0$, d. h. für $\nu>\mu$, schließlich:

$$(5)\qquad \mathfrak{P}_1(x)\cdot\mathfrak{P}_2(x)=\sum_0^\infty{}^\mu\Big(\sum_0^\mu{}^\nu a_\nu b_{\mu-\nu}\Big)\cdot x^\mu \qquad (|x|<R),$$

ein Resultat, welches auch unmittelbar aus der *Cauchy*schen Multiplikationsregel für absolut konvergente komplexe Reihen (I_3, § 75, Nr. 4, S. 580) sich ergeben hätte.

Konvergiert außer $\mathfrak{P}_1(x)$, $\mathfrak{P}_2(x)$ auch *die rechtsstehende Reihe* für irgendeinen Wert X mit dem absoluten Betrage R, so hat man im Anschluß an Gl. (3) auch noch:

$$(6)\qquad \mathfrak{P}_1(X)\cdot\mathfrak{P}_2(X)=\sum_0^\infty{}^\mu\Big(\sum_0^\mu{}^\nu a_\nu b_{\mu-\nu}\Big)\cdot X^\mu,$$

wie im übrigen gleichfalls aus der entsprechenden Erweiterung der *Cauchy*schen Multiplikationsregel (I_3, § 79, Nr. 4, S. 611) hervorgehen würde Man kann aber auch umgekehrt die hier (mit Hilfe des *Abel*schen Stetigkeitssatzes) gewonnene Gleichung (6) benützen, um jene Erweiterung der Multiplikationsregel für zwei beliebige Reihen $\sum a_\nu$, $\sum b_\nu$ abzuleiten. Denn setzt man speziell $X=1$, so geht Gl. (6) in die folgende über:

$$(7)\qquad \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu\cdot\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu=\sum_0^\infty{}^\mu\Big(\sum_0^\mu{}^\nu a_\nu b_{\mu-\nu}\Big)=\sum_0^\infty{}^\mu c_\mu,$$

sofern *außer* den Reihen $\sum a_\nu$, $\sum b_\nu$ auch die Reihe $\sum c_\mu$ *konvergiert*. (Dies findet, wie a. a. O. gezeigt wurde, jedenfalls dann statt, wenn zum mindesten eine der beiden Reihen $\sum a_\nu$, $\sum b_\nu$ *absolut* konvergiert).

2. Aus dem in Nr. 1 Gesagten folgt, daß sich das *Quadrat* und somit auch *jede ganzzahlige positive Potenz* von $P(x)$ bzw. $\mathfrak{P}(x)$ durch eine Potenzeihe mit mindestens demselben Konvergenzbereiche wie $P(x)$ bzw. $\mathfrak{P}(x)$ darstellen läßt.

Ersetzt man also in einer ganzen rationalen Funktion $g(y)$ die Veränderliche y durch eine für $R_0<|x|<R$ bzw. $|x|<R$ konvergierende Potenzreihe $P(x)$ bzw. $\mathfrak{P}(x)$, so folgt daß $g(P(x))$ in eine nach *positiven und negativen* Potenzen von x fortschreitende, für $R_0<|x|<R$ konvergierende Reihe, $g(\mathfrak{P}(x))$ in eine für $|x|<R$ konvergierende Reihe nach *positiven* Potenzen von x umgeformt werden kann.

Das analoge gilt offenbar, wenn man in einer ganzen Funktion *mehrerer* Veränderlicher $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ die sämtlichen y_ν $(\nu=1, 2, \ldots, n)$ durch Potenzreihen $P_\nu(x)$ bzw. $\mathfrak{P}_\nu(x)$ ersetzt.

3. Es trete jetzt an die Stelle der ganzen Funktion $g(y)$ eine für $|y|<R_1$ konvergierende Reihe nach positiven Potenzen von y, die mit

$\mathfrak{P}_1(y)$ bezeichnet werden möge. Substituiert man dann zunächst für y eine Reihe nach *positiven* Potenzen von x:

$$(8) \qquad y = \mathfrak{P}(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu,$$

so ist offenbar eine *notwendige* Bedingung dafür, daß $\mathfrak{P}_1(\mathfrak{P}(x))$ für irgendeine *Umgebung* der Stelle $x = 0$ *überhaupt definiert ist, die,* daß $\mathfrak{P}_1(\mathfrak{P}(0))$ selbst einen bestimmten Wert hat, d. h. daß der Wert $y = \mathfrak{P}(0)$ *innerhalb des Konvergenzbereiches* von $\mathfrak{P}_1(y)$ liegt, also daß:

$$(9) \qquad |\mathfrak{P}(0)| = |a_0| < R_1.$$

Diese Bedingung ist aber auch zugleich *hinreichend,* und zwar nicht bloß für die *Konvergenz* von $\mathfrak{P}_1(\mathfrak{P}(x))$ in einer gewissen Umgebung der Stelle $x = 0$, sondern auch für die *Darstellbarkeit* von $\mathfrak{P}_1(\mathfrak{P}(x))$ durch eine Reihe nach *positiven Potenzen* von x.

Bezeichnet man nämlich mit $\mathfrak{P}[x]$ diejenige Potenzreihe, welche die *absoluten Beträge* $|a_\nu|$ zu Koeffizienten hat, so kann man die Bedingung (9) offenbar auch folgendermaßen schreiben:

$$(10) \qquad \mathfrak{P}[0] = |a_0| < R_1.$$

Alsdann existiert aber auch noch eine gewisse Umgebung (etwa $|x| < r$) der Stelle $x = 0$, so daß:

$$(11) \qquad |\mathfrak{P}[x]| < R_1 \quad \text{für:} \quad |x| < r,$$

und daher auch:

$$(12) \qquad |\mathfrak{P}[\varrho]| = \mathfrak{P}[\varrho] < R_1 \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varrho < r.$$

Somit konvergiert $\mathfrak{P}_1(\mathfrak{P}[\varrho])$ für $\varrho < r$ und um so mehr $\mathfrak{P}_1(\mathfrak{P}(x))$ für $|x| < r$, oder anders ausgesprochen: es *konvergiert* $\mathfrak{P}_1(\mathfrak{P}(x))$ nicht nur *selbst* für $|x| < r$, sondern *bleibt* auch *konvergent,* wenn man jedes einzelne Glied durch seinen absoluten Betrag ersetzt. Infolgedessen gilt aber der *Cauchy*sche Satz, d. h. man kann $\mathfrak{P}_1(\mathfrak{P}(x))$ in eine (zum mindesten) für $|x| < r$ konvergierende Reihe nach Potenzen von x umformen.[1])

1) Der *Weierstraß*sche Satz führt etwas schneller zum Ziel und wird im allgemeinen für die im Texte mit r bezeichnete vorläufige Konvergenzgrenze einen *größeren* Wert liefern. Da nämlich $\mathfrak{P}_1(y)$ für alle dem Bereiche $|y| \leq R_1' < R_1$ angehörigen Werte y *gleichmäßig* konvergiert, so hat man lediglich eine Umgebung $|x| < r'$ so zu bestimmen, daß:

$$|\mathfrak{P}(x)| \leq R_1', \text{ d. h. } < R_1 \quad \text{für:} \quad |x| < r',$$

was offenbar wieder *dann* und *nur* dann möglich ist, wenn:

$$|\mathfrak{P}(0)| < R_1.$$

Da aber *im allgemeinen:*

$$|\mathfrak{P}(x)| < |\mathfrak{P}[x]|$$

Wir wollen zwei Fälle besonders hervorheben, in denen die fragliche Umformung unter allen Umständen möglich ist, nämlich:

1) Wenn $\mathfrak{P}(0) = 0$, d. h. $\mathfrak{P}(x)$ eine Potenzreihe *ohne konstantes Glied* ist, da ja die Bedingung (9) alsdann stets erfüllt ist.

2) Wenn $\mathfrak{P}_1(y)$ eine *beständig* konvergierende Potenzreihe ist, in welchem Falle also für R_1 jede noch so große positive Zahl gesetzt werden kann, so daß die Bedingung (9) wiederum *eo ipso* erfüllt ist. Bedeutet dann R den Konvergenzradius von $\mathfrak{P}(x)$, so konvergieren auch $\mathfrak{P}[\varrho]$ und $\mathfrak{P}_1(\mathfrak{P}[\varrho])$ für $\varrho < R$, so daß also $\mathfrak{P}_1(\mathfrak{P}(x))$ in eine (zum mindesten) für $|x| < R$ konvergierende Potenzreihe transformiert werden kann.

4. Wird in der für $|y| < R_1$ konvergierenden Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(y)$ substituiert:

$$y = P(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' a_\nu x^\nu, \tag{13}$$

wo $P(x)$ für $R_0 < |x| < R$ konvergieren soll, so läßt sich über die Entwickelbarkeit von $\mathfrak{P}_1(P(x))$ nach Potenzen von x auf Grund des *Cauchy*schen Satzes nur folgendes feststellen. Man setze wiederum:

$$P[x] = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' |a_\nu| \cdot x^\nu, \tag{14}$$

so wird auch $P[x]$ für $R_0 < |x| < R$ konvergieren. Gibt es alsdann *irgendeine* positive, innerhalb der Intervalls $[R_0, R]$ gelegene Zahl ϱ_0 so daß:

$$P[\varrho_0] < R_1, \tag{15}$$

so müssen infolge der Stetigkeit von $P[x]$ auch *zwei* Zahlen r_0, r (wo: $R_0 \leqq r_0 < \varrho_0 < r \leqq R$) existieren, so daß:

$$P[\varrho] < R_1 \quad \text{für:} \quad r_0 < \varrho < r. \tag{16}$$

Somit konvergiert $\mathfrak{P}_1(P[\varrho])$ für: $r_0 < \varrho < r$, und es läßt sich $\mathfrak{P}_1(P(x))$ für $r_0 < |x| < r$ nach Potenzen von x ordnen.

Man erkennt aber, daß diese für die Entwickelbarkeit von $\mathfrak{P}_1(P(x))$ als *hinreichend* erkannte Bedingung (15) hier keineswegs (nach Analogie der Ungl. (9) bzw. (10)) als eine *notwendige* erscheint. *Notwendig* für die *Entwickelbarkeit* von $\mathfrak{P}_1(P(x))$ für irgendein dem Konvergenzbereich von

---

und nur in besonderem Falle:

$$|\mathfrak{P}(x)| = |\mathfrak{P}[x]|,$$

so wird auch *im allgemeinen* die Zahl r' *größer* ausfallen, als die im Texte mit r bezeichnete.

$P(x)$ angehöriges *Ringgebiet* ist vor allem die *Konvergenz* von $\mathfrak{P}_1(P(x))$ für ein solches Ringgebiet; d. h. es müssen zwei positive Zahlen $r_0' \geqq R_0$, $r' \leqq R$ existieren, so daß:

$$(17)\qquad |P(x)| < R_1 \quad \text{für:} \quad r_0' < |x| < r'$$

Alsdann lehrt aber der *Weierstraß*sche Satz, daß diese Bedingung in der Tat auch für die Entwickelbarkeit von $\mathfrak{P}_1(P(x))$ in eine für $r_0' < |x| < r'$ konvergierende Reihe nach positiven und negativen Potenzen von x *hinreichend* ist.

Da die Ungl. (17) offenbar erfüllt sein kann, *ohne* daß überhaupt eine dem Intervalle (R_0, R) angehörige Zahl ϱ_0 existiert, für welche die Bedingung (15): $P[\varrho_0] < R_1$ besteht, so erkennt man, daß hier der *Cauchy*sche Satz unter Umständen völlig *versagen* kann, während der *Weierstraß*sche tatsächlich die *notwendige und hinreichende* Bedingung für die Darstellbarkeit von $\mathfrak{P}_1(P(x))$ durch eine Potenzreihe liefert.

Schließlich sei noch bemerkt, daß diese notwendige und hinreichende Bedingung (17) auch hier wiederum ausnahmslos erfüllt ist — und zwar für $R_0 < |x| < R$ — wenn R_1 beliebig groß genommen werden kann, d. h. wenn $\mathfrak{P}_1(y)$ *beständig* konvergiert.

§ 41. Entwicklung von $\frac{\mathfrak{P}_1(x)}{\mathfrak{P}_2(x)}$ nach positiven ganzen Potenzen von x. — Spezieller Fall der rationalen Funktion $\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$: Rekurrierende Reihen und Partialbrüche.

1. Es sei $\mathfrak{P}_2(x)$ eine für $|x| < R$ konvergierende Potenzreihe, welche für $x = 0$ *nicht* verschwindet, so daß also:

$$(1)\qquad \mathfrak{P}_2(x) = b_0 + \sum_1^\infty {}_\nu\, b_\nu x^\nu$$

$$= b_0 + \mathfrak{P}_3(x), \quad \text{wo:} \quad |b_0| > 0, \ \mathfrak{P}_3(0) = 0,$$

und daher:

$$(2)\qquad \frac{1}{\mathfrak{P}_2(x)} = \frac{1}{b_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\mathfrak{P}_3(x)}{b_0}}.$$

Setzt man dann wiederum:

$$(3)\qquad \sum_1^\infty {}_\nu\, |b_\nu| x^\nu = \mathfrak{P}_3[x],$$

so läßt sich wegen $\mathfrak{P}_3[0] = 0$ eine positive Zahl r so fixieren, daß für $|x| < r$:

$$(4)\qquad \left|\frac{\mathfrak{P}_3[x]}{b_0}\right| < 1$$

und daher *a fortiori:*

(5) $$\left|\frac{\mathfrak{P}_3(x)}{b_0}\right| < 1.$$

Nun hat man allgemein:

$$\frac{1}{1+y} = \sum_0^\infty{}^{\nu} (-1)^\nu \cdot y^\nu \quad \text{für:} \quad |y| < 1,$$

und daher auch:

(6) $$\frac{1}{\mathfrak{P}_2(x)} = \frac{1}{b_0} \cdot \sum_0^\infty{}^{\nu} (-1)^\nu \cdot \left(\frac{\mathfrak{P}_3(x)}{b_0}\right)^\nu \quad \text{für:} \quad |x| < r,$$

wobei man zunächst die einzelnen Potenzen von $\frac{\mathfrak{P}_3(x)}{b_0}$ nach Nr 2 des vorigen Paragraphen nach Potenzen von x ordnen darf Da aber infolge der Bedingung (4) auch die Reihe:

$$\sum_0^\infty \left|\frac{\mathfrak{P}_3[\varrho]}{b_0}\right|^\nu$$

für $\varrho < r$ *konvergiert,* so darf man nach dem *Cauchy*schen Satze die Reihe (6) in eine (zum mindesten) für $|x| < r$ konvergierende Potenzreihe in x umformen:

(7) $$\frac{1}{\mathfrak{P}_2(x)} = \mathfrak{P}_{-2}(x).$$ [1])

Ist jetzt ein *Quotient* von der Form $\frac{\mathfrak{P}_1(x)}{\mathfrak{P}_2(x)}$ vorgelegt, wo $\mathfrak{P}_1(x)$ konvergent für $|x| < r_1$ und wiederum $\mathfrak{P}_2(0)$ *von Null verschieden,* so findet man mit Benutzung von Gl. (7) zunächst:

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x)}{\mathfrak{P}_2(x)} = \mathfrak{P}_1(x) \cdot \mathfrak{P}_{-2}(x) \qquad \left((|x| < r', \text{ wo } r' \begin{cases} \leqq r \\ \leqq r_1 \end{cases}\right)$$

und durch Anwendung des Multiplikationssatzes schließlich:

(8) $$\frac{\mathfrak{P}_1(x)}{\mathfrak{P}_2(x)} = \mathfrak{P}(x) \qquad (|x| < r').$$

---

1) Will man den *Weierstraß*schen Satz anwenden, so hat man eine Zahl r' lediglich so zu bestimmen, daß für $|x| < r'$ die Bedingung (5) besteht Dann folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (6) die Anwendbarkeit des betreffenden Satzes für $|x| < r'$. Man erkennt, daß auch hier wieder der Radius r' im allgemeinen größer ausfallen wird, als der im Texte mit r bezeichnete. Um gerade dies deutlich zu machen, wurde die vorliegende Entwicklung mit der im Text angewendeten Ausführlichkeit abgeleitet. Andernfalls hätte man ja die Zulässigkeit dieser Entwicklung ohne weiteres aus dem vorigen Paragraphen Nr. 3, Fall 1) ersehen können (wegen: $\mathfrak{P}_3(0) = 0$). (Im übrigen braucht auch r' noch nicht der *wahre* Konvergenzradius der betreffenden Reihe zu sein: dieser wird erst durch spätere Betrachtungen bestimmt werden.)

2. Nachdem jetzt die *Existenz* einer für eine gewisse Umgebung der Stelle $x = 0$ konvergierenden Potenzentwicklung $\mathfrak{P}(x)$ des Quotienten $\frac{\mathfrak{P}_1(x)}{\mathfrak{P}_2(x)}$ erwiesen, kann man die Bestimmung der *Koeffizienten* von $\mathfrak{P}(x)$ in sehr viel *einfacherer* Weise bewerkstelligen, als wenn man die in Nr. 1 angedeuteten Entwicklungen wirklich ausführen würde.

Vor allem bemerke man, daß es offenbar nur *eine einzige* Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ geben kann, welche für eine gewisse Umgebung der Nullstelle der Beziehung (8) genügt (nach dem Identitätssatze von § 38, Nr. 5, S. 289). Ist nun vorgelegt:

$$\mathfrak{P}_1(x) = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu, \qquad \mathfrak{P}_2(x) = \sum_0^\infty {}^\nu b_\nu x^\nu \text{ (wo } b_0 \neq 0),$$

und setzt man andererseits:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_0^\infty {}^\nu c_\nu x^\nu,$$

so müssen nach Gl. (8) diese unbekannten Koeffizienten c_ν so beschaffen sein, daß für $|x| < r'$:

$$(9) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu = \sum_0^\infty {}^\nu b_\nu x^\nu \cdot \sum_0^\infty {}^\nu c_\nu x^\nu$$

$$= \sum_0^\infty {}^\nu (b_\nu c_0 + b_{\nu-1} c_1 + \cdots + b_1 c_{\nu-1} + b_0 c_\nu) \cdot x^\nu.$$

Da aber diese Gleichung nach dem oben angeführten Identitätssatze die folgenden nach sich zieht:

$$(10) \quad a_\nu = b_\nu c_0 + b_{\nu-1} c_1 + \cdots + b_1 c_{\nu-1} + b_0 c_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

so erhält man auf diesem Wege ein unbegrenztes System linearer Gleichungen, aus denen sich die Unbekannten c_ν in folgender Weise berechnen lassen. Man hat:

$$(11) \qquad \begin{cases} a_0 = b_0 c_0 \\ a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1 \\ a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_\nu = b_\nu c_0 + b_{\nu-1} c_1 + b_{\nu-2} c_2 + \cdots + b_1 c_{\nu-1} + b_0 c_\nu \end{cases}$$

und findet somit aus der ersten dieser Gleichungen den Wert von c_0, darauf aus der zweiten denjenigen von c_1, aus der dritten den von c_2 usf.

Man kann aber auch, statt die Koeffizienten in dieser Weise *sukzessive* zu berechnen, eine *independente* Formel zur Berechnung von c_ν

angeben, indem man c_ν als Lösung des obigen Systems linearer Gleichungen in der bekannten Weise durch den Quotienten zweier Determinanten darstellt. Da hierbei:

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\nu-1} & b_{\nu-2} & b_{\nu-3} & \cdot & 0 \\ b_\nu & b_{\nu-1} & b_{\nu-2} & \dots & b_0 \end{vmatrix} = b_0^{\nu+1}$$

und:

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 & a_2 \\ \\ b_{\nu-1} & b_{\nu-2} & b_{\nu-3} & \dots & b_0 & a_{\nu-1} \\ b_\nu & b_{\nu-1} & b_{\nu-2} & \dots & b_1 & a_\nu \end{vmatrix} = (-1)^\nu \cdot \Delta_\nu$$

$$\text{wo: } \Delta_\nu = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & b_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\nu-1} & b_{\nu-1} & b_{\nu-2} & \dots & b_0 \\ a_\nu & b_\nu & b_{\nu-1} & \dots & b_1 \end{vmatrix},$$

so ergibt sich:

$$(14a)\qquad c_\nu = (-1)^\nu \cdot \frac{\Delta_\nu}{b_0^{\nu+1}} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ .\ ),$$

also z B.:

$$(14a)\qquad \begin{cases} c_0 = \frac{a_0}{b_0} \\ c_1 = -\frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_0^2} \\ c_2 = \frac{a_0(b_1^2 - b_0 b_2) - a_1 b_0 b_1 + a_2 b_0^2}{b_0^3} \end{cases} \quad \text{usf.}$$

Man bezeichnet das zur Bestimmung der c_ν angewendete Verfahren als die *Methode der unbestimmten Koeffizienten.*

3. Die vorstehenden Betrachtungen behalten offenbar ihre Gültigkeit, wenn sich $\mathfrak{P}_1(x)$, $\mathfrak{P}_2(x)$ auf zwei *ganze rationale Funktionen:*

$$(15)\qquad \begin{cases} g_1(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \\ g_2(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n \end{cases}$$

reduzieren. Setzt man dann wiederum:

(16) $$\frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \sum_0^{\infty} {}_{\nu}\, c_{\nu} x^{\nu},$$

so hat man zunächst, wie früher:

(17a) $$\begin{cases} b_0 c_0 = a_0 \\ b_1 c_0 + b_0 c_1 = a_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{n-1} c_0 + b_{n-2} c_1 + \cdots + b_1 c_{n-2} + b_0 c_{n-1} = a_{n-1} \end{cases}$$

(17b) $$b_n c_0 + b_{n-1} c_1 + \cdots + b_2 c_{n-2} + b_1 c_{n-1} + b_0 c_n = a_n.$$

Da aber $g_2(x)$ mit dem Gliede $b_n x^n$ abbricht, also für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$: $b_{n+\lambda} = 0$ zu setzen ist, so folgt, daß die weiteren Bestimmungsgleichungen durchweg die folgende Form haben müssen:

(18) $$b_n c_\lambda + b_{n-1} c_{\lambda+1} + \cdots + b_1 c_{n+\lambda-1} + b_0 c_{n+\lambda} = a_{n+\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

und diese Gleichung gilt auch noch für $\lambda = 0$, da sie für diesen Fall in Gl. (17 b) übergeht.

Beachtet man ferner, daß $g_1(x)$ keine höhere Potenz als x^m enthält, daß also $a_{m+\mu} = 0$ für $\mu \geqq 1$, so folgt, daß auf der rechten Seite der Gleichungen (18) von einer bestimmten Stelle ab durchweg 0 stehen muß.

Ist insbesondere $m < n$, so hat man schon $a_n = 0$ und allgemein $a_{n+\lambda} = 0$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$, so daß also an die Stelle der Gleichungen (17b) und (18) die folgende tritt:

(19) $$b_n c_\lambda + b_{n-1} c_{\lambda+1} + \cdots + b_1 c_{n+\lambda-1} + b_0 c_{n+\lambda} = 0 \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots).$$

(Außerdem wird eventuell schon in einer Anzahl von Gleichungen (17a) statt $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{n-1}$ beständig 0 stehen).

Ist dagegen $m \geqq n$, so wird in Gl. (18) erst dann $a_{n+\lambda} = 0$, wenn $n + \lambda \geqq m + 1$ also wenn $\lambda \geqq m - n + 1$; mit anderen Worten: dann gelten die Gl. (19) nicht schon von $\lambda = 0$, sondern erst von $\lambda = m - n + 1$ an.

In *jedem* Falle haben also die Koeffizienten c_ν die Eigenschaft, daß von einer bestimmten Stelle ν ab (nämlich für $\nu \geqq p$, wo p die *größere* der beiden Zahlen n und $m + 1$ bedeutet) c_ν sich stets als *eine ganz bestimmte, in ihren Koeffizienten von ν unabhängige, homogene ganze lineare Funktion* von $c_{\nu-1}, c_{\nu-2}, \ldots, c_{\nu-n}$ darstellen läßt.

Man nennt eine Reihe mit dieser Eigenschaft *rekurrierend* oder *rekurrent* und kann somit den Satz aussprechen:

Jede gebrochene rationale Funktion, deren Nenner für $x = 0$ nicht verschwindet, läßt sich für eine gewisse Umgebung der Stelle $x = 0$ in eine konvergente, rekurrierende Potenzreihe entwickeln.

4. Es scheint nicht ohne Interesse, zu bemerken, daß der eben ausgesprochene Satz auch *umkehrbar* ist, d. h.:

Jede rekurrierende Potenzreihe in x konvergiert für eine gewisse Umgebung der Stelle $x = 0$ und ihre Summe ist einer gewissen rationalen Funktion gleich.

Beweis. Es sei vorgelegt die Reihe:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_0^\infty {}^\nu c_\nu x^\nu,$$

deren Koeffizienten etwa für $\lambda \geqq p$ (wo $p \geqq 0$), aber *nicht* für $\lambda = p - 1$ einer linearen Relation von folgender Form genügen sollen:

$$b_n c_\lambda + b_{n-1} c_{\lambda+1} + \cdots + b_1 c_{n+\lambda-1} + b_0 c_{n+\lambda} = 0. \tag{20}$$

Dabei bedeuten $b_0, b_1, \ldots, b_n$ beliebige Konstanten unter denen auch beliebig viele — mit einziger Ausnahme von b_0 und b_n — den Wert 0 haben dürfen.

Man bestimme nun eine Reihe von Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ durch die Gleichungen:

$$(21\text{a})\quad \begin{cases} a_0 = b_0 c_0 \\ a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{n-1} = b_{n-1} c_0 + b_{n-2} c_1 + \cdots + b_1 c_{n-2} + b_0 c_{n-1} \end{cases}$$

(wobei beliebig viele dieser a_ν *Null* werden können, was von der besonderen Beschaffenheit der b_ν und c_ν abhängt), ferner im Falle $p \geqq 1$:

$$(21\text{b})\quad \begin{cases} a_n = b_n c_0 + b_{n-1} c_1 + \cdots + b_1 c_{n-1} + b_0 c_n \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{n+p-1} = b_n c_{p-1} + b_{n-1} c_p + \cdots + b_1 c_{n+p-2} + b_0 c_{n+p-1}. \end{cases}$$

Dabei ist offenbar a_{n+p-1} sicher von *Null* verschieden, da andernfalls die Relation (20) schon für $\lambda = p - 1$ gelten würde, was der Voraussetzung widerspricht.

Setzt man sodann:

$$(22)\quad \begin{cases} g_1(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n+p-1} x^{n+p-1} \\ g_2(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n, \end{cases}$$

so ist offenbar $\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ gerade diejenige rationale Funktion, welche nach Nr. 3 in der Umgebung der Stelle $x = 0$ durch die vorgelegte Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu c_\nu x^\nu$ dargestellt wird. Mit anderen Worten: die obige Reihe besitzt

für eine gewisse Umgebung der Stelle $x = 0$ die Summe $\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$, woraus dann *eo ipso* folgt, daß sie für diese Umgebung *konvergiert.*

5 Da $g(x) = g(x_0 + (x - x_0))$ auch als ganze Funktion von $(x - x_0)$, also $\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ als rational gebrochene Funktion von $(x - x_0)$ dargestellt werden kann, so erkennt man, daß $\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ auch in eine rekurrierende Reihe nach positiven Potenzen von $(x - x_0)$ entwickelt werden kann, falls x_0 *keine* Nullstelle von $g_2(x)$ ist.

Ist dagegen x_1 eine k-fache Nullstelle von $g_2(x)$ $(k \geqq 1)$, so kann man setzen:

$$g_2(x) = (x - x_1)^k \cdot g_3(x), \tag{23}$$

wo $g_3(x)$ für $x = x_1$ *nicht* verschwindet, so daß $\frac{g_1(x)}{g_3(x)}$ für eine gewisse Umgebung der Stelle $x = x_1$ in die Form gesetzt werden kann:

$$\frac{g_1(x)}{g_3(x)} = \sum_0^\infty {}^\nu c_\nu (x - x_1)^\nu \tag{24}$$

Alsdann wird:

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \sum_0^\infty {}^\nu c_\nu (x - x_1)^{\nu - k}$$

$$= \frac{c_0}{(x - x_1)^k} + \frac{c_1}{(x - x_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{x - x_1} + \sum_0^\infty {}^\nu c_{\nu + k}(x - x_1)^\nu \tag{25}$$

Die Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu c_{\nu+k}(x - x_1)^\nu$ bleibt dabei offenbar eine *rekurrierende,* kann also zunächst in eine rationale Funktion umgewandelt werden, die sich dann wiederum, wenn x_2 eine weitere Wurzel des Nenners bedeutet, nach Potenzen von $x - x_2$ entwickeln läßt usf., bis die Wurzeln der Nenner der bei diesem Verfahren auftretenden rationalen Funktionen, d. h. schließlich diejenigen des ursprünglichen Nenners $g_2(x)$ erschöpft sind.

Man gewinnt also auf diesem Wege einen neuen Beweis für die Zerlegbarkeit einer rationalen Funktion in *Partialbrüche* und zugleich eine Methode zur Bestimmung der Zähler c_ν.

Man hätte aber auch *umgekehrt,* von der Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion $\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ ausgehend deren Darstellung durch Potenzreihen herleiten können, ohne von dem allgemeineren Resultate der Nummern 1 und 2 Gebrauch zu machen.[1]) Hierbei kommt es offenbar lediglich

1) Man bemerke, daß dagegen die Methoden von Nr. 1 und 2 in keiner Weise

auf die Entwicklung einer endlichen Anzahl von Ausdrücken der Form:

$$\frac{1}{(x-x_\lambda)^\mu} \qquad (\lambda \geqq 1,\ \mu \geqq 1)$$

nach Potenzen von $(x-x_0)$ an. Da aber:

$$\frac{1}{x-x_\lambda} = \frac{1}{x-x_0-(x_\lambda-x_0)}$$

$$= \frac{1}{x_\lambda - x_0} \cdot \frac{1}{\frac{x-x_0}{x_\lambda-x_0}-1}$$

$$(26) \qquad = -\frac{1}{x_\lambda-x_0}\sum_0^\infty{}^\nu \left(\frac{x-x_0}{x_\lambda-x_0}\right)^\nu \quad \text{für} \quad |x-x_0| < |x_\lambda - x_0|$$

und somit auch $\frac{1}{(x-x_\lambda)^\mu}$ für $\mu > 1$ nach § 40, Nr. 2, (S. 305) in eine $\mathfrak{P}(x-x_0)$ mit dem nämlichen Konvergenzkreise entwickelt werden kann[1]), so erkennt man, daß schließlich auch $\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ durch eine Reihe nach positiven Potenzen von $(x-x_0)$ darstellbar ist, als deren (wahrer) Konvergenzradius sich hier ohne weiteres der *kleinste* unter den absoluten Beträgen $|x_\lambda - x_0|$ ergibt.

§ 42. Entwicklung von $\mathfrak{P}(x+h)$ nach Potenzen von h. — Taylorsche und Mac Laurinsche Reihe. — Die Derivierten einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$.

1. Es konvergiere die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x) \equiv \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ für $|x| < R$ (bzw. *beständig*). Sei dann zunächst $|x+h| < R$ (bzw. $(x+h)$ eine beliebige endliche Zahl), so hat man:

$$(1) \quad \mathfrak{P}(x+h) = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu (x+h)^\nu$$

$$= \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \left(x^\nu + \frac{\nu}{1}x^{\nu-1}h + \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}x^{\nu-2}h^2 + \cdots + h^\nu\right).$$

Sind nun x und h so beschaffen, daß nicht allein $|x+h| < R$, sondern auch:

$$(2) \qquad |x| + |h| < R$$

---

den Fundamentalsatz der Algebra in Anspruch nehmen, welcher andererseits die unentbehrliche Voraussetzung für den Existenzbeweis der betreffenden Partialbruchzerlegung bildet (sofern nicht etwa die Faktorenzerlegung des Nenners von vornherein als gegeben angesehen wird).

1) Über die wirkliche Herstellung einer solchen Entwicklung s § 46, Nr. 1.

(eine Bedingung, die im Falle der *beständigen* Konvergenz von $\mathfrak{P}(x)$ wiederum nur verlangt, daß x und h nicht unendlich sind) — d. h. geometrisch gesprochen: bedeutet x einen beliebigen Punkt im Innern des Kreises $(0)R$, $x+h$ einen solchen im Innern eines um x beschriebenen Kreises, der jenen ersteren von innen berührt — so konvergiert auch noch die aus lauter *positiven* Bestandteilen zusammengesetzte Reihe:

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} |a_\nu|(|x|+|h|)^\nu$$

und somit darf nach dem *Cauchy*schen Satze diese selbst und auch $\mathfrak{P}(x+h)$ nach Potenzen von h geordnet werden. Man erhält auf diese Weise:

(3) $\mathfrak{P}(x+h) = \mathfrak{P}_0(x) + \mathfrak{P}_1(x)\cdot h + \mathfrak{P}_2(x)\cdot h^2 + \cdots + \mathfrak{P}_n(x)\cdot h^n + \cdots$

wo[1]):

$$(4)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}_0(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} a_\nu x^\nu = \mathfrak{P}(x) \\ \mathfrak{P}_1(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\nu}{1} a_\nu x^{\nu-1} = \frac{1}{1}\cdot \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \nu a_\nu x^{\nu-1} \\ \mathfrak{P}_2(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2} a_\nu \cdot x^{\nu-2} = \frac{1}{2!}\sum_{2}^{\infty}{}_{\nu} \nu(\nu-1) a_\nu x^{\nu-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{P}_n(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1)}{1\cdot 2\cdots n} a_\nu x^{\nu-n} \\ \qquad = \frac{1}{n!}\sum_{n}^{\infty}{}_{\nu} \nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1)\cdot a_\nu x^{\nu-n}. \end{cases}$$

Setzt man allgemein:

$$(5)\quad \sum_{n}^{\infty}{}_{\nu} \nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1)\cdot a_\nu x^{\nu-n}$$

$$\equiv \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} (\nu+n)(\nu+n-1)\cdots(\nu+1)\cdot a_{\nu+n}\cdot x^\nu = \mathfrak{P}^{(n)}(x) \quad (n=1,2,3,\ldots),$$

---

1) Vgl. die Herstellung der entsprechenden Entwicklung von $g(x+h)$: § 19, Nr. 1, S. 173.

so nimmt die Entwicklung (3) die Gestalt an:

$$(6)\qquad \mathfrak{P}(x+h) = \mathfrak{P}(x) + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu!} \mathfrak{P}^{(\nu)}(x) \cdot h^{\nu}$$

oder auch kürzer:

$$(6\text{a})\qquad \mathfrak{P}(x+h) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu!} \mathfrak{P}^{(\nu)}(x) \cdot h^{\nu},$$

wenn man $\mathfrak{P}^{(0)}(x)$ die Bedeutung von $\mathfrak{P}(x)$ und dem Symbol $0!$ wie schon früher diejenige von 1 beilegt.

Die Relation (6) hat eine ganz analoge Form wie die für eine *ganze Funktion* n^{ten} Grades geltende (§ 19, Gl (4a)):

$$g(x+h) = g(x) + \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \frac{1}{\nu!} \cdot g^{(\nu)}(x) \cdot h^{\nu},$$

und sie geht geradezu in diese letztere über, wenn die Reihe $\mathfrak{P}(x)$ mit dem n^{ten} Gliede *abbricht*, wenn also $a_{\nu} = 0$ für $\nu > n$. Die $g^{(\nu)}(x)$ erscheinen danach lediglich als *spezielle Fälle* der $\mathfrak{P}^{(\nu)}(x)$ Wenn wir daher $\mathfrak{P}^{(\nu)}(x)$, d. h. den *Koeffizienten* von $\frac{1}{\nu!} h^{\nu}$ in der Entwicklung von $\mathfrak{P}(x+h)$ nach ganzen positiven Potenzen von h, jetzt als die ν^{te} *Derivierte* ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) von $\mathfrak{P}(x)$ bezeichnen, so steht diese *verallgemeinerte* Definition der *Derivierten* mit der früher lediglich für *ganze rationale Funktionen* gegebenen völlig im Einklange, sie *umfaßt* dieselbe als *speziellen* Fall.

Mit Einführung dieses Begriffes kann man den Inhalt der Formel (6a), wenn man größerer Prägnanz zuliebe noch x_1 statt x schreibt, also:

$$(7)\qquad \mathfrak{P}(x_1+h) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu!} \mathfrak{P}^{(\nu)}(x_1) \cdot h^{\nu} \qquad (\text{wo: } |x_1| + |h| < R)$$

$$= \mathfrak{P}(x_1) + \frac{1}{1!} \cdot \mathfrak{P}'(x_1) \cdot h + \frac{1}{2!} \mathfrak{P}''(x_1) \cdot h^2 + \cdots$$

folgendermaßen aussprechen: der Wert von $\mathfrak{P}(x_1+h)$ kann für eine gewisse Umgebung der Stelle x_1, nämlich zum mindesten für alle durch die Bedingung $|h| < R - |x_1|$ charakterisierten Stellen (x_1+h), (geometrisch gesprochen, für alle Stellen innerhalb eines Kreises um den Punkt x_1, der den Kreis $(0)R$ von innen berührt), aus der Formel (7) *berechnet* werden, sobald der Wert von $\mathfrak{P}(x)$ und der *sämtlichen Derivierten* $\mathfrak{P}^{(\nu)}(x)$ für die *eine* Stelle $x = x_1$ bekannt ist.

Die Reihenentwicklung (7) wird die *Taylorsche* Reihe für $\mathfrak{P}(x_1+h)$ genannt. Setzt man $x_1 + h = x$, also: $h = x - x_1$ (wobei jetzt x_1 als *be-*

liebig im Kreise $(0)R$ gewählt, aber *fest*, x als *veränderlich* zu denken ist), so nimmt dieselbe die Form an:

$$(8)\quad \mathfrak{P}(x) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{1}{\nu!}\mathfrak{P}^{(\nu)}(x_1)\cdot(x-x_1)^\nu \quad \text{für:}\quad |x-x_1| < R - |x_1|.$$

Und, wenn man speziell $x_1 = 0$ wählt:

$$(9)\qquad \mathfrak{P}(x) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{1}{\nu!}\cdot\mathfrak{P}^{(\nu)}(0)\cdot x^\nu \quad \text{für:}\quad |x| < R,$$

eine Entwicklung, die (wegen: $\mathfrak{P}^{(n)}(0) = n!\,a_n$ nach Gl. (5)) lediglich *eine andere Schreibweise* der ursprünglichen Definitionsgleichung $\mathfrak{P}(x) = \sum_0^\infty {}_\nu a_\nu x^\nu$ darstellt und als die *Mac Laurinsche* Reihe bezeichnet wird.

Die Vergleichung der Koeffizienten in (9) mit den früher gegebenen Mittelwertsdarstellungen (§ 37, Nr. 1, Gl. (4a) (S. 279)) liefert dann unmittelbar die Beziehungen:

$$(10)\quad \mathfrak{P}(0) = \mathfrak{M}(\mathfrak{P}(er)),\quad \mathfrak{P}^{(\nu)}(0) = \nu!\,\mathfrak{M}((er)^{-\nu}\cdot\mathfrak{P}(er)) \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Und durch Anwendung jener Mittelwertsdarstellung und der Gl. (4b) des § 37 auf die Reihe:

$$\mathfrak{P}^{(n)}(x) = \sum_0^\infty {}_\nu (\nu+n)(\nu+n-1)\cdots(\nu+1)\cdot a_{n+\nu}x^\nu \quad (\text{Gl. } (5))$$

ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} &(11)\quad \mathfrak{M}((er)^{-\nu}\cdot\mathfrak{P}^{(n)}(er)) = (\nu+n)(\nu+n-1)\cdots(\nu+1)\cdot a_{n+\nu} \\ &(12)\quad \mathfrak{M}((er)^{\nu+1}\cdot\mathfrak{P}^{(n)}(er)) = 0 \end{aligned}\right\}(\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

2. Wie die Herleitung der Formel (6) zeigt, müssen die als *Derivierte* von $\mathfrak{P}(x)$ bezeichneten Potenzreihen $\mathfrak{P}^{(\nu)}(x)$ für jede Stelle x im Innern des Konvergenzbereiches von $\mathfrak{P}(x)$ gleichfalls *konvergieren* (also *beständig*, falls $\mathfrak{P}(x)$ selbst *beständig* konvergiert). Denn *wie* man auch die Stelle x der Bedingung $|x| < R$ genügend wählen mag, so gibt es immer Zahlen h, so daß auch noch $|x| + |h| < R$. Für solche Werte von h gilt dann aber die Formel (6), und da diese auf der wohlbegründeten Anwendung des *Cauchyschen* Doppelreihensatzes beruht, so müssen die Koeffizienten $\frac{1}{\nu!}\mathfrak{P}^{(\nu)}(x)$, also die $\mathfrak{P}^{(\nu)}(x)$ selbst, für *jedes einzelne (endliche)* ν auch einen *bestimmten endlichen* Wert besitzen. Damit ist nicht ausgeschlossen, daß die $|\mathfrak{P}^{(\nu)}(x)|$ zugleich mit ν sämtlich oder teilweise über alle Grenzen wachsen: ja, dies muß sogar *immer* der Fall sein, wenn die Reihe $\mathfrak{P}(x)$ einen *endlichen* Konvergenzradius R besitzt. Würden nämlich im letzteren

Falle die $|\mathfrak{P}^{(\nu)}(x)|$ für *irgendeine* innerhalb des Kreises $(0)R$ gelegene Stelle x_1 beständig unter einer festen positiven Zahl γ bleiben, so hätte man:

$$\sum_0^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu!}|\mathfrak{P}^\nu(x_1)\cdot h^\nu| < \gamma\cdot\sum_0^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu!}|h|^\nu,$$

d. h. die Reihe $\sum \frac{1}{\nu!}\mathfrak{P}^{(\nu)}(x_1)\cdot h^\nu$ müßte dann *beständig* konvergieren $\left(\text{da ja } \sum \frac{1}{\nu!}|h|^\nu\right.$ *beständig* konvergiert nach § 30, Nr. 3, S 243$\left.\right)$: daraus würde sich aber, wie später gezeigt werden wird, mit Notwendigkeit ergeben, daß auch $\mathfrak{P}(x)$ *beständig* konvergieren müßte, was der Voraussetzung widerspricht.

Im übrigen läßt sich auch direkt beweisen, daß der Konvergenzradius von $\mathfrak{P}^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ allemal mit dem Konvergenzradius R von $\mathfrak{P}(x)$ übereinstimmt Nach § 30, Nr 4, Gl. (6) hat man:

$$R = \left(\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\sqrt[\nu]{|a_\nu|}\right)^{-1} \tag{13}$$

und daher, wenn man den Konvergenzradius von

$$x^n\cdot\mathfrak{P}^{(n)}(x) = \sum_n^\infty{}^\nu \nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1)\cdot x^\nu$$

mit R' bezeichnet:

$$R' = \left(\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\sqrt[\nu]{\nu\cdot(\nu-1)\cdots(\nu-n+1)\cdot|a_\nu|}\right)^{-1}. \tag{14}$$

Da aber nach einem *Cauchyschen* Grenzwertsatze (I_2, § 56, S. 394, Gl.(11)):

$$\begin{aligned}\lim_{\nu\to\infty}\sqrt[\nu]{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1)} &= \lim_{\nu\to\infty}\frac{(\nu+1)\ \nu\cdots(\nu-n+2)}{\nu\ (\nu-1)\cdots(\nu-n+1)}\\ &= \lim_{\nu\to\infty}\frac{\nu+1}{\nu-n+1} = 1^{1)},\end{aligned} \tag{15}$$

---

1) Man findet übrigens auch ohne Benutzung des betreffenden *Cauchy*schen Satzes für $x = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\sqrt[\nu]{(\nu\pm x)} = e^{\frac{1}{\nu}\lg(\nu\pm x)}$$

und andererseits:

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\nu}\lg(\nu\pm x) = \lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{\lg\nu}{\nu}+\frac{\lg\left(1\pm\frac{x}{\nu}\right)}{\nu}\right) = 0,$$

also:

$$\lim_{\nu\to\infty}\sqrt[\nu]{(\nu\pm x)} = 1$$

und daher auch

$$\lim_{\nu\to\infty}\sqrt[\nu]{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1)} = 1$$

so folgt, daß:

(16) $$R' = \overline{\lim_{\nu \to \infty}} \left(\sqrt[\nu]{|a_\nu|}\right)^{-1} = R.$$

Man kann dies schließlich auch nachweisen, ohne auf den eben benützten Satz Gl. (13) über den wahren Konvergenzradius zu rekurrieren. Die Reihe: $\sum \nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1)\cdot x^\nu$ *konvergiert*, wegen:

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\nu\cdot(\nu-1)\cdots(\nu-n+1)}{(\nu+1)\cdot\nu \quad \cdot(\nu-n+2)} = 1$$

nach § 30, Gl. (8) für $|x| = \alpha < 1$, und man hat daher:

(17) $$\lim_{\nu \to \infty} \nu\cdot(\nu-1)\cdots(\nu-n+1)\cdot\alpha^\nu = 0 \quad \text{für:} \quad 0 < \alpha < 1$$

Andererseits hat man, da $\sum a_\nu x^\nu$ für $|x| < R$ konvergieren sollte,

(18) $$\lim_{\nu \to \infty} |a_\nu|\cdot r^\nu = 0 \quad \text{für} \quad 0 < r < R.$$

Wird jetzt eine positive Zahl $\varrho < r$ angenommen, so ergibt sich durch Verbindung dieser beiden Relationen:

(19) $$\lim_{\nu \to \infty} \nu\cdot(\nu-1)\cdots(\nu-n+1)\cdot|a_\nu|\varrho^\nu$$
$$= \lim_{\nu \to \infty} \nu\cdot(\nu-1)\cdots(\nu-n+1)\cdot\left(\frac{\varrho}{r}\right)^\nu\cdot\lim_{\nu \to \infty}|a_\nu|\cdot r^\nu = 0.$$

Daraus folgt zunächst, daß $\mathfrak{P}^{(n)}(x)$ für $|x| < \varrho$ konvergiert. Alsdann muß aber schließlich $\mathfrak{P}^{(n)}(x)$ auch für jedes x konvergieren, welches nur der Bedingung genügt: $|x| < R$. Denn ist das letztere der Fall, so gibt es allemal auch noch (unendlich viele) positive Zahlen ϱ, r, so daß: $|x| < \varrho < r < R$, woraus dann nach dem Gesagten folgt, daß $\mathfrak{P}^{(n)}(x)$ für jedes solche x konvergieren muß. Hiernach ist also der Konvergenzradius von $\mathfrak{P}^{(n)}(x)$ *mindestens* $= R$. Daß er aber andererseits nicht $> R$ sein kann, erkennt man ohne weiteres daraus, daß für jeden Wert x, für den $\mathfrak{P}^{(n)}(x)$ also auch $x^n\cdot\mathfrak{P}^{(n)}(x) = \sum\nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1)\cdot a_\nu x^\nu$ *absolut* konvergiert *a fortiori* $\mathfrak{P}(x) = \sum a_\nu x^\nu$ absolut konvergieren muß.

Es besitzen somit die Derivierten $\mathfrak{P}^{(n)}(x)$ genau denselben Konvergenzradius, wie $\mathfrak{P}(x)$. Auf demselben Wege ergibt sich auch, daß die $\mathfrak{P}^{(n)}(x)$ *beständig* konvergieren, wenn $\mathfrak{P}(x)$ *beständig* konvergiert.

3. Auf dem Konvergenzkreise selbst können die Reihen $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{P}^{(n)}(x)$, sowie die $\mathfrak{P}^{(n)}(x)$ unter sich *verschiedenes* Verhalten zeigen. So ist z. B. die folgende Reihe mit dem Konvergenzradius 1:

(20) $$\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu^2}\cdot x^\nu$$

auf dem ganzen Konvergenzkreise noch *absolut* konvergent, während die

erste Derivierte

$$\mathfrak{P}'(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \cdot x^{\nu-1}$$

für $x = 1$ *divergiert*, im übrigen auf dem Konvergenzkreise noch *bedingt konvergiert* (s. § 31, Nr. 2, S. 249) und die *zweite* Derivierte:

$$\mathfrak{P}''(x) = \sum_{2}^{\infty} \frac{\nu - 1}{\nu} \cdot x^{\nu-2},$$

wie dann offenbar auch jede folgende, für $|x| = 1$ *durchweg divergiert.*

Setzt man allgemein:

$$(21) \qquad \mathfrak{P}(x) = \sum_{0}^{\infty} a_\nu x^\nu, \quad \mathfrak{P}^{(n)}(x) = \sum_{n}^{\infty} a_\nu^{(n)} x^{\nu-n},$$

wo also:

$$(22) \qquad a_\nu^{(n)} = \nu \cdot (\nu - 1) \cdots (\nu - n + 1) \cdot a_\nu$$

und daher:

$$a_\nu^{(n+1)} = \nu \cdot (\nu - 1) \cdots (\nu - n + 1)(\nu - n) \cdot a_\nu,$$

so folgt:

$$(23) \qquad \begin{cases} a_\nu^{(n)} = \dfrac{a_\nu^{(n+1)}}{\nu - n} \\ a_\nu^{(n-1)} = \dfrac{a_\nu^{(n+1)}}{(\nu - n)(\nu - n + 1)}. \end{cases}$$

Konvergiert nun $\mathfrak{P}^{(n+1)}(x)$ für irgend eine Stelle X auf dem Konvergenzkreise, so ergibt sich aus dem Konvergenzsatze von I_2, § 59, Nr. 5 das gleiche für $\mathfrak{P}^{(n)}(x)$ $\left(\text{da die } \frac{1}{\nu - n} \text{ monoton gegen Null konvergieren}\right)$[1]. Ist dann $n \geq 1$ (NB. im Falle $n = 0$ hat $\mathfrak{P}^{(n)}(x)$ die Bedeutung von $\mathfrak{P}(x)$), so ist $\mathfrak{P}^{(n-1)}(x)$ und um so mehr jedes $\mathfrak{P}^{(\nu)}(x)$ mit *niedrigerem* Index (auf

---

1) Dabei kann $\mathfrak{P}^{(n)}(x)$ — geradeso wie $\mathfrak{P}^{(n+1)}(x)$ — eventuell *nur bedingt* konvergieren. Setzt man z. B. $\mathfrak{P}^{(n-1)}(x) = \sum_{3}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu-1) \cdot \lg(\nu-1)} x^\nu$, so folgt:

$$\mathfrak{P}^{(n)}(x) = \sum_{3}^{\infty} \frac{1}{(\nu-1) \cdot \lg(\nu-1)} x^{\nu-1},$$

$$\mathfrak{P}^{(n+1)}(x) = \sum_{3}^{\infty} \frac{1}{\lg(\nu-1)} \cdot x^{\nu-2},$$

so daß also $\mathfrak{P}^{(n+1)}(x)$, $\mathfrak{P}^{(n)}(x)$ für $|x| = 1$ nur *bedingt* konvergieren (mit Ausschluß der Stelle $x = +1$, wo beide Reihen nach I_2, § 48, Nr 3 *divergieren*), während erst $\mathfrak{P}^{(n-1)}(x)$ für $|x| = 1$ *absolut* konvergiert.

dem ganzen Kreise $|x| = |X|$) *absolut* konvergent $\left(\text{weil } \sum_\nu \frac{1}{(\nu-n)(\nu-n+1)}\right.$ *absolut* konvergiert und $\lim_{\nu\to\infty} |a_\nu^{(n+1)} \cdot X^\nu| = 0$ infolge der Konvergenz von $\mathfrak{P}^{(n+1)}(X)$).

Daraus folgt weiter, daß gleichzeitig mit irgendeinem $\mathfrak{P}^{(n)}(X)$ auch alle $\mathfrak{P}^{(n+\nu)}(X)$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ *divergieren* müssen.

Es verdient im übrigen ausdrücklich hervorgehoben zu werden, daß es Potenzreihen gibt, welche *mit ihren sämtlichen Derivierten* noch auf dem ganzen Konvergenzkreise *konvergieren* (und zwar, nach dem eben Gesagten, dann durchweg *absolut*). Man setze z. B.

$$a_\nu = \alpha^{-m_\nu}, \tag{24}$$

wo α eine reelle Zahl > 1 bedeutet und m_ν mit ν positiv und monoton *so* ins Unendliche wachsen soll, daß:

$$\nu > m_\nu > \lg \nu \tag{25}$$

$\left(\text{z. B. } m_\nu = \frac{\nu}{\lg \nu}, \sqrt{\nu}, (\lg \nu)^2\right)$. Alsdann wird zunächst:

$$\lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{a_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \alpha^{-\frac{m_\nu}{\nu}} = 1 \quad \left(\text{wegen: } \lim_{\nu\to\infty} \frac{m_\nu}{\nu} = 0\right). \tag{26}$$

Die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ besitzt also den Konvergenzradius 1. Andererseits folgt aus Gl (22):

$$|a_\nu^{(n)}| < \nu^n \cdot |a_\nu| = \nu^n \cdot \alpha^{-m_\nu} \tag{27}$$

und daher für *jedes beliebige* $p > 0$:

$$\nu^p \cdot |a_\nu^{(n)}| < \nu^{n+p} \cdot \alpha^{-m_\nu} = e^{-m_\nu\left(\lg\alpha - (n+p)\frac{\lg \nu}{m_\nu}\right)}, \tag{28}$$

also:

$$\lim_{\nu\to\infty} \nu^p \cdot a_\nu^{(n)} = 0 \tag{29}$$

$\left(\text{wegen: } \lg\alpha > 0 \text{ und } \lim_{\nu\to\infty} \frac{\lg \nu}{m_\nu} = 0\right)$. Da man hier für n jede noch so große natürliche Zahl setzen und $p > 1$ annehmen kann, so ergibt sich die Konvergenz von $\sum a_\nu^{(n)}$, also die *absolute* Konvergenz von

$$\sum a_\nu^{(n)} x^{\nu-n} = \mathfrak{P}^{(n)}(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

für alle Stellen auf dem Konvergenzkreise.

4. Da aus $\mathfrak{P}(x) \equiv \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu x^\nu$ die Derivierte $\mathfrak{P}'(x) \equiv \sum_1^\infty{}_\nu\, \nu a_\nu x^{\nu-1}$ entsteht, indem man das konstante Glied a_0 fortläßt und bei jedem anderen Gliede $a_\nu x^\nu$ den Exponenten um eine Einheit erniedrigt und seinen ursprünglichen Wert als Faktor hinzufügt, so folgt, daß umgekehrt $\mathfrak{P}(x)$

aus $\mathfrak{P}'(x)$ durch Umkehrung dieses Bildungsgesetzes gewonnen wird. Aus:

$$(30) \qquad \mathfrak{P}'(x) = \sum_0^\infty {}^\nu\, b_\nu x^\nu$$

findet man daher:

$$(31) \qquad \mathfrak{P}(x) = a_0 + \sum_0^\infty {}^\nu \frac{b_\nu}{\nu+1} \cdot x^{\nu+1} = a_0 + \sum_1^\infty {}^\nu \frac{b_{\nu-1}}{\nu} \cdot x^\nu,$$

wo a_0 beliebig gewählt werden kann. Somit ergibt sich:

Eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ ist durch ihre erste Derivierte bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

§ 43. Die Derivierten von Potenzreihen $\mathfrak{P}(x-x_0)$ und deren rationalen Verbindungen. — Die Derivierte einer Funktion von der Form $\mathfrak{P}_1(\mathfrak{P}(x-x_0))$. — Die Derivierten als Differentialquotienten.

1. Ersetzen wir, um der Entwicklung (7) des vorigen Paragraphen möglichste Allgemeinheit zu geben, daselbst in den Beziehungen (1)—(6) x durch $(x-x_0)$ und dem entsprechend auch in Gl. (7) x_1 durch $(x-x_0)$, so geht sie in die folgende über:

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(x-x_0+h) = \mathfrak{P}(x-x_0) + \frac{1}{1!}\mathfrak{P}'(x-x_0)\cdot h + \frac{1}{2!}\mathfrak{P}''(x-x_0)\cdot h^2 + \cdots$$

$$= \sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!}\mathfrak{P}^{(\nu)}(x-x_0)\cdot h^\nu$$

und konvergiert sodann zum mindesten für alle h, welche der Bedingung genügen:

$$(2) \qquad |x-x_0| + |h| < R,$$

wenn R den Konvergenzradius von $\mathfrak{P}(x-x_0)$ bezeichnet. Dabei wird wenn $\mathfrak{P}(x-x_0) = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu (x-x_0)^\nu$, der Koeffizient von $\frac{1}{n!}\cdot h^n$ durch den Ausdruck dargestellt:

$$(3) \qquad \mathfrak{P}^{(n)}(x-x_0) = \sum_n^\infty {}^\nu\, \nu(\nu-1)\ldots(\nu-n+1)\, a_\nu (x-x_0)^{\nu-n},$$

welcher wiederum als die n^{te} *Derivierte* von $\mathfrak{P}(x-x_0)$ bezeichnet werden soll. Diese neue Erweiterung in bezug auf den Gebrauch der Bezeichnung *Derivierte* steht mit der im vorigen Paragraphen Gl. (5) für $\mathfrak{P}^{(n)}(x)$ gegebenen Definition vollständig im Einklange und geht in diese über, wenn speziell $x_0 = 0$ gesetzt wird. Daraus folgt unmittelbar, daß die dort bezüglich der *Konvergenz* der Derivierten gemachten Aussagen ohne weiteres

auf den vorliegenden Fall übertragen werden können, sofern man an die Stelle des Konvergenzmittelpunktes 0 jetzt den Punkt x_0 treten läßt. Auch gilt wieder der am Schlusse des vorigen Paragraphen erwähnte Satz, daß *die Potenzreihe* $\mathfrak{P}(x-x_0)$ *durch ihre erste Derivierte:* $\mathfrak{P}'(x-x_0) = \sum_{1}^{\infty}\nu \cdot a_\nu (x-x_0)^{\nu-1}$ *bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist.*

Führen wir zur Darstellung derjenigen Operation, welche dazu dient, aus einer Potenzreihe ihre erste *Derivierte* zu bilden und welche der entsprechenden für eine ganze rationale Funktion von $(x-x_0)$ ganz analog ist, wieder das Operationszeichen D ein, ausführlicher geschrieben D_{x-x_0} oder auch D_x, und bezeichnen die *n malige* Wiederholung dieser Operation mit D^n bzw. D_x^n, so hat man auf Grund der Definitionsgleichung (3) und mit Benutzung von § 19, Gl. (12) (S. 146):

$$(4)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}'(x-x_0) \equiv D\mathfrak{P}(x-x_0) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} D a_\nu (x-x_0)^\nu = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} a_\nu D(x-x_0)^\nu \\ \mathfrak{P}^{(n)}(x-x_0) \equiv D^n\mathfrak{P}(x-x_0) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} D^n a_\nu (x-x_0)^\nu = \sum_{n}^{\infty}{}_{\nu} a_\nu D^n(x-x_0)^\nu, \end{cases}$$

d. h. man erhält die erste bzw. n^{te} Derivierte von $\mathfrak{P}(x-x_0)$, wenn man diejenige Reihe bildet, die aus den betreffenden Derivierten der einzelnen Glieder besteht (dabei hat man nach § 19, Nr. 3 der Derivierten einer Konstanten den Wert 0 beizulegen.)

Da hiernach $\mathfrak{P}''(x-x_0)$ in derselben Weise aus $\mathfrak{P}'(x-x_0)$ entsteht, wie $\mathfrak{P}'(x-x_0)$ aus $\mathfrak{P}(x-x_0)$, so folgt wiederum, daß die *zweite* Derivierte von $\mathfrak{P}(x-x_0)$ mit der *ersten* Derivierten von $\mathfrak{P}'(x-x_0)$ identisch ist, und durch Fortsetzung dieser Schlußweise, daß allgemein:

$$(5)\qquad \mathfrak{P}^{(m+n)}(x-x_0) = D^n\mathfrak{P}^{(m)}(x-x_0) = D^m\mathfrak{P}^{(n)}(x-x_0).$$

2. Um die Derivierte der Summe oder Differenz zweier für $|x-x_0|<R$ konvergierenden Potenzreihen: $\mathfrak{P}(x-x_0) = \mathfrak{P}_1(x-x_0) \pm \mathfrak{P}_2(x-x_0)$ zu bilden, hat man nur zu beachten, daß die n^{te} Derivierte von $\mathfrak{P}(x-x_0)$ mit dem Koeffizienten von $\frac{h^n}{n!}$ in der Entwicklung $\mathfrak{P}(x-x_0+h)$ nach Potenzen von h identisch ist. Nun ist:

$$(6)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}_1(x-x_0+h) = \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \frac{1}{n!}\mathfrak{P}_1^{(n)}(x-x_0)\cdot h^n, \\ \mathfrak{P}_2(x-x_0+h) = \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \frac{1}{n!}\mathfrak{P}_2^{(n)}(x-x_0)\cdot h^n \end{cases}$$

und daher:

$$\mathfrak{P}_1(x-x_0+h) \pm \mathfrak{P}_2(x-x_0+h) = \sum_0^{\infty}{}_{n}\frac{1}{n!}\{\mathfrak{P}_1^{(n)}(x-x_0) \pm \mathfrak{P}_2^{(n)}(x-x_0)\}\cdot h^n,$$

so daß sich ergibt:

$$(7)\qquad D^n\{\mathfrak{P}_1(x-x_0) \pm \mathfrak{P}_2(x-x_0)\} = \mathfrak{P}_1^{(n)}(x-x_0) \pm \mathfrak{P}_2^{(n)}(x-x_0),$$

(wie übrigens auch direkt aus (4) geschlossen werden könnte).

Das analoge gilt offenbar für eine *beliebige endliche* Anzahl von Potenzreihen. Das Resultat bleibt aber auch noch gültig für eine *unendliche Anzahl* solcher Reihen, falls die aus ihnen gebildete Reihe für einen gewissen Bereich *gleichmäßig* konvergiert, d. h. es besteht der Satz:

Konvergieren die unendlich vielen Reihen $\mathfrak{P}_{\nu}(x-x_0)$ $(\nu=0,1,2,\ldots)$ *für* $|x-x_0|<R$, *und konvergiert die Reihe* $\sum_0^{\infty}{}_{\nu}\mathfrak{P}_{\nu}(x-x_0)$ *gleichmäßig für alle* x, *welche der Bedingung genügen:* $|x-x_0| \leqq r < R$, *so ist für* $|x-x_0|<R$:

$$D^n\sum_0^{\infty}{}_{\nu}\mathfrak{P}_{\nu}(x-x_0) = \sum_0^{\infty}{}_{\nu}D^n\mathfrak{P}_{\nu}(x-x_0) = \sum_0^{\infty}{}_{\nu}\mathfrak{P}_{\nu}^{(n)}(x-x_0)$$

$$(n=1,2,3,\ldots).$$

Beweis. Infolge der Voraussetzung kann man nach dem *Weierstraß*schen Doppelreihensatze die obige Summe von unendlich vielen Potenzreihen in eine einzige Reihe nach Potenzen von $(x-x_0)$ umformen, also:

$$(8)\qquad \sum_0^{\infty}{}_{\nu}\mathfrak{P}_{\nu}(x-x_0) = \mathfrak{P}(x-x_0) \quad (\text{für } |x-x_0|<R).$$

Wird jetzt x beliebig innerhalb des Bereiches $|x-x_0|<R$ angenommen, so gibt es zu diesem x stets unendlich viele positive Zahlen r, so daß:

$$|x-x_0|<r<R.$$

Versteht man sodann unter h eine komplexe Zahl, welche der Bedingung genügt:

$$(9)\qquad |h| \leqq r-|x-x_0|,$$

so hat man *a fortiori* $|x-x_0+h| \leqq |x-x_0|+|h| \leqq r$, so daß $(x+h)-x_0$ innerhalb des für $x-x_0$ bestehenden Geltungsbereiches der Gl. (8) liegt (nämlich, geometrisch gesprochen, innerhalb eines Kreises um den Punkt x_0, der den Kreis $(0)R$ von innen berührt). Man hat also:

$$(10\text{a})\qquad \mathfrak{P}(x-x_0+h) = \sum_0^{\infty}{}_{\nu}\mathfrak{P}_{\nu}(x-x_0+h),$$

und wenn man auf beiden Seiten nach Potenzen von h entwickelt, was infolge der Bedingung (9) gestattet ist:

$$(10\text{b})\qquad \sum_0^\infty{}_n \frac{1}{n!}\,\mathfrak{P}^{(n)}(x-x_0)\cdot h^n = \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_n \frac{1}{n!}\,\mathfrak{P}_\nu^{(n)}(x-x_0)\cdot h^n.$$

Da aber die in (10b) rechts stehende Summe von unendlich vielen Potenzreihen in h auf Grund der für die rechte Seite von (10a) geltenden Voraussetzung *gleichmäßig* konvergiert für alle h, welche der Bedingung (9) genügen, so kann sie wiederum nach dem *Weierstraß*schen Satze in eine einfache Reihe nach Potenzen von h umgeformt werden, so daß Gl. (10b) in die folgende übergeht:

$$(11)\qquad \sum_0^\infty{}_n \frac{1}{n!}\,\mathfrak{P}^{(n)}(x-x_0)\cdot h^n = \sum_0^\infty{}_n \frac{1}{n!}\Big(\sum_0^\infty{}_\nu \mathfrak{P}_\nu^{(n)}(x-x_0)\Big)\cdot h^n$$

Hieraus ergibt sich aber durch Vergleichung der Koeffizienten von h^n:

$$(12)\qquad \mathfrak{P}^{(n)}(x-x_0) = \sum_0^\infty{}_\nu \mathfrak{P}_\nu^{(n)}(x-x_0)$$

oder, mit Berücksichtigung von Gl. (8), anders geschrieben:

$$(13)\qquad D^n \sum_0^\infty{}_\nu \mathfrak{P}_\nu(x-x_0) = \sum_0^\infty{}_\nu D^n \mathfrak{P}_\nu(x-x_0) \qquad \text{q. e. d. —}$$

3. Bildet man das Produkt der beiden Entwicklungen (6) nach der Multiplikationsregel des § 40, Nr. 1 (S. 303), so ergibt sich als Entwicklungskoeffizient von h und somit als Ausdruck für die *erste* Derivierte von $\mathfrak{P}_1(x-x_0)\cdot\mathfrak{P}_2(x-x_0)$:

$$(14\text{a})\qquad D(\mathfrak{P}_1(x-x_0)\cdot\mathfrak{P}_2(x-x_0)) = \mathfrak{P}_1'(x-x_0)\cdot\mathfrak{P}_2(x-x_0)+\mathfrak{P}_1(x-x_0)\cdot\mathfrak{P}_2'(x-x_0)$$

$$(14\text{b})\qquad = \mathfrak{P}_1(x-x_0)\cdot\mathfrak{P}_2(x-x_0)\left\{\frac{\mathfrak{P}_1'(x-x_0)}{\mathfrak{P}_1(x-x_0)}+\frac{\mathfrak{P}_2'(x-x_0)}{\mathfrak{P}_2(x-x_0)}\right\}\text{[1]}.$$

Substituiert man hierin: $\mathfrak{P}_2(x-x_0)\cdot\mathfrak{P}_3(x-x_0)\cdots\mathfrak{P}_n(x-x_0)$ für $\mathfrak{P}_2(x-x_0)$ und setzt zur Abkürzung:

$$(15)\qquad \mathfrak{P}_1(x-x_0)\cdot\mathfrak{P}_2(x-x_0)\cdots\mathfrak{P}_n(x-x_0) = \mathfrak{P}(x-x_0),$$

so folgt zunächst aus Gl. (14b):

$$D\mathfrak{P}(x-x_0) = \mathfrak{P}(x-x_0)\left\{\frac{\mathfrak{P}_1'(x-x_0)}{\mathfrak{P}_1(x-x_0)}+\frac{D(\mathfrak{P}_2(x-x_0)\cdot\;\cdot\mathfrak{P}_n(x-x_0))}{\mathfrak{P}_2(x-x_0)\cdots\mathfrak{P}_n(x-x_0)}\right\},$$

---

1) Diese Schreibweise ist natürlich nur gestattet, wenn keiner der Faktoren $\mathfrak{P}_1(x-x_0)$, $\mathfrak{P}_2(x-x_0)$ für die betrachtete Stelle x verschwindet.

und durch weitere Anwendung von Gl. (14b) schließlich:

$$(16)\quad D\mathfrak{P}(x-x_0)=\mathfrak{P}(x-x_0)\left\{\frac{\mathfrak{P}_1'(x-x_0)}{\mathfrak{P}_1(x-x_0)}+\frac{\mathfrak{P}_2'(x-x_0)}{\mathfrak{P}_2(x-x_0)}+\cdots+\frac{\mathfrak{P}_n'(x-x_0)}{\mathfrak{P}_n(x-x_0)}\right\}\text{[1]}.$$

Hieraus speziell für $\mathfrak{P}_1(x)=\mathfrak{P}_2(x)=\cdots=\mathfrak{P}_n(x)$:

$$(17)\qquad D(\mathfrak{P}_1(x-x_0))^n=(\mathfrak{P}_1(x-x_0))^n\cdot n\,\frac{\mathfrak{P}_1'(x-x_0)}{\mathfrak{P}_1(x-x_0)}$$
$$=n\cdot(\mathfrak{P}_1(x-x_0))^{n-1}\cdot\mathfrak{P}_1'(x-x_0)$$

Entwickelt man ferner den Quotienten:

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x-x_0+h)}{\mathfrak{P}_2(x-x_0+h)}=\frac{\mathfrak{P}_1(x-x_0)+\mathfrak{P}_1'(x-x_0)h+\cdots}{\mathfrak{P}_2(x-x_0)+\mathfrak{P}_2'(x-x_0)h+\cdots}$$

unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{P}_2(x-x_0)$ für die betrachtete Stelle x nicht verschwindet, nach positiven Potenzen von h, so ergibt sich der Entwicklungskoeffizient von h aus der zweiten der Gleichungen (14a) des § 41, Nr. 2 (S. 311) und somit die Beziehung:

$$(18)\qquad D\frac{\mathfrak{P}_1(x-x_0)}{\mathfrak{P}_2(x-x_0)}=\frac{\mathfrak{P}_2(x-x_0)\;\mathfrak{P}_1'(x-x_0)-\mathfrak{P}_1(x-x_0)\cdot\mathfrak{P}_2'(x-x_0)}{(\mathfrak{P}_2(x-x_0))^2},$$

sofern der Quotient $\frac{\mathfrak{P}_1(x-x_0)}{\mathfrak{P}_2(x-x_0)}$ durch eine Reihe nach *positiven* Potenzen von $(x-x_0)$ darstellbar ist[2], d. h. sofern wir noch die Annahme machen, daß $\mathfrak{P}_2(x-x_0)$ für $x=x_0$ (also: $\mathfrak{P}_2(0)$) *nicht* verschwindet.

Aus Gl. (18) folgt speziell für $\mathfrak{P}_1(x-x_0)=1$, wenn man zugleich $\mathfrak{P}(x-x_0)$ statt $\mathfrak{P}_2(x-x_0)$ schreibt:

$$(19)\qquad D\left(\frac{1}{\mathfrak{P}(x-x_0)}\right)=-\frac{\mathfrak{P}'(x-x_0)}{(\mathfrak{P}(x-x_0))^2},$$

und hieraus mit Benutzung von Gl. (17):

$$(20)\quad D(\mathfrak{P}(x-x_0))^{-n}=D\left(\frac{1}{\mathfrak{P}(x-x_0)}\right)^n=n\cdot\left(\frac{1}{\mathfrak{P}(x-x_0)}\right)^{n-1}\cdot D\left(\frac{1}{\mathfrak{P}(x-x_0)}\right)$$
$$=-n\cdot\frac{\mathfrak{P}'(x-x_0)}{(\mathfrak{P}(x-x_0))^{n+1}}$$
$$=-n\cdot(\mathfrak{P}(x-x_0))^{-n-1}\cdot\mathfrak{P}'(x-x_0),$$

d. h. die Formel (17) behält auch für *negative* ganzzahlige Werte von n Gültigkeit (NB. zunächst immer unter der oben gemachten Annahme, daß $\mathfrak{P}(0)$ nicht verschwindet).

---

1) Auch hier hat man die der Gl. (14a) entsprechende Schreibweise zu wählen, wenn irgendeiner der Faktoren $\mathfrak{P}_\nu(x-x_0)$ für die betrachtete Stelle x verschwindet.

2) Denn nur für solche Reihen ist bisher der Begriff der Derivierten überhaupt definiert.

4. Der Satz am Schlusse von Nr. 2 und die Formel (17) können u. a. dazu dienen, um die Derivierte eines Ausdrucks von der Form:

$$(21)\qquad f(x) = \mathfrak{P}_1(y), \quad \text{wo:} \quad y = \mathfrak{P}(x - x_0)$$

herzustellen. Es sei die Reihe:

$$(22)\qquad \mathfrak{P}_1(y) = \sum_0^\infty{}_\nu\, b_\nu y^\nu$$

konvergent für $|y| < R_1$, so folgt, falls $|\mathfrak{P}(0)| < R_1$, daß die Reihe:

$$(23)\qquad f(x) = \sum_0^\infty{}_\nu\, b_\nu (\mathfrak{P}(x - x_0))^\nu$$

für eine gewisse Umgebung $|x - x_0| \leqq \varrho$, innerhalb deren infolge der Stetigkeit auch $(\mathfrak{P}(x - x_0)) < R_1$ ausfällt, *gleichmäßig* konvergiert. Unter dieser Voraussetzung folgt aber aus dem Satze von Nr. 2 (s. Gl. (13)), daß:

$$(24)\qquad \begin{aligned} D_x f(x) &= \sum_0^\infty{}_\nu\, b_\nu \cdot D_x(\mathfrak{P}(x - x_0))^\nu \\ &= \sum_0^\infty{}_\nu\, \nu b_\nu \cdot (\mathfrak{P}(x - x_0))^{\nu - 1} \cdot \mathfrak{P}'(x - x_0). \end{aligned}$$

Da andererseits aus Gl. (22) sich ergibt, daß:

$$(25)\qquad \mathfrak{P}_1'(y) = \sum_1^\infty{}_\nu\, \nu b_\nu \cdot y^{\nu - 1},$$

so kann man Gl. (24) folgendermaßen schreiben:

$$(26)\qquad D_x f(x) = (\mathfrak{P}_1'(y))_{y = \mathfrak{P}(x - x_0)} \cdot \mathfrak{P}'(x - x_0)$$

oder auch:

$$(27)\qquad D_x \mathfrak{P}_1(\mathfrak{P}(x - x_0)) = (D_y \mathfrak{P}_1(y))_{y = \mathfrak{P}(x - x_0)} \cdot D_x \mathfrak{P}(x - x_0).$$ [1]

5. Setzt man Gl. (1) in die Form:

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{P}(x - x_0 + h) - \mathfrak{P}(x - x_0)}{h} &- \mathfrak{P}'(x - x_0) \\ &= \frac{1}{2!}\mathfrak{P}''(x - x_0) \cdot h + \frac{1}{3!}\mathfrak{P}'''(x - x_0) \cdot h^2 + \cdots \\ &= h \sum_0^\infty{}_\nu\, \frac{1}{(\nu + 2)!}\mathfrak{P}^{(\nu + 2)}(x - x_0) \cdot h^\nu, \end{aligned}$$

---

1) Alle in diesem Paragraphen für die Derivierten von *Potenzreihen* entwickelten Formeln behalten selbstverständlich ihre Gültigkeit, wenn die in Frage kommenden Potenzreihen mit einem bestimmten Gliede *abbrechen*, d. h. sich auf *ganze rationale Funktionen* reduzieren. Als besonders einfacher Fall der Formel (27) möge noch angemerkt werden:

$$D_x \mathfrak{P}_1(c(x - x_0)) = (D_y \mathfrak{P}_1(y))_{y = c(x - x_0)}\; D_x c(x - x_0) = c \cdot \mathfrak{P}_1'(c(x - x_0)).$$

so ergibt sich infolge der Stetigkeit der rechtsstehenden Potenzreihe in der Umgebung von $h = 0$, daß:

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{\mathfrak{P}(x - x_0 + h) - \mathfrak{P}(x - x_0)}{h} - \mathfrak{P}'(x - x_0) \right) = 0,$$

also:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathfrak{P}(x - x_0 + h) - \mathfrak{P}(x - x_0)}{h} = \mathfrak{P}'(x - x_0), \tag{28}$$

d. h

Der „Differenzenquotient“ $\frac{\mathfrak{P}(x - x_0 + h) - \mathfrak{P}(x - x_0)}{h}$ *besitzt den eindeutig bestimmten Grenzwert* $\mathfrak{P}'(x - x_0)$, *wenn* h *gegen Null konvergiert, und zwar ohne daß über die Art dieses Grenzüberganges irgendwelche besondere Voraussetzung gemacht wird.*

Setzt man wiederum (vgl. § 19, Nr. 4, S. 177):

$$\begin{cases} h = \Delta x, \\ \mathfrak{P}(x - x_0 + \Delta x) - \mathfrak{P}(x - x_0) = \Delta \mathfrak{P}(x - x_0), \end{cases} \tag{29}$$

wo also $\Delta \mathfrak{P}(x - x_0)$ das *Inkrement* oder die *Änderung* bedeutet, welche $\mathfrak{P}(x - x_0)$ erleidet, wenn man x das *Inkrement* Δx zuerteilt, so geht Gl. (28) in die folgende über:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \mathfrak{P}(x - x_0)}{\Delta x} = \mathfrak{P}'(x - x_0), \tag{30}$$

wofür man kürzer zu schreiben pflegt:

$$\frac{d \mathfrak{P}(x - x_0)}{dx} = \mathfrak{P}'(x - x_0) \qquad (= D_x \mathfrak{P}(x - x_0)). \tag{31}$$

Dabei bedeutet also das Symbol $\frac{d \mathfrak{P}(x - x_0)}{dx}$ lediglich den *Grenzwert* jenes Differenzenquotienten $\frac{\Delta \mathfrak{P}(x - x_0)}{\Delta x}$ für $\Delta x \to 0$, welcher sodann wieder als *Differentialquotient*[1]) von $\mathfrak{P}(x - x_0)$ bezeichnet wird. Man kann somit den Inhalt der Gl. (28) bzw. (31) jetzt auch folgendermaßen aussprechen:

Die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - x_0)$ *besitzt für jede Stelle* x *im Innern ihres Konvergenzbereiches einen eindeutig bestimmten Differentialquotienten, dessen Wert durch die Derivierte* $\mathfrak{P}'(x - x_0)$ *dargestellt wird.*

Da die *zweite* Derivierte von $\mathfrak{P}(x - x_0)$ mit der *ersten* von $\mathfrak{P}'(x - x_0)$ identisch ist und diese letztere wiederum den *Differentialquotienten* von $\mathfrak{P}'(x - x_0)$ darstellt, so hat man zunächst:

$$\mathfrak{P}''(x - x_0) = \frac{d \mathfrak{P}'(x - x_0)}{dx} = \frac{d \left(\frac{d \mathfrak{P}(x - x_0)}{dx} \right)}{dx}. \tag{32}$$

1) Ausführlicher auch als „*vollständiger*“ Differentialquotient, um auszudrücken, daß der betreffende Grenzwert bei *jedem* Grenzübergange $h \to 0$ zustande kommen muß.

Man nennt dann wiederum den durch *zweimalige* Anwendung des „*Differentiationsprozesses*“ aus $\mathfrak{P}(x-x_0)$ hervorgehenden Grenzwert den *zweiten Differentialquotienten* von $\mathfrak{P}(x-x_0)$ und bezeichnet ihn kürzer durch das Symbol $\frac{d^2\mathfrak{P}(x-x_0)}{dx^2}$. Infolgedessen kann man der Gl. (32), wenn man ihre beiden Seiten vertauscht, jetzt die Form geben:

$$\frac{d^2\mathfrak{P}(x-x_0)}{dx^2}=\mathfrak{P}''(x-x_0) \qquad (=D_x^2\mathfrak{P}(x-x_0)). \tag{33}$$

Und analog ergibt sich allgemein:

$$\frac{d^\nu\mathfrak{P}(x-x_0)}{dx^\nu}=\mathfrak{P}^{(\nu)}(x-x_0) \qquad (=D_x^\nu\mathfrak{P}(x-x_0)), \tag{34}$$

wenn man mit $\frac{d^\nu\mathfrak{P}(x-x_0)}{dx^\nu}$ den ν^{ten} Differentialquotienten von $\mathfrak{P}(x-x_0)$, d. h. den durch ν malige Anwendung des Differentiationsprozesses daraus hervorgehenden Grenzwert bezeichnet. — In Worten:

Die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-x_0)$ besitzt für jede Stelle im Innern ihres Konvergenzbereiches eindeutig bestimmte Differentialquotienten jeder Ordnung, deren Werte mit denjenigen der entsprechenden Derivierten zusammenfallen.

§ 44. Abgeleitete Potenzreihen. — Über das Maximum und Minimum des Absolutwertes einer gleichmäßig konvergenten Reihe $\mathfrak{P}(x-x_0)$. — Allgemeinste Identitätssätze für Reihen $\mathfrak{P}(x-x_0)$.

1. Ist die Potenzreihe:

$$\mathfrak{P}(x-x_0)\equiv\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu(x-x_0)^\nu \tag{1}$$

konvergent für $|x-x_0|<R$ und bedeutet x_1 eine *beliebig*, aber *fest* gewählte Stelle innerhalb dieses Konvergenzbereiches, so gilt nach Gl. (1) und (2) des vorigen Paragraphen die Entwicklung:

$$\mathfrak{P}(x_1-x_0+h)=\sum_0^\infty{}_\nu\,\frac{1}{\nu!}\,\mathfrak{P}^{(\nu)}(x_1-x_0)\cdot h^\nu \tag{2}$$

für *alle* Werte h, welche der Bedingung genügen:

$$|h|<R-|x_1-x_0|. \tag{3}$$

Die Bedeutung der Entwicklung (2) wird anschaulicher, wenn wir setzen

$$h=x-x_1. \tag{4}$$

Hierdurch geht Gl. (2) in die folgende über:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(x-x_0)&=\sum_0^\infty{}_\nu\,\frac{1}{\nu!}\,\mathfrak{P}^{(\nu)}(x_1-x_0)\cdot(x-x_1)^\nu,\\ &=\mathfrak{P}_1(x-x_1),\end{aligned} \tag{5}$$

wobei x *alle möglichen Werte* annehmen darf, welche (nach (3) und (4)) definiert sind durch die Bedingung:

$$(6) \qquad |x - x_1| < R - |x_1 - x_0| = r.$$

Es sind dies, geometrisch gesprochen, alle Stellen, welche im Innern des Kreises $(x_1)r_1$ liegen, d. h. eines Kreises um den Punkt x_1, welcher den Kreis $(x_0)R$ von innen berührt. Die Formel (5) stellt offenbar lediglich eine naheliegende Verallgemeinerung der in § 42, Gl. (8) aufgestellten *Taylor*schen Entwicklung für $\mathfrak{P}(x)$ dar und geht für $x_0 = 0$ ohne weiteres in dieselbe über. Ihr Inhalt läßt sich nun aber folgendermaßen aussprechen:

> *Bedeutet x_1 eine beliebige Stelle im Innern des Konvergenzbereiches der Reihe $\mathfrak{P}(x - x_0)$, so lassen sich durch ein bestimmtes Rechnungsverfahren die Koeffizienten einer Reihe $\mathfrak{P}_1(x - x_1)$ so bestimmen, daß deren Summe für alle x einer gewissen (durch Ungl.* (6) *genauer definierten) Umgebung der Stelle x_1 mit derjenigen von $\mathfrak{P}(x - x_0)$ übereinstimmt.*
>
> *Die Reihe $\mathfrak{P}_1(x - x_1)$ heißt dann aus $\mathfrak{P}(x - x_0)$ um den Punkt abgeleitet.*

Um den Charakter der Reihe $\mathfrak{P}_1(x - x_1)$ als einer aus $\mathfrak{P}(x - x_0)$ in dem angegebenen Sinne *abgeleiteten* schon durch die Schreibweise kenntlich zu machen, führen wir nach dem Vorgange von *Weierstraß* die folgenden Bezeichnungen ein. Wir setzen:

$$(7) \qquad \mathfrak{P}(x - x_0) = \mathfrak{P}(x|x_0), \quad \mathfrak{P}^{(\nu)}(x - x_0) = \mathfrak{P}^{(\nu)}(x|x_0)$$

und bezeichnen die aus $\mathfrak{P}(x|x_0)$ *abgeleitete* Reihe nach Potenzen von $(x - x_1)$ durch das Symbol:

$$\mathfrak{P}(x|x_0, x_1).$$

Dasselbe wird also *definiert* durch die Beziehung:

$$(8) \qquad \mathfrak{P}(x|x_0, x_1) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!} \mathfrak{P}^{(\nu)}(x_1|x_0) \cdot (x - x_1)^\nu,$$

während dann zum mindesten für den Bereich: $|x - x_1| < r_1 = R - |x_1 - x_0|$ die *Gleichheit* besteht:

$$(9) \qquad \mathfrak{P}(x|x_0, x_1) = \mathfrak{P}(x|x_0).$$

2. Es verdient hervorgehoben zu werden, daß diese Gleichheit dann auch zwischen je zwei *Derivierten* von gleicher Ordnung besteht. Dies ist unmittelbar ersichtlich, wenn man die *Derivierten* als *Differentialquotienten* auffaßt, kann aber auch folgendermaßen aus der ursprünglichen Definition hergeleitet werden. Substituiert man in Gl. (2): $\mathfrak{P}'(x_1 - x_0 + h)$ für $\mathfrak{P}(x_1 - x_0 + h)$, so tritt allgemein $\mathfrak{P}^{(\nu+1)}(x_1 - x_0)$ an die Stelle von

$\mathfrak{P}^{(\nu)}(x_1 - x_0)$, und man erhält:

(10) $$\mathfrak{P}'(x_1 - x_0 + h) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu!} \mathfrak{P}^{(\nu+1)}(x_1 - x_0) \cdot h^{\nu},$$

also durch die Substitution $h = x - x_1$:

(11) $$\mathfrak{P}'(x - x_0) \equiv \mathfrak{P}'(x|x_0) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu!} \mathfrak{P}^{(\nu+1)}(x_1|x_0)\ (x - x_1)^{\nu}.$$

Andererseits folgt aus Gl. (8) durch gliedweise Derivation:

(12) $$\mathfrak{P}'(x|x_0, x_1) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{(\nu - 1)!} \mathfrak{P}^{(\nu)}(x_1|x_0) \cdot (x - x_1)^{\nu - 1}$$
$$= \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu!} \mathfrak{P}^{(\nu+1)}(x_1|x_0) \cdot (x - x_1)^{\nu},$$

somit durch Vergleichung von (11) und (12) zunächst:

(13) $$\mathfrak{P}'(x|x_0, x_1) = \mathfrak{P}'(x|x_0).$$

Und da jede folgende Derivierte als die erste Derivierte der unmittelbar vorhergehenden angesehen werden kann, schließlich allgemein:

(14) $$\mathfrak{P}^{(\nu)}(x|x_0, x_1) = \mathfrak{P}^{(\nu)}(x|x_0).$$

3 In § 38, Nr. 6 (S. 289) wurde gezeigt, daß $|\mathfrak{P}(x - x_0)_{x = x_0}|$ *niemals ein Maximum* und, wenn *von Null verschieden*, auch *kein Minimum* für die Werte von $|\mathfrak{P}(x - x_0)|$ einer gewissen Umgebung der Stelle x_0 sein kann. Ist nun x_1 eine *beliebige* andere Stelle *im Innern* des Konvergenzbereiches von $\mathfrak{P}(x - x_0)$, so folgt ja aus der in Nr. 1 erwiesenen Möglichkeit, $\mathfrak{P}(x - x_0) \equiv \mathfrak{P}(x|x_0)$ in $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1)$ zu transformieren, daß sich die obige Aussage ohne weiteres auch auf die Stelle x_1 übertragen läßt. Wird jetzt eine positive Zahl r so angenommen, daß $\mathfrak{P}(x - x_0)$ für $|x - x_0| = r$ noch *gleichmäßig* konvergiert, so kann $|\mathfrak{P}(x - x_0)|$ für *keine* Stelle im *Innern* des Kreises $|x - x_0| = r$ einen *Maximalwert* und, wenn für $|x - x_0| < r$ durchweg $\mathfrak{P}(x - x_0) \neq 0$, ebensowenig einen *Minimalwert* annehmen. Da aber andererseits die für $|x - x_0| \leqq r$ *stetige* Funktion $|\mathfrak{P}(x - x_0)|$ für diesen Bereich ein *reales Maximum* und *Minimum* besitzen muß, so ergibt sich der folgende Satz (welcher die zu § 38, Nr. 2 in Fußn. 1, S. 284 angekündigte Ergänzung liefert):

> *Ist $\mathfrak{P}(x - x_0)$ gleichmäßig konvergent für $|x - x_0| = r$, so nimmt $|\mathfrak{P}(x - x_0)|$ einen gewissen auf den Bereich $|x - x_0| \leqq r$ sich beziehenden Maximalwert nur auf dem Kreise $|x - x_0| = r$ an, und das gleiche gilt für den Minimalwert, falls für $|x - x_0| < r$ durchweg $\mathfrak{P}(x - x_0) \neq 0$.*

4. Der für die *abgeleitete* Reihe $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1)$ zunächst sich ergebende Konvergenzbezirk, welcher als der *ursprüngliche* bezeichnet werden soll — nämlich der Kreis $(x_1)r_1$, welcher den Kreis $(x_0)R$ von innen berührt — braucht noch nicht der *wirkliche Konvergenzkreis* der Reihe $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1)$ zu sein.

Beispiel. Es sei:

$$\mathfrak{P}(x|x_0) \equiv \sum_0^\infty{}^{\nu} (x-x_0)^\nu = \frac{1}{1-(x-x_0)} \qquad (\text{also: } R = 1).$$

Alsdann ergibt sich mit Hilfe von Gl. (19), § 43 (S. 327):

$$\mathfrak{P}'(x|x_0) = D_x \frac{1}{1-(x-x_0)} = \frac{1}{(1-(x-x_0))^2}$$

und nach Gl. (20) des vorigen Paragraphen

$$\mathfrak{P}''(x|x_0) = 2 \cdot \frac{1}{(1-(x-x_0))^3},$$

$$\mathfrak{P}'''(x|x_0) = 2 \cdot 3 \frac{1}{(1-(x-x_0))^4}.$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\mathfrak{P}^{(\nu)}(x|x_0) = \nu! \frac{1}{(1-(x-x_0))^{\nu+1}},$$

so daß als abgeleitete Reihe nach Potenzen von $(x-x_1)$ resultiert[1]:

$$\mathfrak{P}(x|x_0, x_1) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{1}{(1-(x_1-x_0))^{\nu+1}} \cdot (x-x_1)^\nu.$$

---

1) Einfacher würde man zu dieser Entwicklung gelangen, wenn man beachtet, daß:

$$\frac{1}{1-(x-x_0)} = \frac{1}{1+x_0-x_1-(x-x_1)}$$
$$= \frac{1}{1+x_0-x_1} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{x-x_1}{1+x_0-x_1}}$$

und daher:

$$\frac{1}{1-(x-x_0)} = \frac{1}{1+x_0-x_1} \cdot \sum_0^\infty{}^{\nu} \left(\frac{x-x_1}{1+x_0-x_1}\right)^\nu$$
$$= \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{1}{(1+x_0-x_1)^{\nu+1}} (x-x_1)^\nu,$$

falls:

$$\left|\frac{x-x_1}{1+x_0-x_1}\right| < 1,$$

d. h.:

$$|x-x_1| < |(1+x_0)-x_1|,$$

(geometrisch gesprochen: die betreffende Entwicklung konvergiert in einem Kreise um den Punkt x_1, welcher durch den Punkt $1+x_0$ geht).

Als wirklichen Konvergenzradius dieser Reihe findet man:

$$R_1 = \lim_{\nu \to \infty} |1 - (x_1 - x_0)|^{1+\frac{1}{\nu}} = |1 - (x_1 - x_0)| = |1 + x_0 - x_1|,$$

während für $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1)$ als *abgeleitete* Reihe ursprünglich nur ein vorläufiges Konvergenzgebiet mit dem Radius

$$r_1 = 1 - |x_1 - x_0|$$

sich ergeben würde. Dabei ist allemal:

$$R_1 > r_1,$$

außer wenn $x_1 - x_0 = |x_1 - x_0|$, d. h. $x_1 - x_0$ reell und positiv ist (geometrisch gesprochen, wenn x_1 auf einer durch x_0 zur reellen Achse gezogenen Parallelen, *rechts* von x_0 liegt.)

Wenn nun der Konvergenzbereich von $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1)$ über jenen *ursprünglichen* hinausragt, so entsteht die Frage, ob die Gleichung $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1) = \mathfrak{P}(x|x_0)$ dann auch noch für jenen *erweiterten* Konvergenzbereich von $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1)$ besteht, soweit derselbe in den Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}(x|x_0)$ hineinfällt. Zur Entscheidung dieser Frage beweisen wir zunächst in der folgenden Nummer einen Satz, der auch noch weitere wichtige Folgerungen liefern wird.

5. Lehrsatz. *Konvergieren die beiden Potenzreihen $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ und $\mathfrak{P}_1(x|x_1)$ für irgendeinen Bereich $\mathfrak{B}$ gleichzeitig, und stimmen ihre Summen überein für (unendlich viele) Stellen in jeder noch so kleinen Umgebung einer im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegenen Stelle a, so findet diese Übereinstimmung in dem ganzen Gebiete $\mathfrak{B}$ statt, und das gleiche gilt auch für jede der Derivierten $\mathfrak{P}_0^{(\nu)}(x|x_0)$, $\mathfrak{P}_1^{(\nu)}(x|x_1)$.*

(NB. Bezüglich der Gestalt eines solchen Bereiches $\mathfrak{B}$ existieren offenbar nur *zwei* verschiedene Möglichkeiten: *Entweder* die beiden Konvergenzkreise überdecken sich gegenseitig nur *teilweise,* alsdann ist $\mathfrak{B}$ ein von zwei Kreisbögen begrenztes Flächenstück (s. Fig. 16 *I*). *Oder* der eine Konvergenzkreis liegt *vollständig* innerhalb des andern, dann stellt er selbst jenen Bereich $\mathfrak{B}$ dar (s. Fig. 16 *II*).[1]) Dieser letztere Fall tritt insbesondere sicher dann ein, wenn mindestens eine der beiden Reihen *beständig* konvergiert; außerdem auch, wenn $x_1 = x_0$ ist — eine spezielle

1) Die *dritte* Möglichkeit, daß die beiden Konvergenzkreise sich nur *von außen berühren* und etwa für diesen *einen* Punkt gemeinsam konvergieren, ist durch die Fassung des Satzes von vornherein ausgeschlossen, da ja die Übereinstimmung der Summen, also *eo ipso* die *gemeinsame Konvergenz* für *unendlich viele Punkte* vorausgesetzt wird.

Annahme, die, wie ausdrücklich bemerkt werden soll, den Beweis und die Gültigkeit des Satzes in keiner Weise alteriert.)

Beweis: Man kann zunächst aus $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$, $\mathfrak{P}_1(x|x_1)$ je eine Reihe nach Potenzen von $(x-a)$ ableiten, so daß die Gleichungen bestehen:

$$\text{(15)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_0(x|x_0, a) = \mathfrak{P}_0(x|x_0), \\ \mathfrak{P}_1(x|x_1, a) = \mathfrak{P}_1(x|x_1) \end{cases}$$

für alle Stellen innerhalb eines bestimmten Kreises $(a)r$ (nämlich desjenigen Kreises um a, der die Begrenzung von $\mathfrak{B}$ innen berührt). Infolge der Voraussetzung besteht dann zunächst die *Gleichheit:*

$$\text{(16)} \qquad \mathfrak{P}_0(x|x_0, a) = \mathfrak{P}_1(x|x_1, a)$$

für unendlich viele Stellen in jeder Nähe von a. Daraus folgt aber, da ja diese Reihen *beide* nach Potenzen von $(x-a)$ fortschreiten, nach dem

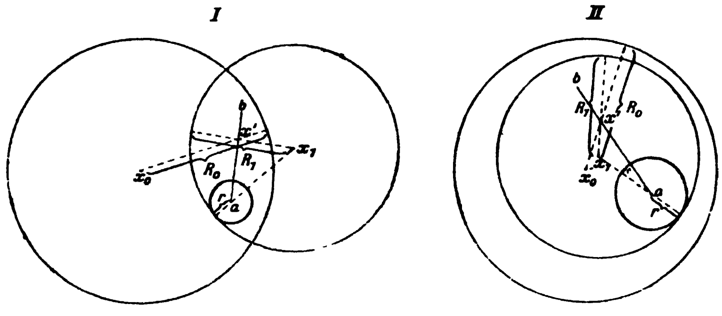


Fig. 16

Satze § 38, Nr. 6 geradezu ihre *Identität*, und somit nach Gl. (15) die Gültigkeit der Beziehung:

$$\text{(17)} \qquad \mathfrak{P}_0(x|x_0) = \mathfrak{P}_1(x|x_1)$$

für *alle Stellen innerhalb des Kreises* $(a)r$.

Da im übrigen nach Nr. 2 gleichzeitig mit den Gleichungen (15) die folgenden bestehen:

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_0^{(\nu)}(x|x_0, a) = \mathfrak{P}_0^{(\nu)}(x|x_0), \\ \mathfrak{P}_1^{(\nu)}(x|x_1, a) = \mathfrak{P}_1^{(\nu)}(x|x_1), \end{cases}$$

und aus der *Identität* der Reihen (16) auch diejenige ihrer ν^{ten} *Derivierten* hervorgeht, so erkennt man, daß auch:

$$\text{(19)} \qquad \mathfrak{P}_0^{(\nu)}(x|x_0) = \mathfrak{P}_1^{(\nu)}(x|x_1)$$

für *alle Stellen des Kreises* $(a)r$.

Die Gültigkeit des ausgesprochenen Satzes ist also zunächst für einen bestimmten, die Stelle a enthaltenden endlichen Bereich bewiesen.

Bedeutet nun b eine *ganz beliebige, im Innern* von $\mathfrak{B}$ und nicht innerhalb des Kreises $(a)r$ gelegene Stelle, so denke man sich b mit a durch eine Gerade verbunden. Alsdann werden für jede Stelle x' der Strecke $\overline{ab}$ (einschließlich $x' = a$ und $x' = b$) die Beträge:

$$R_0 - |x' - x_0|, \quad R_1 - |x' - x_1|$$

wesentlich positiv, also etwa $> \varrho$ (wo $\varrho > 0$) ausfallen, wenn R_0, R_1 die Konvergenzradien von $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$, $\mathfrak{P}_1(x|x_1)$ sind (geometrisch gesprochen: jeder der Punkte x' besitzt von der Begrenzung des Bereiches $\mathfrak{B}$ einen Minimalabstand, der eine gewisse Größe ϱ übersteigt). Man kann nun die geradlinige Strecke $\overline{ab}$ durch Einschaltung einer bestimmten *endlichen* Anzahl von Zwischenpunkten $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ in Teilstrecken zerlegen, die sämtlich $\leqq \varrho$ sind, also: $|a - a_1| \leqq \varrho$, $|a_1 - a_2| \leqq \varrho, \ldots, |a_{n-1} - b| \leqq \varrho$. Andererseits wird um *jede* der Stellen $a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ ein ganz in den Bereich $\mathfrak{B}$ fallender Kreis beschrieben werden können, dessen Radius jedesmal $> \varrho$ ausfällt.

Es liegt also jedenfalls a_1 *im Innern* des oben mit $(a)r$ bezeichneten Kreises, und die Beziehungen (17) und (19) gelten also insbesondere für alle Stellen der Strecke $\overline{aa_1}$. Infolgedessen kann aber jetzt die Stelle a_1 die Rolle übernehmen, die zuerst die Stelle a gespielt hat. Auf diese Weise ergibt sich dann die Gültigkeit der fraglichen Beziehungen für die Strecke $\overline{a_1a_2}$. So weiter fortschließend, erweist man dieselbe schließlich auch für die Strecke $\overline{a_{n-1}b}$, insbesondere also für die *ganz willkürlich* innerhalb $\mathfrak{B}$ angenommene Stelle b. Somit gelten die Gleichungen:

$$\mathfrak{P}_0(x|x_0) = \mathfrak{P}_1(x|x_1), \quad \mathfrak{P}_0^{(\nu)}(x|x_0) = \mathfrak{P}_1^{(\nu)}(x|x_1)$$

für *jede innerhalb* $\mathfrak{B}$ gelegene Stelle.

Für Stellen auf der *Grenze* von $\mathfrak{B}$ ergibt sich dann gleichfalls ihre Gültigkeit aus dem *Abel*schen Stetigkeitssatze (§ 32, Nr. 1, S. 252) *insoweit, als die betreffenden Reihen dort noch konvergieren.*

6. Der in Nr. 5 bewiesene Satz liefert für den Fall, daß man x_1 mit x_0 zusammenfallen läßt, das folgende, schon in § 38, Nr. 7 (S. 290) angekündigte Resultat:

Stimmen die Summen zweier Potenzreihen $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, $\mathfrak{P}_1(x-x_0)$ für (unendlich viele) Stellen in jeder Nähe einer **ganz beliebigen**, **im Innern** *ihres Konvergenzbereiches gelegenen Stelle a überein, so sind sie* **identisch**, *in Zeichen:*

$$\mathfrak{P}_0(x-x_0) \equiv \mathfrak{P}_1(x-x_0).$$

Aus dem obigen Satze folgt nämlich zunächst die *Gleichheit:* $\mathfrak{P}_0(x-x_0) = \mathfrak{P}_1(x-x_0)$ für alle Stellen desjenigen Bereiches $\mathfrak{B}$, für welchen beide Reihen gleichzeitig konvergieren. Da dieser Bereich $\mathfrak{B}$ aber sicher die

Stelle x_0 nebst einer gewissen Umgebung enthalten muß, so ergibt sich aus § 38, Nr. 6 (S. 289) die *Identität* der beiden Reihen.

Hieraus folgt als spezieller Fall, indem man die Reihe $\mathfrak{P}_1(x-x_0)$ auf eine Konstante A reduziert:

Nimmt eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-x_0)$ für (unendlich viele) Stellen in jeder Nähe eines im Innern ihres Konvergenzbereiches gelegenen Punktes a einen gewissen Wert A an, so hat sie durchweg den Wert A, d. h. *sie besteht ausschließlich aus dem konstanten Gliede A.*

Man kann diesem Ergebnis auch die folgende Fassung geben:

Ist die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-x_0)$ konvergent für $|x-x_0|<R$ und ihre Summe nicht konstant, so kann sie keinen Wert A für $|x-x_0|\leqq r$, wo $r<R$, unendlich oft annehmen.

7. Die *Identität* zweier Potenzreihen $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, $\mathfrak{P}_1(x-x_0)$ läßt sich (abgesehen von einer fraglich bleibenden, rein imaginären bzw. reellen additiven Konstanten) auch schon erschließen, wenn die Übereinstimmung des *reellen* bzw. *imaginären* Teils ihrer Summen in einem gewissen noch näher anzugebenden Umfange besteht. Es beruht dies auf dem folgenden Satze:

Nimmt die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)\equiv\sum_0^\infty{}^{\nu}(\alpha_\nu+\beta_\nu i)x^\nu$ für eine gewisse Umgebung des Nullpunktes, etwa für $|x|<r$, ausschließlich reelle (bzw. rein imaginäre Werte) an, so reduziert sie sich auf eine reelle (bzw. rein imaginäre) Konstante.

Beweis. Es werde zunächst angenommen, daß $\mathfrak{P}(x)$ in dem angegebenen Umfange nur *reelle* Werte besitze. Gibt man dann x einen positiven Wert $x=\varrho<r$, so folgt:

$$\mathfrak{P}(\varrho)=\sum_0^\infty{}^{\nu}\alpha_\nu\varrho^\nu+i\sum_0^\infty{}^{\nu}\beta_\nu\varrho^\nu:\ \textit{reell},$$

und da dies für *jedes* ϱ des Intervalls $0<\varrho<r$ gilt, so muß $\sum_0^\infty{}^{\nu}\beta_\nu\varrho^\nu$ nach Nr. 6 identisch *Null* sein, man hat also durchweg $\beta_\nu=0$, und die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ reduziert sich von vornherein auf die folgende:

$$\mathfrak{P}(x)=\alpha_0+\sum_1^\infty{}^{\nu}\alpha_\nu x^\nu.$$

Wir zerlegen nun die unbegrenzte Folge der Indizes ν ($\nu=1,2,3,\ldots$) in eine unbegrenzte Folge von ebensolchen Teilfolgen, indem wir in die *erste* alle *ungeraden* Zahlen aufnehmen, in die *zweite* diejenigen *geraden*, welche durch 2, aber nicht durch 2^2 teilbar sind, in die *dritte* alle diejenigen, welche durch 2^2, aber nicht durch 2^3 teilbar sind, usf.: es ist un-

mittelbar ersichtlich, daß dann *jede* der Zahlen ν in *einer* dieser Teilfolgen und *nur* in einer wirklich vorkommt. Mit Hilfe dieser Zerlegung läßt sich $\mathfrak{P}(x)$ in die Form setzen (vgl. I_3, § 75, Nr. 2, S. 577):

$$\mathfrak{P}(x) = \alpha_0 + \sum_0^\infty{}_\nu \alpha_{2\nu+1} \cdot x^{2\nu+1} + \sum_0^\infty{}_\nu \alpha_{2(2\nu+1)} \cdot x^{2(2\nu+1)}$$

$$+ \sum_0^\infty{}_\nu \alpha_{4(2\nu+1)} \cdot x^{4(2\nu+1)} + \cdots$$

Wird jetzt $x = i\varrho$ $(0 < \varrho < r)$ angenommen, so wird *nur* die erste der obigen Teilsummen *imaginär*, falls sie nicht identisch verschwindet, was aber auf Grund der gemachten Voraussetzung der Fall sein muß. Man findet also:

$$\alpha_{2\nu+1} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

und die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ reduziert sich auf die folgende:

$$\mathfrak{P}(x) = \alpha_0 + \sum_0^\infty{}_\nu \alpha_{2(2\nu+1)} \cdot x^{2(2\nu+1)} + \sum_0^\infty{}_\nu \alpha_{4(2\nu+1)} \cdot x^{4(2\nu+1)} + \cdots.$$

Setzt man jetzt $x = \sqrt{i} \cdot \varrho$, so ergibt sich durch dieselbe Schlußweise:

$$\alpha_{2(2\nu+1)} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

sodann, nachdem auf diese Weise auch die entsprechende Teilreihe fortgefallen ist, mit Hilfe der Annahme $x = \sqrt[4]{i} \cdot \varrho$:

$$\alpha_{4(4\nu+1)} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

und da diese Schlußweise sich unbegrenzt fortsetzen läßt, so folgt, daß *keiner* der Koeffizienten α_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ *von Null verschieden* sein kann, so daß sich also ergibt:

$$\mathfrak{P}(x) = \alpha_0 \quad (\text{wo } \alpha_0 \textit{ reell}).$$

Wäre man von der Voraussetzung ausgegangen, daß $\mathfrak{P}(x)$ für $0 < |x| < r$ durchweg *imaginär*, so müßte auf Grund des eben gefundenen Ergebnisses $i \cdot \mathfrak{P}(x)$ auf eine *reelle*, also $\mathfrak{P}(x)$ auf eine *imaginäre* Konstante sich reduzieren.

8. Der vorstehende Satz führt unmittelbar zu der folgenden etwas allgemeineren Fassung:

Nimmt die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - x_0)$ für eine vollständige[1]) *Umgebung einer Stelle x' ausschließlich* ***reelle*** *(bzw.* ***imaginäre****) Werte an, so reduziert sie sich auf eine reelle (bzw. imaginäre) Konstante.*

---

1) In diesem Beiwort ist bereits die Bedingung enthalten, daß die Stelle x' *im Innern* des Konvergenzbereiches von $\mathfrak{P}(x - x_0)$ liegen muß.

Transformiert man nämlich $\mathfrak{P}(x|x_0)$ in $\mathfrak{P}(x|x_0, x')$, so läßt sich auf diese nach Potenzen von $(x-x')$ fortschreitende Reihe der zuvor für eine Reihe von der Form $\mathfrak{P}(x)$ bewiesene Satz unmittelbar übertragen, worauf dann alles weitere aus der für eine gewisse Umgebung von x' geltenden Beziehung $\mathfrak{P}(x|x_0) = \mathfrak{P}(x|x_0, x')$ sich ergibt.

Die Anwendung des obigen Satzes auf die Differenz zweier Potenzreihen $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, $\mathfrak{P}_1(x-x_0)$ mit Berücksichtigung des ersten Satzes von Nr. 6 liefert noch den am Anfang von Nr. 7 bereits angekündigten Satz:

> *Stimmen die reellen (bzw. imaginären) Teile zweier Potenzreihen $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$ für eine vollständige Umgebung einer Stelle x' überein, so sind sie, abgesehen von einer noch fraglich bleibenden imaginären (bzw reellen) additiven Konstante, identisch.*

Anders ausgesprochen:

> *Eine Potenzreihe ist bis auf eine willkürlich bleibende imaginäre (bzw. reelle) additive Konstante eindeutig bestimmt durch die Werte ihres reellen (bzw. imaginären) Teils für eine vollständige (beliebig kleine) Umgebung einer beliebigen Stelle im Innern ihres Konvergenzbereiches.*

§ 45. Weitere Betrachtungen über abgeleitete Potenzreihen. — Der Vitalische Doppelreihensatz. — Vorläufige Bemerkung über den wahren Konvergenzbereich einer Potenzreihe.

1. Aus dem Lehrsatze von Nr. 5 des vorigen Paragraphen erkennt man, daß die am Schlusse von Nr. 4 aufgeworfene Frage zu *bejahen* ist: d. h. besitzt die aus $\mathfrak{P}(x|x_0)$ abgeleitete Reihe $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1)$ einen Konvergenzradius R_1, welcher größer ist, als der Radius $r_1 = R - |x_1 - x_0|$ des *ursprünglich* sich ergebenden Konvergenzgebietes, so gilt die Beziehung:

$$\mathfrak{P}(x|x_0, x_1) = \mathfrak{P}(x|x_0) \tag{1}$$

auch noch für diesen *erweiterten* Konvergenzbereich $(x_1)R_1$, soweit derselbe mit $(x_0)R$ zusammenfällt.

Nimmt man jetzt in diesem, den Kreisen $(x_1)R_1$ und $(x_0)R$ *gemeinsamen* Bereiche eine weitere Stelle x_2 an, so kann man aus jeder der beiden in Gl. (1) vorkommenden Reihen eine solche nach Potenzen von $(x-x_2)$ ableiten, und es bestehen alsdann die Gleichungen:

$$\mathfrak{P}(x|x_0, x_1, x_2) = \mathfrak{P}(x|x_0, x_1), \tag{2}$$

$$\mathfrak{P}(x|x_0, x_2) \quad = \mathfrak{P}(x|x_0) \tag{3}$$

für eine gewisse Umgebung der Stelle x_2. Da aber die Stelle x_2 samt einer gewissen Umgebung dem Geltungsbereiche der Gl. (1) angehört, so folgt daraus, daß die linken Seiten der Gleichungen (2) und (3) geradezu

identisch sein müssen, was wir wieder durch die Bezeichnung ausdrücken wollen:

(4) $$\mathfrak{P}(x|x_0, x_1, x_2) \equiv \mathfrak{P}(x|x_0, x_2).$$

Ist dann R_2 der Konvergenzradius dieser Reihe, so gilt Gl. (3) für den ganzen Bereich, welcher den Kreisen $(x_2)R_2$ und $(x_0)R$ gemeinsam ist. Nimmt man nun in diesem Bereiche eine weitere Stelle x_3 an, so kann man die folgenden Gleichungen bilden:

(5) $$\mathfrak{P}(x|x_0, x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{P}(x|x_0, x_1, x_2)$$
$$= \mathfrak{P}(x|x_0, x_2) \text{ (nach (4))}$$

(6) $$\mathfrak{P}(x|x_0, x_3) = \mathfrak{P}(x|x_0),$$

aus welchen mit Berücksichtigung der Gleichung (3) wiederum die *Identität* resultiert:

(7) $$\mathfrak{P}(x|x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv \mathfrak{P}(x|x_0, x_3).$$

Man findet auf diese Weise allgemein:

(8) $$\mathfrak{P}(x|x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \mathfrak{P}(x|x_0, x_n),$$

sofern man jedesmal x_ν innerhalb des *gemeinsamen* Konvergenzbereiches von $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1, \ldots, x_{\nu-1})$ und $\mathfrak{P}(x|x_0)$ wählt. In Worten:

> *Leitet man aus $\mathfrak{P}(x|x_0)$ durch Vermittelung der Zwischenstellen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ die Reihe $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ ab, so ist dieselbe identisch mit der aus $\mathfrak{P}(x|x_0)$ direkt abgeleiteten Reihe $\mathfrak{P}(x|x_0, x_n)$, sofern nur die Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sämtlich innerhalb des Konvergenzkreises $(x_0)R$ der Reihe $\mathfrak{P}(x|x_0)$ liegen.*

2. Wird der soeben betrachtete Prozeß in der Weise eingerichtet, daß der Konvergenzbereich der als *vor*letzte auftretenden Reihe $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ die Stelle x_0 umschließt, so kann man offenbar speziell $x_n = x_0$ wählen, und die Identität (8) nimmt in diesem Falle die Form an:

(9) $$\mathfrak{P}(x|x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_0) \equiv \mathfrak{P}(x|x_0).$$

Das hierin enthaltene Resultat läßt sich folgendermaßen aussprechen:

> *Leitet man aus $\mathfrak{P}(x|x_0)$ eine Reihe $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1)$ ab, so läßt sich aus der letzteren durch Vermittelung passend gewählter Zwischenstellen $x_2, \ldots, x_n$ eine mit $\mathfrak{P}(x|x_0)$ identische Reihe nach Potenzen von $(x - x_0)$ ableiten.*

Um über das jedesmalige Vorhandensein solcher *„passend zu wählenden"* Zwischenstellen und die einfachste Art, auf welche die angedeutete *Rückbildung* von $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1)$ in $\mathfrak{P}(x|x_0)$ allemal bewerkstelligt werden kann, völlige Klarheit zu gewinnen, stellen wir noch die folgenden Betrachtungen an.

Es sei wiederum R der Konvergenzradius von $\mathfrak{P}(x|x_0)$, und es werde zunächst x_1 so angenommen, daß:

(10) $$|x_1 - x_0| < \frac{R}{2}.$$

Alsdann gehört zu der Reihe $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1)$ *mindestens* ein Konvergenzradius:

(11) $$r_1 = R - |x_1 - x_0| > \frac{R}{2} \text{ (s. Fig. 17)},$$

so daß also die Stelle x_0 *innerhalb* des Kreises $(x_1)r_1$ liegt. Dann läßt sich aber aus $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1)$ geradezu *direkt* eine Reihe $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1, x_0)$ ableiten, und man hat:

(12) $$\mathfrak{P}(x|x_0, x_1, x_0) \equiv \mathfrak{P}(x|x_0)$$ [1])

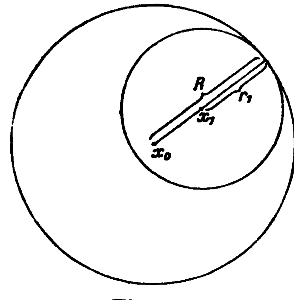


Fig. 17.

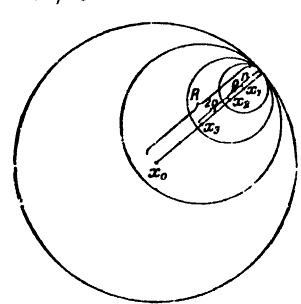


Fig. 18.

Sei nun zweitens x_1 so gelegen, daß:

(13) $$|x_1 - x_0| \geqq \frac{R}{2} \text{ (s. Fig. 18)}$$

$\left(\text{also: } r_1 = R - |x_1 - x_0| \leqq \frac{R}{2}\right)$, so nehme man eine positive Zahl ϱ beliebig wenig unterhalb r_1 an und wähle auf der Strecke $\overline{x_0 x_1}$ eine Stelle x_2 so, daß:

(14) $$|x_2 - x_0| = R - (r_1 + \varrho) \quad (\text{also: } > R - 2r_1).$$

Leitet man jetzt aus $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1)$ eine Reihe $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1, x_2)$ ab, so ist dieselbe nach Nr. 1 mit der aus $\mathfrak{P}(x|x_0)$ *direkt* abgeleiteten Reihe $\mathfrak{P}(x|x_0, x_2)$ identisch und konvergiert demnach zum mindesten in einem um x_2 beschriebenen Kreise mit dem Radius:

(15) $$\begin{aligned} r_2 &= R - |x_2 - x_0| \\ &= r_1 + \varrho > 2\varrho. \end{aligned}$$

---

1) Diese Betrachtung zeigt auch, daß in der Tat der wahre Konvergenzkreis einer abgeleiteten Reihe in vielen Fällen über denjenigen der primitiven Reihe herausragen wird (was im vorigen Paragraphen Nr. 3 nur durch ein spezielles Beispiel erläutert wurde). Ist nämlich $(x_0)R$ der wahre Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}(x|x_0)$, ebenso $(x_1)r_1$ derjenige von $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1) \equiv \mathfrak{P}_1(x|x_1)$, und betrachtet man jetzt diese letztere Reihe als primitive, so besitzt die daraus abgeleitete Reihe $\mathfrak{P}_1(x|x_1, x_0) \equiv \mathfrak{P}(x|x_0)$ tatsächlich den Konvergenzradius $R = r_1 + |x_1 - x_0|$.

Wenn jetzt $r_1 + \varrho > \frac{R}{2}$, also x_0 bereits in das Innere dieses Kreises fällt, so kann man ohne weiteres aus $\mathfrak{P}(x \mid x_0, x_1, x_2)$ eine Reihe $\mathfrak{P}(x \mid x_0, x_1, x_2, x_0)$ ableiten, womit das gewünschte Ziel erreicht ist.

Wenn nicht, so nehme man auf der Strecke $\overline{x_0 x_2}$ eine Stelle x_3 so an, daß:

$$(16)\qquad \begin{aligned} |x_3 - x_0| &= R - (r_2 + 2\varrho) \quad (\text{also: } > R - 2r_2) \\ &= R - (r_1 + 3\varrho). \end{aligned}$$

Alsdann kann man eine Reihe $\mathfrak{P}(x \mid x_0, x_1, x_2, x_3)$ ableiten, welche wegen ihrer Identität mit der Reihe $\mathfrak{P}(x \mid x_0, x_3)$ zum mindesten einen Konvergenzradius:

$$(17)\qquad \begin{aligned} r_3 &= R - |x_3 - x_0| \\ &= r_1 + 3\varrho > 4\varrho \end{aligned}$$

besitzt.

Durch entsprechende Fortsetzung des Verfahrens gelangt man einmal zu einer Stelle x_{n+1}, für welche:

$$(18)\qquad \begin{cases} |x_{n+1} - x_0| = R - (r_1 + (2^n - 1) \cdot \varrho) \\ \qquad r_{n+1} = r_1 + (2^n - 1) \cdot \varrho > 2^n \cdot \varrho. \end{cases}$$

Bedeutet also 2^n die kleinste Potenz von 2, für welche $2^n \cdot \varrho \geqq \frac{R}{2}$, so wird der Kreis $(x_{n+1}) r_{n+1}$ (als erster bei diesem Verfahren resultierender) die Stelle x_0 umschließen und man erhält sodann:

$$(19)\qquad \mathfrak{P}(x \mid x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}, x_0) \equiv \mathfrak{P}(x \mid x_0).\ ^{1)}$$

3. Mit Hilfe des eben gewonnenen Resultates läßt sich der Lehrsatz von Nr. 5 des vorigen Paragraphen (S. 334) in folgender Weise vervollständigen:

Unter den a. a. O. über die Reihen $\mathfrak{P}_0(x \mid x_0)$, $\mathfrak{P}_1(x \mid x_1)$ gemachten Voraussetzungen sind dieselben stets auseinander ableitbar.

Bedeutet nämlich b eine ganz beliebige, im Innern des gemeinsamen Konvergenzbereiches $\mathfrak{B}$ gelegene Stelle, so kann man aus $\mathfrak{P}_0(x \mid x_0)$, $\mathfrak{P}_1(x \mid x_1)$ je eine Reihe nach Potenzen von $x - b$ ableiten, so daß:

$$(20)\qquad \mathfrak{P}_0(x \mid x_0, b) = \mathfrak{P}_0(x \mid x_0), \quad \mathfrak{P}_1(x \mid x_1, b) = \mathfrak{P}_1(x \mid x_1).$$

Da sodann:

$$(21)\qquad \mathfrak{P}_0(x \mid x_0, b) \equiv \mathfrak{P}_1(x \mid x_1, b),$$

und man andererseits $\mathfrak{P}_1(x \mid x_1, b)$, nötigenfalls mit Einschaltung passender Zwischenstellen $b_1, \ldots, b_k$, wiederum in $\mathfrak{P}_1(x \mid x_1)$ zurückführen kann, folgt schließlich, daß $\mathfrak{P}_0(x \mid x_0)$ durch Vermittelung der Stellen $b, b_1, \ldots, b_k$

1) In der Figur 18 ist $n = 2$ gewählt.

in $\mathfrak{P}_1(x|x_1)$ transformiert werden kann; und das analoge gilt offenbar bezüglich der Überführung von $\mathfrak{P}_1(x|x_1)$ in $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$.

Man beachte, daß dieses Ergebnis keineswegs ohne weiteres umkehrbar ist, d. h. sind $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ und $\mathfrak{P}_1(x|x_1)$ *durch Vermittelung von Zwischenstellen* auseinander ableitbar und konvergieren sie für irgendeinen Bereich gleichzeitig, so braucht daselbst *keineswegs* die Beziehung $\mathfrak{P}_0(x|x_0) = \mathfrak{P}_1(x|x_1)$ zu bestehen. Daß dies der Fall sei, kann auf Grund unserer Betrachtungen nur dann mit Sicherheit geschlossen werden, wenn die sämtlichen verwendeten Zwischenstellen dem Innern des Konvergenzbereiches von $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ bzw. $\mathfrak{P}_1(x|x_1)$ angehören.

4. Der Satz von Nr. 2 liefert ferner das Mittel, um die Voraussetzung (B) des Doppelreihensatzes von § 39, Nr. 3 (S. 293) in der (a. a. O. Fußn. 3) bereits angekündigten Weise zu verallgemeinern, daß die Konvergenz der Reihe: $\sum_0^\infty {}_\nu \mathfrak{P}_\nu(x)$ statt in der Nähe des Punktes $x = 0$ nur in der Nähe eines *beliebigen* Punktes des Bereiches $|x| < r$ gefordert zu werden braucht, d. h. es gilt der folgende Satz (*der „Vitalische Doppelreihensatz“*[1])):

Ist jede der unendlich vielen Potenzreihen:

$$\mathfrak{P}_\nu(x) \equiv \sum_0^\infty {}_\mu\, a_\mu^{(\nu)} x^\mu$$

gleichmäßig konvergent auf dem Kreise $|x| = r$, *ist ferner die Gesamtheit der Reihensummen:*

$$S_n(x) \equiv \sum_0^n {}_\nu\, \mathfrak{P}_\nu(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

beschränkt für $|x| \leqq r$ *und konvergiert die Reihe:*

$$S(x) \equiv \sum_0^\infty {}_\nu\, \mathfrak{P}_\nu(x)$$

für unendlich viele Stellen in beliebiger Nähe irgendeiner im Innern des Kreises $|x| = r$ *gelegenen Stelle* x_0, *so konvergiert* $S(x)$ *gleichmäßig für* $|x| \leqq r' < r$ *und man hat für* $|x| < r$:

$$S(x) = \sum_0^\infty {}_\mu\, A_\mu x^\mu, \quad \text{wo:} \quad A_\mu = \sum_0^\infty {}_\nu\, a_\mu^{(\nu)}.\text{[2]})$$

---

1) Genau genommen ist die Bezeichnung nicht ganz korrekt. Der obige Satz bildet in Wahrheit den Hauptbestandteil eines etwas allgemeineren Satzes, der gewöhnlich als *Vitalischer Satz* bezeichnet wird und auf den wir bei späterer Gelegenheit noch zurückkommen werden (s. § 49, Nr. 2).

2) Es würde selbstverständlich freistehen, x auch durch $x - x'$ zu ersetzen, wobei dann x_0 dem Innern des Kreises $|x - x'| = r$ anzugehören hat

Beweis. Transformiert man jede der Potenzreihen $\mathfrak{P}_\nu(x)$ in eine Potenzreihe von der Form: $\mathfrak{P}_\nu(x|x_0)$, so genügt die Folge dieser letzteren Reihen den Voraussetzungen (B) des oben erwähnten Satzes, wenn man daselbst x durch $(x-x_0)$ ersetzt, und daraus folgt, daß die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\,\mathfrak{P}_\nu(x|x_0)$ für $|x-x_0|<r-|x_0|$ *konvergiert*. Andererseits lassen sich aber die $\mathfrak{P}_\nu(x|x_0)$, nötigenfalls durch Vermittelung passender (für alle ν gleichbleibender) Zwischenstellen $x_1, \ldots, x_k$ in Reihen nach Potenzen von x zurückführen, die dann mit den ursprünglichen $\mathfrak{P}_\nu(x)$ identisch sein müssen, also:

$$\mathfrak{P}_\nu(x|x_0) = \mathfrak{P}_\nu(x|x_0, x_1, \ldots, x_k, 0) \equiv \mathfrak{P}_\nu(x).$$

Man hat dann zunächst für eine gewisse vom Index ν unabhängige Umgebung von x_1, nämlich $|x-x_1|<r-|x_0-x_1|$:

$$\mathfrak{P}_\nu(x|x_0, x_1) = \mathfrak{P}_\nu(x|x_0),$$

also für jedes n auch:

$$\sum_0^n{}_\nu\,\mathfrak{P}_\nu(x|x_0, x_1) = \sum_0^n{}_\nu\,\mathfrak{P}_\nu(x|x_0)$$

und somit schließlich:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_0^n{}_\nu\,\mathfrak{P}_\nu(x|x_0, x_1) = \sum_0^\infty{}_\nu\,\mathfrak{P}_\nu(x|x_0),$$

d. h. die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\,\mathfrak{P}_\nu(x|x_0, x_1)$ *konvergiert* in der oben bezeichneten Umgebung von $x = x_1$. Überträgt man diese Schlußweise von x_1 auf x_2 usf., so findet man schließlich, daß $\sum_0^\infty{}_\nu\,\mathfrak{P}_\nu(x|x_0, x_1, \ldots, x_k, 0)$ und damit identisch: $\sum_0^\infty{}_\nu\,\mathfrak{P}_\nu(x)$ in der Umgebung von $x=0$ *konvergiert*. In Verbindung mit der vorausgesetzten Beschränktheit von $\sum_0^n{}_\nu\,\mathfrak{P}_\nu(x)$ sind somit die mit (B) bezeichneten Voraussetzungen nunmehr vollständig befriedigt, womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Zusatz. Sind die Voraussetzungen des vorstehenden Satzes erfüllt, so ergibt sich mit Benutzung des Satzes von § 43, Nr. 2 (S. 326, Gl (13)) über die Derivierten einer gleichmäßig konvergierenden Summe unendlich vieler Potenzreihen die Gültigkeit der Beziehung:

$$D^n\sum_0^\infty{}_\nu\,\mathfrak{P}_\nu(x) = \sum_0^\infty{}_\nu\,D^n\,\mathfrak{P}_\nu(x) \tag{22}$$

für $|x|\leq r'<r$.

5. Konvergiert wiederum die Reihe $\mathfrak{P}(x|x_0)$ im Kreise $(x_0)R$ und bedeutet x_1 eine Stelle im Innern dieses Kreises, so besitzt die abgeleitete Reihe $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1)$ *zum mindesten* den Konvergenzradius $R - d$, wenn $|x_1 - x_0| = d$ gesetzt wird. Bezeichnet man also den *wahren*[1]) Konvergenzradius von $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1)$ mit R_1, so hat man stets:

(23a) $\qquad R_1 \geqq R - d.$

Andererseits läßt sich aber zeigen, daß allemal:

(23b) $\qquad R_1 \leqq R + d$

sein muß, wenn R den *wahren* Konvergenzradius von $\mathfrak{P}(x|x_0)$ darstellt. Wäre nämlich: $R_1 > R + d$, so ließe sich aus $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1)$ direkt eine mit $\mathfrak{P}(x|x_0)$ identische Reihe $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1, x_0)$ ableiten, welche zum mindesten einen Konvergenzradius:

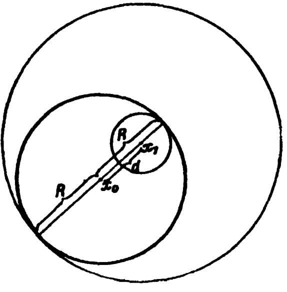


Fig. 19

$$r_1 = R_1 - d \quad \text{also: } > R$$

besitzen würde, d. h. R wäre dann gar nicht der wahre Konvergenzradius von $\mathfrak{P}(x|x_0)$.

Da die obere Grenze der mit d bezeichneten positiven Zahl offenbar den Wert R hat, so müssen also die Konvergenzradien R' aller möglichen aus $\mathfrak{P}(x|x_0)$ ableitbaren Reihen dem Intervalle $0 \leqq R' \leqq 2R$ angehören.

Hieraus folgt insbesondere, daß bei endlichem R auch jedes R' *unter einer endlichen Grenze* bleiben muß, und man erkennt somit die Richtigkeit der in § 42, Nr. 2 (S. 318) gemachten Bemerkung über das Anwachsen von $|\mathfrak{P}^{(\nu)}(x_1)|$ für unendlich wachsende Werte von ν, für den Fall, daß $\mathfrak{P}(x)$ einen bestimmten *endlichen* Konvergenzkreis besitzt.

Es läßt sich aber auch ferner zeigen, daß allemal, wenn R den *wahren* Konvergenzradius von $\mathfrak{P}(x|x_0)$ vorstellt, unter den wahren Konvergenzradien R' der aus $\mathfrak{P}(x|x_0)$ ableitbaren Reihen *stets solche vorhanden* sind, die unter jeder noch so kleinen positiven Zahl liegen, mit anderen Worten, daß die *untere Grenze* aller möglichen R' den Wert *Null* hat. Und da andererseits ohne weiteres einleuchtet, daß umgekehrt auch R der *wahre* Konvergenzradius von $\mathfrak{P}(x|x_0)$ sein muß, wenn die untere Grenze der R' den Wert *Null* hat (denn aus der Möglichkeit, R in $R + \varrho$ zu vergrößern, würde ja für solche Stellen x', welche dem Innern des ursprünglichen Kreises $(x_0)R$ angehören, stets $R' > \varrho$ resultieren), so

1) Die Bezeichnung „*wahrer*" Konvergenzradius enthält eigentlich einen Pleonasmus, denn auf Grund der in § 30, Nr. 3 (S. 243/4) gegebenen Definition besagt schon die Bezeichnung „*Konvergenzradius*" ganz genau dasjenige, was hier lediglich zu noch schärferer Betonung des Sachverhalts ausdrücklich „*wahrer*" Konvergenzradius genannt wird.

wird jene letztere Eigenschaft geradezu die *notwendige und hinreichende* Bedingung dafür bilden, daß der betreffende Kreis der *wirkliche Konvergenzkreis* von $\mathfrak{P}(x|x_0)$ ist.

Obschon die bisher gewonnenen Hilfsmittel vollständig ausreichen würden, um den Beweis des angedeuteten Satzes durchzuführen, so versparen wir denselben, um unnötige Wiederholungen zu vermeiden, für eine spätere Gelegenheit, bei welcher das fragliche Resultat als spezieller Fall eines allgemeineren Satzes zum Vorschein kommen wird.

§ 46. Der binomische Satz für negative ganze Exponenten. — Entwicklung von $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x-x_0}\right)$, $P(x-x_0)$ nach positiven Potenzen von $(x-x_1)$. — Allgemeinster Identitätssatz für Reihen $P(x-x_0)$.

Man hat für $|x|<1$:

$$\frac{1}{1+x}=\sum_0^\infty{}^{\nu}(-1)^\nu\cdot x^\nu, \tag{1}$$

und hieraus könnte man, wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet, auch die Entwicklung von $\frac{1}{(1+x)^n}$ dadurch gewinnen, daß man die n^{te} Potenz der obigen Potenzreihe mit Hilfe der *Cauchy*schen Multiplikationsregel als Potenzreihe in x darstellt. Die Bestimmung der betreffenden Reihenkoeffizienten läßt sich jetzt indessen bequemer folgendermaßen bewerkstelligen. Aus (1) folgt zunächst:

$$D_x^{(n-1)}\frac{1}{1+x}=\sum_{n-1}^\infty{}^{\nu}(-1)^\nu\nu(\nu-1)\dots(\nu-n+2)\cdot x^{\nu-(n-1)}\quad(n\geqq 2)$$

oder, indem man unter der Summe $\nu+n-1$ statt ν schreibt und die Reihenfolge der Zahlerfaktoren umkehrt:

$$\begin{aligned}D_x^{(n-1)}\frac{1}{1+x}&=(-1)^{n-1}\sum_0^\infty{}^{\nu}(-1)^\nu(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+n-1)\cdot x^\nu\\&=(-1)^{n-1}\sum_0^\infty{}^{\nu}(-1)^\nu\frac{(\nu+n-1)!}{\nu!}\cdot x^\nu.\end{aligned}\tag{2}$$

Andererseits hat man nach § 43, Nr. 3 (Gl. (19), (20), S. 327):

$$D_x\frac{1}{\mathfrak{P}(x)}=-\frac{\mathfrak{P}'(x)}{(\mathfrak{P}(x))^2},\qquad D_x\frac{1}{(\mathfrak{P}(x))^m}=-m\cdot\frac{\mathfrak{P}'(x)}{(\mathfrak{P}(x))^{m+1}},\tag{3}$$

also speziell:

$$D_x\frac{1}{1+x}=-\frac{1}{(1+x)^2}.\tag{4}$$

Daraus folgt dann weiter:

$$D_x^2 \frac{1}{1+x} = -D_x \frac{1}{(1+x)^2} = 2 \cdot \frac{1}{(1+x)^3},$$

$$D_x^3 \frac{1}{1+x} = 2 D_x \frac{1}{(1+x)^3} = -2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{(1+x)^4}$$

und schließlich:

$$(5) \qquad D_x^{n-1} \frac{1}{1+x} = (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{1}{(1+x)^n} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots).$$

Die Verbindung dieses Resultates mit Gl. (2) liefert dann die gesuchte Entwicklung:

$$(6) \qquad \frac{1}{(1+x)^n} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_0^{\infty} {}_{\nu} (-1)^{\nu} \cdot \frac{(\nu+n-1)!}{\nu!} x^{\nu}$$

$$= 1 + \sum_1^{\infty} {}_{\nu} (-1)^{\nu} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdots (n+\nu-1)}{1 \cdot 2 \cdots \nu} x^{\nu} \qquad (|x| < 1).$$

Vergleicht man dieselbe mit der Beziehung:

$$(7) \quad (1+x)^m = \sum_0^m {}_{\nu} (m)_{\nu} x^{\nu}, \quad \text{wo:} \begin{cases} (m)_0 = 1 \\ (m)_{\nu} = \dfrac{m(m-1) \cdots (m-\nu+1)}{1 \cdot 2 \cdots \nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m), \end{cases}$$

so kann man, um möglichste Analogie herzustellen, der letzteren auch die Form geben:

$$(8) \qquad (1+x)^m = \sum_0^{\infty} {}_{\nu} (m)_{\nu} x^{\nu},$$

wenn man die obige Definition von $(m)_{\nu}$ auf den Fall $\nu > m$ ausdehnt, da sodann $(m)_{\nu} = 0$ für $\nu > m$ wird (wegen des Auftretens des Faktors $(m-m)$ im Zähler). Andererseits hat man:

$$(9) \qquad ((m)_{\nu})_{m=-n} = (-n)_{\nu} = (-1)^{\nu} \frac{n(n+1) \ldots (n+\nu-1)}{1 \cdot 2 \cdots \nu},$$

so daß sich Gl. (6) auch folgendermaßen schreiben läßt:

$$(10) \qquad (1+x)^{-n} = \sum_0^{\infty} {}_{\nu} (-n)_{\nu} x^{\nu},$$

wenn man noch $(-n)_0 = 1$ setzt. Mit anderen Worten: Der zunächst für *positive* ganzzahlige Exponenten m bestehende *binomische Satz* gilt — auf die Form (8) gebracht — auch für *negative* ganzzahlige Exponenten[1];

1) Die unter der Voraussetzung $n \geqq 2$ abgeleitete Gleichung (10) gilt offenbar auch für $n = 1$, da aus Gl. (9) folgt:

$$(-1)_{\nu} = (-1)^{\nu}.$$

dabei findet nur der Unterschied statt, daß die Reihe in diesem Falle *nicht* bei einem bestimmten Gliede abbricht, sondern stets unbegrenzt ist, und daß ihr *Konvergenzbereich*, also auch der *Gültigkeitsbereich* der fraglichen Entwicklung auf das Gebiet $|x| < 1$ beschränkt ist.

Man bemerke noch, daß nach Gl. (9) offenbar die Beziehung besteht:

$$(11) \qquad (-n)_\nu = (-1)^\nu \cdot (n + \nu - 1)_\nu$$

und andererseits:

$$(12) \quad (-n)_\nu = (-1)^\nu \cdot \frac{(n+\nu-1)!}{(n-1)!\,\nu!} = (-1)^\nu \cdot \frac{(\nu+1)(\nu+2)\,\ldots\,(\nu+n-1)}{(n-1)!}$$
$$= (-1)^\nu (\nu + n - 1)_{n-1}.$$

Hiernach kann die Entwicklung (10) auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$(13) \quad (1+x)^{-n} = \sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu \cdot (n+\nu-1)_\nu \cdot x^\nu = \sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu \cdot (\nu+n-1)_{n-1} \cdot x^\nu.$$

Hat man ferner:

$$(14) \qquad \mathfrak{P}(x) = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu,$$

also:

$$\mathfrak{P}^{(n)}(x) = \sum_n^\infty {}^\nu \nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1) a_\nu x^{\nu-n}$$
$$= \sum_0^\infty {}^\nu (\nu+n)(\nu+n-1)\cdots(\nu+1)\cdot a_{\nu+n} x^\nu,$$

so wird zunächst:

$$(15) \qquad \frac{1}{n!}\mathfrak{P}^{(n)}(x) = \sum_0^\infty {}^\nu (\nu+n)_n \cdot a_{\nu+n} x^\nu = \sum_0^\infty {}^\nu (n+\nu)_\nu \cdot a_{n+\nu} x^\nu$$

und daher mit Benutzung von Gl. (11) auch:

$$(16) \qquad \frac{1}{n!}\mathfrak{P}^{(n)}(x) = \sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu (-n-1)_\nu \cdot a_{n+\nu} x^\nu.$$

2. Es sei jetzt die Reihe:

$$(17) \qquad \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_1^\infty {}^\lambda b_\lambda x^{-\lambda}$$

konvergent für $|x| > R_0$ (wo $R_0 \geqq 0$). Nimmt man x_1 beliebig innerhalb dieses Konvergenzbereiches (also $|x_1| > R_0$) an und bezeichnet mit h jede beliebige Zahl, welche der Bedingung genügt:

$$(18) \qquad |h| < |x_1| - R_0$$

(so daß also x_1+h jede Stelle bedeuten kann, die im Innern eines um den Punkt x_1 beschriebenen, den Kreis $(0)R_0$ von außen berührenden, bzw. im Falle $R_0=0$ durch den Nullpunkt gehenden Kreises liegt), so konvergiert noch die aus lauter *positiven* Bestandteilen zusammengesetzte Reihe:

$$(19) \qquad \sum_1^\infty {}^\lambda |b_\lambda|(|x_1|-|h|)^{-\lambda} \qquad (\text{wegen: } |x_1|-|h|>R_0)$$

Da sodann der Ausdruck:

$$(|x_1|-|h|)^{-\lambda}=|x_1|^{-\lambda}\left(1-\left|\frac{h}{x_1}\right|\right)^{-\lambda} \qquad (\lambda=1,2,3,\ldots)$$

wegen $\left|\frac{h}{x_1}\right|<1-\frac{R_0}{|x_1|}<1$ nach positiven Potenzen von $\left|\frac{h}{x_1}\right|$, also von $|h|$, entwickelt werden kann und diese Entwicklung wiederum lauter positive Terme enthält, so darf man nach dem *Cauchy*schen Doppelreihensatze nicht nur die Reihe (19) nach Potenzen von $|h|$, sondern auch die Reihe:

$$(20) \qquad \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x_1+h}\right)=\sum_1^\infty {}^\lambda b_\lambda(x_1+h)^{-\lambda},$$

bei entsprechender Entwicklung der einzelnen Glieder $b_\lambda(x_1+h)^{-\lambda}$, nach Potenzen von h ordnen. Nun ist nach Gl. (10) für $\lambda=1,2,3,\ldots$

$$(x_1+h)^{-\lambda}=x_1^{-\lambda}\left(1+\frac{h}{x_1}\right)^{-\lambda}=\sum_0^\infty {}^\nu (-\lambda)_\nu x_1^{-\nu-\lambda}\cdot h^\nu$$

und daher:

$$(21) \qquad \begin{cases} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x_1+h}\right)=\sum_1^\infty {}^\lambda b_\lambda \sum_0^\infty {}^\nu (-\lambda)_\nu x_1^{-\nu-\lambda}\cdot h^\nu \\ \qquad =\sum_0^\infty {}^\nu \left(\sum_1^\infty {}^\lambda (-\lambda)_\nu b_\lambda x_1^{-\lambda-\nu}\right)\cdot h^\nu \end{cases}$$

oder, wenn $x_1+h=x$; also $h=x-x_1$ gesetzt wird:

$$(22) \qquad \begin{cases} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)=\sum_0^\infty {}^\nu \left(\sum_1^\infty {}^\lambda (-\lambda)_\nu b_\lambda x_1^{-\lambda-\nu}\right)\cdot(x-x_1)^\nu \\ \qquad =\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x_1}\right)+\sum_1^\infty {}^\nu \left(\sum_1^\infty {}^\lambda (-\lambda)_\nu b_\lambda x_1^{-\lambda-\nu}\right)\cdot(x-x_1)^\nu, \end{cases}$$

wo nach Ungl. (18) x der Bedingung zu genügen hat:

$$(22\text{a}) \qquad |x-x_1|<|x_1|-R_0.$$

Es läßt sich also aus jeder Reihe von der Form $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$, geradeso wie aus $\mathfrak{P}(x)$, für die Umgebung jeder im Innern des Konvergenzbereiches

(d. h. also hier *außerhalb* des Kreises $(0)R_0$, bzw. im Falle $R_0 = 0$ außerhalb des Nullpunktes) gelegenen Stelle x_1 eine mit $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ *gleichwertige* Reihe $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$ *„ableiten"*, zum mindesten[1]) gültig für alle x im Innern desjenigen Kreises um x_1, welcher den Kreis $(0)R_0$ *von außen* berührt, bzw. im Falle R_0 durch den Nullpunkt geht.

Bezüglich der in der Form

$$\sum_1^\infty {}^\lambda (-\lambda)_\nu b_\lambda x_1^{-\lambda-\nu}$$

auftretenden Koeffizienten dieser abgeleiteten Reihe sei noch folgendes bemerkt.

Da $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ für jedes einzelne der Bedingung $|x| > R_0$ genügende x auf unendlich viele Arten in der Form $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$ dargestellt werden kann[2]), so besitzt $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ *Derivierte* jeder Ordnung:

$$(23)\qquad \begin{gathered} D_x \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathfrak{P}_1'(x-x_1), \quad D_x^2 \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathfrak{P}_1''(x-x_1), \ldots, \\ D_x^\nu \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathfrak{P}_1^{(\nu)}(x-x_1) \ldots \end{gathered}$$

Da andererseits (s. Gl. (21) für $h = x - x_1$):

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) \equiv \sum_1^\infty {}^\lambda b_\lambda \left(\frac{1}{x}\right)^\lambda = \sum_1^\infty {}^\lambda b_\lambda \sum_0^\infty {}^\nu (-\lambda)_\nu x_1^{-\lambda-\nu}(x-x_1)^\nu,$$

also $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ als unendliche, in der Umgebung der Stelle x_1 offenbar *gleichmäßig* konvergierende Reihe konvergenter Potenzreihen in $(x-x_1)$ erscheint, so findet man nach dem Satze von § 43, Nr. 2 (S. 325) die Derivierten von $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ durch gliedweise Derivation, also:

$$(24)\qquad D_x^\nu \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_1^\infty {}^\lambda b_\lambda D_x^\nu x^{-\lambda}.$$

---

1) Der wahre Konvergenzbereich dieser abgeleiteten Reihe, sowie der Gültigkeitsbereich der Gleichheit mit $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ kann sich ja möglicherweise weiter erstrecken. Inwieweit dies wirklich der Fall ist, wird aus späteren Betrachtungen hervorgehen.

2) Es braucht ja x_1 nur so ausgewählt zu werden, daß der um x_1 beschriebene, den Kreis $(0)R_0$ von außen berührende Kreis die Stelle x im Innern enthält Da die bei Verschiebung von x_1 sich ergebenden abgeleiteten Reihen auseinander ableitbar sind, so folgt, daß die Ergebnisse der Definition (23) von der Wahl der Stelle x_1 unabhängig sind.

Nun ist (nach § 43, Gl. (19), (20), S. 327):

$$D_x x^{-\lambda} = -\lambda \cdot x^{-\lambda-1} \quad (\text{wegen: } D_x x = 1),$$

also:

$$D_x^2 x^{-\lambda} = +\lambda(\lambda+1) \cdot x^{-\lambda-2}$$
$$D_x^3 x^{-\lambda} = -\lambda(\lambda+1)(\lambda+2) \cdot x^{-\lambda-3}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$D_x^\nu x^{-\lambda} = (-1)^\nu \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+\nu-1) \cdot x^{-\lambda-\nu} = \nu!(-\lambda)_\nu x^{-\lambda-\nu},$$

so daß Gl. (24) nunmehr die Form annimmt:

$$(25) \qquad D_x^\nu \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \nu! \sum_1^\infty{}_\lambda (-\lambda)_\nu b_\lambda x^{-\lambda-\nu}.$$

Mit Benutzung dieses Ergebnisses läßt sich die Gl. (22), welche die Umformung von $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ in eine *abgeleitete* $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$ liefert, jetzt folgendermaßen schreiben:

$$(26) \qquad \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x_1}\right) + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!}\left(D_x^\nu \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right)_{x=x_1} \cdot (x-x_1)^\nu.$$

Vergleicht man diese Beziehung mit der entsprechenden für eine Potenzreihe von der Form $\mathfrak{P}(x)$ geltenden, nämlich:

$$(27) \qquad \begin{cases} \mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}(x_1) + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!} \mathfrak{P}^{(\nu)}(x_1) \cdot (x-x_1)^\nu \\ \qquad = \mathfrak{P}(x_1) + \sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!} (D_x^\nu \mathfrak{P}(x))_{x=x_1} \cdot (x-x_1)^\nu, \end{cases}$$

so zeigt sich vollkommene Übereinstimmung, wenn man die *zweite* Form der rechten Seite von Gl. (27) ins Auge faßt.

Dagegen sei ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß man in Gl. (26), um Übereinstimmung mit der *ersten* Form von Gl. (27) zu erzielen, *nicht* etwa $D_x^\nu \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ durch $\mathfrak{P}^{(\nu)}\left(\frac{1}{x}\right)$ ersetzen darf. Man hat nämlich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}'\left(\frac{1}{x}\right) = (\mathfrak{P}'(y))_{y=\frac{1}{x}} &= \left(\sum_1^\infty{}_\lambda b_\lambda y^{\lambda-1}\right)_{y=\frac{1}{x}} \\ &= \sum_1^\infty{}_\lambda b_\lambda x^{-\lambda+1} \\ &= x^2 \cdot \sum_1^\infty{}_\lambda b_\lambda x^{-\lambda-1} \\ &= -x^2 \cdot D_x \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) \quad (\text{s. Gl. (25) für } \nu = 1) \end{aligned}$$

und daher:

$$D_x \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \cdot \mathfrak{P}'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Daraus folgt weiter:

$$D_x^2 \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) = +\frac{2}{x^3} \cdot \mathfrak{P}'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} D_x \mathfrak{P}'\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{2}{x^3} \mathfrak{P}'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4} \mathfrak{P}''\left(\frac{1}{x}\right) \text{ usf.}$$

Will man Gl. (26) auf eine der *ersten* Schreibweise von Gl. (27) analoge Form bringen, so hätte man etwa zu setzen:

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathfrak{Q}(x) = \mathfrak{Q}(x_1 + (x - x_1)),$$

wo also $\mathfrak{Q}(x)$ eine gewöhnliche Potenzreihe in $x - x_1$ vorstellt (vgl. Gl. (26)). Alsdann wird:

$$D_x^\nu \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathfrak{Q}^{(\nu)}(x) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

und man erhält an Stelle von Gl. (26) die folgende:

$$(28) \qquad \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathfrak{Q}(x) = \mathfrak{Q}(x_1) + \sum_1^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!} \mathfrak{Q}^{(\nu)}(x_1) \cdot (x - x_1)^\nu.$$

Ersetzt man hier

$$x \text{ durch } x - x_0,$$

also

$$x_1 \text{ durch } x_1 - x_0,$$

so ergibt sich:

$$(29) \quad \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x - x_0}\right) = \mathfrak{Q}(x - x_0) = \mathfrak{Q}(x_1 - x_0) + \sum_1^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!} \mathfrak{Q}^{(\nu)}(x_1 - x_0) \cdot (x - x_1)^\nu$$

(ganz analog mit § 44, Gl. (5), S. 330). Dabei bedeutet x_1 eine beliebige, im Innern des durch eine Beziehung von der Form $|x - x_0| > R_0$ charakterisierten Konvergenzbereiches von $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x - x_0}\right)$ und die obige Transformation gilt zum mindesten für alle x, welche der Bedingung genügen (s. Gl. (23)):

$$(30) \qquad |x - x_1| < |x_1 - x_0| - R_0,$$

also für alle Stellen x im Innern eines um x_1 beschriebenen Kreises, welcher den Kreis $(x_0) R_0$ von außen berührt, bzw. im Falle $R_0 = 0$ durch den Punkt x_0 geht.

3. Eine Reihe von der Form:

$$(31) \qquad P(x - x_0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^\nu a_\nu (x - x_0)^\nu,$$

die etwa für $R_0 < |x-x_0| < R$ (wo $R_0 \geqq 0$, R beliebig groß, eventuell auch unendlich) konvergieren mag, gestattet die Zerlegung:

$$(32)\qquad \begin{cases} P(x-x_0) = \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu (x-x_0)^\nu + \sum_1^\infty{}^{\nu} a_{-\nu}(x-x_0)^{-\nu} \\ \qquad = \mathfrak{P}(x-x_0) + \mathfrak{Q}(x-x_0), \end{cases}$$

und zwar konvergiert alsdann $\mathfrak{P}(x-x_0)$ für $|x-x_0| < R$, $\mathfrak{Q}(x-x_0)$ für $|x-x_0| > R_0$. Bedeutet dann wiederum x_1 eine beliebige, im Innern des Konvergenzbereiches von $P(x-x_0)$ gelegene, also der Bedingung $R_0 < |x_1-x_0| < R$ genügende Stelle, so hat man:

$$(33)\qquad \begin{cases} \mathfrak{P}(x-x_0) = \mathfrak{P}(x_1-x_0) + \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu!}\mathfrak{P}^{(\nu)}(x_1-x_0)\cdot(x-x_1)^\nu \\ \qquad \text{für: } |x-x_1| < R - |x_1-x_0|, \\ \mathfrak{Q}(x-x_0) = \mathfrak{Q}(x_1-x_0) + \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu!}\mathfrak{Q}^{(\nu)}(x_1-x_0)\cdot(x-x_1)^\nu. \\ \qquad \text{für: } |x-x_1| < |x_1-x_0| - R_0. \end{cases}$$

Wird daher mit ϱ die *kleinere* der beiden positiven Zahlen $R - |x_1-x_0|$ und $|x_1-x_0| - R_0$, bzw. im Falle $R - |x_1-x_0| = |x_1-x_0| - R_0$ *diese* Zahl bezeichnet[1]), so daß also:

$$(34)\qquad \varrho \begin{cases} \leqq R - |x_1-x_0|, \\ \leqq |x_1-x_0| - R_0, \end{cases}$$

so gelten die beiden Formeln (33) für $|x-x_1| < \varrho$ *gleichzeitig*, und man gewinnt daher durch deren Addition mit Berücksichtigung der Beziehung:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}^{(\nu)}(x_1-x_0) + \mathfrak{Q}^{(\nu)}(x_1-x_0) &= D_x^\nu(\mathfrak{P}(x-x_0) + \mathfrak{Q}(x-x_0))_{x=x_1} \\ &= D_x^\nu P(x-x_0)_{x=x_1} = P^{(\nu)}(x_1-x_0) \end{aligned}$$

die Entwicklung:

$$(35)\ P(x-x_0) = P(x_1-x_0) + \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu!} P^{(\nu)}(x_1-x_0)\cdot(x-x_1)^\nu \text{ für: } |x-x_1| < \varrho.$$

Es läßt sich somit schließlich auch eine Reihe von der Form $P(x-x_0)$ gerade so, wie eine solche von der Form $\mathfrak{P}(x-x_0)$, für die Umgebung jeder im Innern ihres Konvergenzbereiches gelegenen Stelle x_1 in eine „*abgeleitete*" Reihe nach *positiven* ganzen Potenzen von $x-x_1$ transformieren, und zwar zum mindesten für alle x im Innern eines um die Stelle x_1 beschriebenen Kreises, welcher bis an die *näher* gelegene der beiden

1) Geometrisch bedeutet also ϱ den Minimalabstand der Stelle x_1 von den Konvergenzgrenzen.

Grenzen $|x - x_0| = R_0$ und $|x - x_0| = R$, eventuell an beide, heranreicht. Dabei enthält die Entwicklungsformel (35) die entsprechenden für $\mathfrak{P}(x-x_0)$ und $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \equiv \mathfrak{Q}(x-x_0)$ gefundene (s. Gl. (33)) als spezielle Fälle und reduziert sich auf je eine dieser beiden, falls $a_\nu = 0$ für $\nu = -1, -2, -3, \ldots$ oder $a_\nu = 0$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$.

4. Da, wie eben gezeigt, aus $P(x-x_0)$ in analoger Weise, wie aus $\mathfrak{P}(x-x_0)$ eine nach *positiven* ganzen Potenzen von $(x-x_1)$ fortschreitende Reihe abgeleitet werden kann, so lassen sich an diese Eigenschaft auch gewisse ganz analoge Folgerungen knüpfen, wie die früher für Reihen von der Form $\mathfrak{P}(x-x_0)$ gefundenen. Insbesondere gilt der Satz von § 44, Nr. 3 (S. 332) betreffend das Maximum und Minimum des Absolutwertes der Reihensumme auch für Reihen von der Form $P(x-x_0)$ (mit dem einzigen Unterschiede, daß hier an die Stelle des *einen* Kreises $|x - x_0| = r$ als Grenzen des fraglichen Bereiches *zwei* Kreise treten: $|x - x_0| = r_0$ und $|x - x_0| = r$, wo $r_0 < r$). Und es gestattet der in § 44, Nr. 5 (S. 334) bewiesene Satz, betreffend die *Gleichheit* zweier Potenzreihen bzw. ihrer Derivierten, unmittelbar die folgende Übertragung:

Konvergieren die beiden Reihen $P_0(x-x_0)$, $P_1(x-x_1)$ gleichzeitig für irgendeinen (zweifach ausgedehnten) Bereich $\mathfrak{B}$ und stimmen ihre Summen überein für (unendlich viele) Stellen in jeder noch so kleinen Umgebung einer im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegenen Stelle a, so findet diese Übereinstimmung für den ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ statt, und das gleiche gilt für alle Derivierten $P_0^{(\nu)}(x-x_0)$, $P_1^{(\nu)}(x-x_1)$.

Um die Richtigkeit dieser Behauptung zu erkennen, hat man nur geradeso, wie a. a. O., durch Transformation von $P_0(x-x_0)$, $P_1(x-x_1)$ in $\mathfrak{P}_0(x-a)$, $\mathfrak{P}_1(x-a)$ die Gültigkeit der Beziehung $P_0(x-x_0) = P_1(x-x_1)$ auf eine gewisse *Umgebung* der Stelle a auszudehnen und für diese die Existenz der Gleichheit $P_0^{(\nu)}(x-x_0) = P_1^{(\nu)}(x-x_1)$ zu erschließen, sodann durch weitere passende Transformationen von $P_0(x-x_0)$, $P_1(x-x_1)$ in abgeleitete Reihen nach *positiven* Potenzen die Gültigkeit jener Beziehungen auf jede beliebige Stelle des Bereiches $\mathfrak{B}$ zu übertragen.

Nimmt man speziell $x_1 = x_0$ und beachtet, daß nach einem früher gefundenen Satze (§ 38, Nr. 7, S. 290) aus der *Gleichheit* $P_0(x-x_0) = P_1(x-x_0)$ für alle Stellen einer Kreislinie $|x - x_0| = r$, bei gleichmäßiger Konvergenz, die *Identität* von $P_0(x-x_0)$ und $P_1(x-x_0)$ resultiert, so ergibt sich mit Benutzung des unmittelbar zuvor abgeleiteten Satzes:

Konvergieren die beiden Reihen $P_0(x-x_0)$, $P_1(x-x_0)$ gleichzeitig für ein gewisses Ringgebiet $\mathfrak{B}$ mit dem Mittelpunkte x_0 und stimmen ihre Summen überein für (unendlich viele) Stellen in jeder

noch so kleinen Umgebung einer im Innern von $\mathfrak{B}$ *gelegenen Stelle a, so sind sie identisch.*

Hieraus folgt als spezieller Fall, indem man $P_1(x-x_0)$ auf eine Konstante A (endlich oder Null) reduziert:

Nimmt die Reihe $P(x-x_0)$ für Stellen in jeder Nähe einer im Innern des Konvergenzbereiches gelegenen Stelle einen gewissen Wert A an, so besitzt sie durchweg den Wert A, d. h. sie reduziert sich in Wahrheit auf das einzige Glied A.[1])

Hiernach kann eine Reihe $P(x-x_0)$, die sich nicht auf eine Konstante reduziert, in jedem abgeschlossenen, vollständig dem *Innern* des Konvergenzgebietes angehörigen Bereiche *keinen* Wert *unendlich oft* annehmen.

Kapitel V.

Begriff und allgemeine Eigenschaften der monogenen analytischen Funktion einer Veränderlichen.

§ 47. Definition der monogenen analytischen Funktion einer Veränderlichen. — Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit. — Regularitäts- und Existenzbereich.

1. Es sei die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x|x_0)$ konvergent für $|x-x_0|<R_0$ und es existiere irgendeine aus $\mathfrak{P}(x|x_0)$ abgeleitete Reihe $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1)$, deren Konvergenzkreis $(x_1)R_1$ über denjenigen von $\mathfrak{P}(x|x_0)$ hinausragt. Die Summenwerte von $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1)$ stimmen dann nach § 45, Nr. 1 (S. 339) für alle Stellen x des beiden Kreisen *gemeinsamen* Gebietes mit denjenigen von $\mathfrak{P}(x|x_0)$ überein und schließen sich für die benachbarten Stellen des neu hinzutretenden Konvergenzbereiches *stetig* an die ersteren an. Es definieren somit die beiden Reihen $\mathfrak{P}(x|x_0)$ und $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1)$ *zusammen* für das *Innere* des aus den *beiden* (sich teilweise überdeckenden) Kreisen $(x_0)R_0$ und $(x_1)R_1$ zusammengesetzten Bereiches eine *eindeutige, endliche und stetige Funktion* $f(x)$, die überdies *Derivierte* (also auch *Differentialquotienten*) jeder Ordnung besitzt.

Man bezeichnet $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1)$ als eine *analytische Fortsetzung* von $\mathfrak{P}(x|x_0)$. Jede analytische Fortsetzung von $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1)$ gilt sodann auch als analytische Fortsetzung von $\mathfrak{P}(x|x_0)$. Auf Grund dieser Festsetzung geben wir die folgende Definition:

---

1) Selbstverständlich umfaßt diese Aussage auch den Fall, daß in $P(x-x_0)$ die eine Kategorie von Potenzen nur in endlicher Anzahl vorkommt oder gänzlich fehlt.

Unter einer analytischen Funktion verstehen wir eine Reihe von der Form $\mathfrak{P}(x|x_0)$ *mit allen möglichen analytischen Fortsetzungen.*

Jede der in diesem Zusammenhange vorkommenden Potenzreihen heißt ein *Element* der betreffenden analytischen Funktion, $\mathfrak{P}(x|x_0)$ insbesondere das *primitive* Element. Da von *irgend zwei* Elementen *jedes* aus dem anderen *ableitbar* ist, so ist ersichtlich, daß *jedes* Element die Rolle des *primitiven* übernehmen kann. Daraus folgt:

Die analytische Funktion ist durch jedes beliebige ihrer Elemente in ihrem ganzen Verlaufe bestimmt.

Um dieses Herauswachsen der Funktion aus irgend *einem* ihrer Elemente zu charakterisieren, wird sie nach dem Vorgange von *Weierstraß* nach Bedarf noch ausdrücklich mit dem Beiwort *monogen* (= aus *einem* Elemente erzeugt) bezeichnet.

2. Die bei der obigen Definition der *analytischen Funktion* zugelassenen unbegrenzten Möglichkeiten der analytischen Fortsetzung lassen sofort erkennen, daß eine solche Funktion *eindeutig, mehrdeutig,* sogar *unendlich vieldeutig* sein kann. Um diese Begriffe etwas genauer zu fixieren, wollen wir zunächst annehmen, die Veränderliche x werde auf einen zusammenhängenden, von einer oder mehreren geschlossenen Kurven begrenzten, endlichen Bereich $\mathfrak{B}$ beschränkt (z. B. einen Kreis, ein Rechteck; oder auch einen Kreisring, ein Rechteck, aus dessen Innerem mehrere Stücke durch Kreise ausgeschlossen sind). Es sei dann x_0 irgend ein in $\mathfrak{B}$ gelegener Punkt, $\mathfrak{P}(x|x_0)$ eine in der Umgebung von x_0 konvergierende Potenzreihe, die innerhalb $\mathfrak{B}$ mit Hilfe der Zwischenpunkte $x_1, x_2, \ldots, x_m$ bis zu einem Punkte x' fortgesetzt, also in $\mathfrak{P}(x|x_0, x_1, \ldots, x_m, x')$ übergeführt sein mag. Denkt man sich die Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_m, x'$ durch eine vollständig im Innern von $\mathfrak{B}$ verlaufende gebrochene Linie $\mathfrak{L}$ verbunden, so soll gesagt werden, es sei $\mathfrak{P}(x|x_0)$ *längs des Weges* oder *auf dem Wege* $\mathfrak{L}$ bis zur Stelle x' fortgesetzt, d. h. in eine Reihe nach positiven Potenzen von $(x - x')$ transformiert worden. Nun werde diese letztere Reihe auf einem *anderen,* etwa über Punkte $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ führenden Wege $\mathfrak{L}'$ wieder zur Stelle x_0 zurückgeführt, so daß also als Endergebnis eine Reihe von der Form $\mathfrak{P}_1(x|x_0) \equiv \mathfrak{P}(x|x_0, x_1, \ldots x_m, x', x'_1, \ldots x'_n, x_0)$ erscheint, die durch sukzessive analytische Fortsetzung längs des *geschlossenen* Weges $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'$ aus $\mathfrak{P}(x|x_0)$ hervorgegangen ist. Dann liegt zunächst *keinerlei* Grund zu der Annahme vor, daß $\mathfrak{P}_1(x|x_0)$ mit $\mathfrak{P}(x|x_0)$ *identisch* sein müsse. Denn der *maßgebende* Grund, der bei einer früheren Betrachtung ähnlicher Art (s. § 45, Nr. 2, S. 340) zu einem derartigen Schluß führte, bestand darin, daß bei dem ganzen Ableitungsprozeß das Innere des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}(x|x_0)$ niemals verlassen wurde und infolge-

dessen der Summenwert von $\mathfrak{P}(x|x_0)$ als wirksames *tertium comparationis* beständig zur Verfügung stand. In dem vorliegenden Zusammenhange wird man dagegen im allgemeinen darauf rechnen müssen, daß $\mathfrak{P}_1(x|x_0)$ von $\mathfrak{P}(x|x_0)$ *verschieden* ausfällt (wie übrigens durch Beispiele einfachster Art, deren Behandlung indessen an dieser Stelle den Stand unserer Hilfsmittel überschreiten würde, sich leicht bestätigen ließe). Wird dann $\mathfrak{P}_1(x|x_0)$ wiederum längs des geschlossenen Weges $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'$ analytisch fortgesetzt, so *muß* die auf diese Weise zum Vorschein kommende, etwa mit $\mathfrak{P}_2(x|x_0)$ zu bezeichnende Reihe (wie man unmittelbar durch Rücktransformation längs des Weges $\mathfrak{L}' + \mathfrak{L}$ erkennt) von $\mathfrak{P}_1(x|x_0)$ und *kann* überdies auch von $\mathfrak{P}(x|x_0)$ *verschieden* sein. Da diese Schlußweise sich unbegrenzt fortsetzen läßt, so gewinnt man hiernach die Vorstellung von dem Zustandekommen einer *unendlich-vielwertigen* oder *vieldeutigen* analytischen Funktion $f(x)$, deren Werte in der Umgebung von x_0 außer durch das primitive Funktionselement $\mathfrak{P}(x|x_0)$ durch eine unbegrenzte Folge weiterer Funktionselemente: $\mathfrak{P}_1(x|x_0)$, $\mathfrak{P}_2(x|x_0)$, ... dargestellt werden.

Es besteht aber auch die Möglichkeit, daß bei dem angegebenen Verfahren in der Folge der aus $\mathfrak{P}(x|x_0)$ sukzessive entstehenden Funktionselemente $\mathfrak{P}_1(x|x_0)$, $\mathfrak{P}_2(x|x_0)$, ... ein bereits einmal dagewesenes schließlich *wiederkehrt*. In diesem Falle kann übrigens das *erste* überhaupt wiederkehrende Element kein anderes sein, als das primitive Element $\mathfrak{P}(x|x_0)$. Da nämlich jeder einzelne der in Frage kommenden Fortsetzungsprozesse umkehrbar ist (vgl. § 45, Nr. 2, S. 340), so sind durch jedes einzelne Element nicht nur alle folgenden, sondern auch alle vorhergehenden vollständig bestimmt. Es kann also ein bereits einmal vorgekommenes Element $\mathfrak{P}_\nu(x|x_0)$ nicht wiederkehren, bevor nicht alle seine Vorgänger gleichfalls wiedergekehrt sind, es muß also insbesondere $\mathfrak{P}(x|x_0)$ wiedergekehrt sein, ehe irgend eine der $\mathfrak{P}_\nu(x|x_0)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ wiederkehren kann: in der Tat ist ja auch $\mathfrak{P}(x|x_0)$ das einzige Funktionselement, über dessen Vorgänger noch nicht verfügt ist. Tritt also der in Frage stehende Fall ein, so wird auch bei unbegrenzter Wiederholung der analytischen Fortsetzung längs des geschlossenen Weges $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'$ ein bestimmter *Zyklus* von Funktionselementen, etwa deren m: $\mathfrak{P}(x|x_0)$, $\mathfrak{P}_1(x|x_0)$, ... $\mathfrak{P}_{m-1}(x|x_0)$ beständig wiederkehren. Und wenn nicht etwa *andere* in $\mathfrak{B}$ verlaufende geschlossene Wege vorhanden sind, welche eine noch *höhere* Vielwertigkeit erzeugen, so werden wir sagen, daß das Funktionselement $\mathfrak{P}(x|x_0)$ im Innern des Bereiches $\mathfrak{B}$ eine daselbst *m-deutige (endlich-vieldeutige)* analytische Funktion erzeuge.

Es bleibt schließlich noch der Fall übrig, daß die analytische Fortsetzung von $\mathfrak{P}(x|x_0)$ über den geschlossenen Weg $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'$ schon nach dem

ersten Umlauf wieder mit $\mathfrak{P}(x|x_0)$ endigt. Dann könnten freilich *andere* in $\mathfrak{B}$ verlaufende geschlossene Wege zu anderen Ergebnissen führen. Wird aber angenommen, daß für *jeden* von x_0 ausgehenden und in $\mathfrak{B}$ verlaufenden geschlossenen Weg das nämliche Resultat zum Vorschein kommt, so erkennt man leicht, daß dann die im Bereiche $\mathfrak{B}$ erzeugte Funktion nicht nur für eine gewisse Umgebung der Stelle x_0, sondern im ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ als *eindeutige* verläuft. Wird nämlich eine Stelle x' ganz beliebig im Innern von $\mathfrak{B}$ angenommen und geht etwa $\mathfrak{P}(x|x_0)$ bei Fortsetzung längs irgendeines von x_0 nach x' führenden Weges in $\mathfrak{P}_1(x|x')$ über, so wird bei weiterer Fortsetzung über einen ganz *beliebigen* in $\mathfrak{B}$ wieder nach x_0 führenden Weg $\mathfrak{L}'$, der mit $\mathfrak{L}$ zusammen einen geschlossenen Weg von x_0 zu x_0 bildet, $\mathfrak{P}_1(x|x')$ wieder in $\mathfrak{P}(x|x_0)$ übergeführt werden. Dann folgt aber wiederum aus der Umkehrbarkeit der dabei beteiligten Ableitungsprozesse, daß umgekehrt $\mathfrak{P}(x|x_0)$ auch bei Fortsetzung längs des Weges $\mathfrak{L}'$ in $\mathfrak{P}_1(x|x')$ übergehen muß. Das zu einer beliebigen Stelle x' gehörige Funktionselement ist also ein vom Fortsetzungswege völlig unabhängiges, *eindeutig* bestimmtes, die durch das Funktionselement $\mathfrak{P}(x|x_0)$ definierte analytische Funktion verläuft also bei Beschränkung auf den Bereich $\mathfrak{B}$ durchaus *eindeutig.*

3. Läßt man jetzt die der Veränderlichen x auferlegte Beschränkung auf den Bereich $\mathfrak{B}$ fallen, so können bei weiterer analytischer Fortsetzung naturgemäß noch *Steigerungen* einer bereits vorhandenen *Vieldeutigkeit* der aus dem Anfangselemente $\mathfrak{P}(x|x_0)$ erzeugten analytischen Funktion $f(x)$ eintreten. Erweist sich insbesondere eine bei der ursprünglichen Beschränkung auf den Bereich $\mathfrak{B}$ *eindeutig* verbliebene Funktion nunmehr bei Ausdehnung der analytischen Fortsetzung als *mehrdeutig,* so sagt man das Element $\mathfrak{P}(x|x_0)$ mit seinen auf den Bereich $\mathfrak{B}$ beschränkten Fortsetzungen stelle daselbst einen *eindeutigen Zweig* einer (endlich oder unendlich) *vieldeutigen* analytischen Funktion $f(x)$ dar. Bleibt dagegen, *soweit überhaupt eine analytische Fortsetzung möglich ist,* die *Eindeutigkeit* zunächst in dem Sinne erhalten, daß das primitive Element $\mathfrak{P}(x|x_0)$ bei analytischer Fortsetzung auf jedem überhaupt möglichen geschlossenen Wege immer wieder in sich selbst übergeführt wird, so ist die betreffende analytische Funktion, soweit sie überhaupt existiert, auf Grund des am Schlusse der vorigen Nummer Gesagten schlechthin eine *eindeutige,* derart, daß für jede Stelle x', nach welcher eine analytische Fortsetzung überhaupt möglich ist, nur ein *einziges,* vom Fortsetzungswege völlig unabhängiges Funktionselement existiert.

4. Wir bezeichnen jede *eindeutige* Funktion $f(x)$ oder einen gewissen *eindeutigen Bestandteil („Zweig“)* einer *mehrdeutigen* Funktion $f(x)$ (und zwar gleichgültig, ob $f(x)$ von vornherein als *analytische* Funktion oder

aber in anderer Weise, z. B. durch einen *arithmetischen Ausdruck* definiert ist) als *regulär*[1]) für $x = x'$ oder an der Stelle x' wenn der Wertvorrat von $f(x)$ bzw. ein bestimmter Teil desselben für $x = x'$ und eine gewisse *Umgebung* $|x - x'| < \varrho$ in der Form $\mathfrak{P}(x|x')$ darstellbar ist. Die Stelle x' heißt sodann eine Stelle *regulären Verhaltens* oder auch kürzer eine *reguläre* Stelle für die Funktion $f(x)$ bzw. einen gewissen *Zweig* der Funktion $f(x)$. Um diese Bezeichnung in angemessener Weise auf die Stelle $x = \infty$ auszudehnen, hat man zu beachten, daß auf Grund unserer früheren Festsetzungen unter $f(\infty)$ die Funktion $f\left(\frac{1}{y}\right)$ für $y = 0$ zu verstehen ist, deren *reguläres* Verhalten andererseits eine Darstellbarkeit in der Form $\mathfrak{P}(y)$ etwa für $|y| < \varrho$ verlangt. Danach betrachten wir als definierende Eigenschaft des *regulären* Verhaltens von $f(x)$ für $x = \infty$ eine Darstellbarkeit in der Form $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ etwa für $|x| > R = \frac{1}{\varrho}$.[2])

Die Gesamtheit der Stellen x' (mit eventuellem Einschluß der Stelle ∞), an welchen eine *analytische* Funktion $f(x)$ sich *regulär* verhält, muß auf Grund der oben beschriebenen Entstehungsweise einer *analytischen* Funktion aus irgend einem ihrer *Elemente* stets einen *zusammenhängenden*, die x-Ebene oder auch nur einen Teil derselben *ein-* oder *mehrfach überdeckenden Bereich* bilden, den wir als den *Regularitätsbereich* von $f(x)$ bezeichnen.

Es wird sich später zeigen, daß der *Regularitätsbereich* einer *analytischen* Funktion $f(x)$, die sich nicht auf eine bloße *Konstante* reduziert, *nicht alle* Stellen x einschließlich $x = \infty$ umfassen kann, also stets *begrenzt* sein muß. Die *Grenzen* des *Regularitätsbereiches* können offenbar nur aus Punkten bestehen, welche den *Konvergenzgrenzen* der Funktionselemente angehören oder *Häufungsstellen* von solchen Punkten sind: denn jede Stelle *im Innern* des Konvergenzkreises eines Funktionselementes ist ja für $f(x)$ eine *reguläre* Stelle. Im Gegensatz hierzu bezeichnen wir jede Stelle a auf der *Grenze* des *Regularitätsbereiches* als eine *singuläre*. Aus dem Gesagten geht hervor, daß *in beliebiger Nähe* jeder *singulären* Stelle a stets auch (unendlich viele) Stellen x' *regulären* Verhaltens liegen müssen und daß andererseits keine für eine gewisse Umgebung von a konvergierende Reihe $\mathfrak{P}(x - a)$ existiert, derart, daß für die mit x' bezeichneten Stellen die Beziehung $f(x') = \mathfrak{P}(x' - a)$ besteht. Nichtsdestoweniger kann $f(x)$ (genauer gesagt, eine *eindeutige* Funktion $f(x)$ bzw. ein oder mehrere bestimmte *Zweige*[3])

1) Nach dem Vorgange französischer Mathematiker bedienen sich viele Autoren in dem gleichen Sinne der Bezeichnung *holomorph*.

2) Eine *notwendige* Bedingung für dieses *reguläre* Verhalten besteht dann offenbar in der *Beschränktheit* von $|f(x)|$ für $|x| > R$

3) *Andere* Zweige von $f(x)$ können sich sogar für $x = a$ *regulär* verhalten.

einer *mehrdeutigen* Funktion $f(x)$) für $x = a$ noch vollkommen *definiert* sein, sofern sich unter den erzeugenden Funktionselementen solche befinden, die für $x = a$ noch *konvergieren*. Da $f(x)$ an solchen Stellen noch *existiert*, so bezeichnen wir den *Regularitätsbereich* mit *Einschluß* dieser *Grenzstellen* als den *Existenzbereich* von $f(x)$.[1])

Im übrigen kann der *Regularitätsbereich* einer *analytischen Funktion* die *unendliche* x-Ebene *mit Ausschluß* eines einzigen Punktes, einer endlichen oder abzählbaren Menge von Punkten, sowie irgend welcher nicht abzählbaren Punktmengen (z. B. Linien, Flächenstücke) umfassen oder auch auf ein *endliches*, vollständig begrenztes Flächenstück beschränkt sein. Die *analytische Funktion existiert* allemal nur *im Innern* des Regularitätsbereiches *mit Hinzunahme* der oben näher bezeichneten *Grenzstellen*.

5. Beispiele verschiedener Art für die vorstehend angedeuteten Möglichkeiten werden sich im Laufe der weiteren Untersuchungen ergeben. Hier soll nur auf je einen besonders einfachen Typus von analytischen Funktionen hingewiesen werden, welcher geeignet erscheint, das Vorkommen eines *unendlich großen* und eines *endlichen* Regularitätsbereiches zu veranschaulichen. Es handelt sich dabei um solche analytische Funktionen, welche für *alle* Stellen ihres Regularitätsbereiches in der *denkbar einfachsten* Weise, nämlich durch ein *einziges* Funktionselement *vollständig* dargestellt werden, was offenbar dann und nur dann der Fall ist, wenn das *primitive* Funktionselement entweder *beständig konvergiert* oder aber über einen bestimmten *endlichen* Konvergenzkreis *überhaupt nicht fortgesetzt werden kann*.

Ein Beispiel der ersten Art liefert die beständig konvergierende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x) \equiv \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu!} x^{\nu}$. Der Regularitätsbereich besteht hier aus der ganzen x-Ebene mit einzigem Ausschluß der Stelle $x = \infty$, welche sicher eine *singuläre* ist[2]), da $|\mathfrak{P}(x)|$ (nach § 38, Nr. 1, S. 282) für hinlänglich große $|x|$ unter anderen Werten auch *beliebig große* annimmt. Funktionen dieser Kategorie werden als *ganze transzendente* Funktionen bezeichnet (die sich auf *ganze rationale* reduzieren, wenn das definierende Funktionselement bei einem bestimmten Gliede *abbricht*).

Wir betrachten zweitens die für $|x| < 1$ konvergierende Reihe:

$$\mathfrak{P}(x) \equiv \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} x^{2^{\nu}}.$$

---

1) Man pflegt sogar auch noch solche *Grenzstellen* dem *Existenzbereich* zuzurechnen, an welchen $f(x)$ der (uneigentliche) Wert ∞ beizulegen ist, also $f(x)$ als *„uneigentlich“ definiert* angesehen wird (vgl. § 15, Nr. 3, Gl. (9), (9a), S. 144; § 57, Nr. 2 im Anschluß an Gl. (5) und (7), S. 430.

2) Vgl. Fußnote 2 auf der vorigen Seite.

Da dieselbe für $x = 1$ nach $+\infty$ divergiert, so hat man nach dem Satze von § 32, Nr. 6 (S. 258) bei reellen, positiv wachsenden Werten von $\varrho : \lim\limits_{\varrho \to 1} \mathfrak{P}(\varrho) = +\infty$, mithin wird $\mathfrak{P}(\varrho)$ für hinlänglich große Werte von $\varrho < 1$ *beliebig groß.*[1]) Daraus folgt aber, daß der Konvergenzkreis *keiner* aus $\mathfrak{P}(x)$ direkt ableitbaren Reihe die Stelle $x = 1$ *im Innern* enthalten kann. Die Stelle $x = 1$ ist also eine *singuläre* für diejenige *analytische Funktion* $f(x)$, welche durch das Funktionselement $\mathfrak{P}(x)$ definiert wird.

Setzt man ferner:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_0^{n-1}{}_\nu x^{2^\nu} + \sum_n^\infty{}_\nu x^{2^\nu}$$

$$= \mathfrak{P}_n(x) + \mathfrak{R}_n(x),$$

so folgt zunächst:

$$|\mathfrak{P}(x)| \geqq |\mathfrak{R}_n(x)| - |(\mathfrak{P}_n(x))|$$

$$\geqq |\mathfrak{R}_n(x)| - n \qquad (\text{für } |x| \leqq 1).$$

Da aber:

$$\mathfrak{R}_n(x) = \sum_0^\infty{}_\nu x^{2^{n+\nu}} = \sum_0^\infty{}_\nu (x^{2^n})^{2^\nu},$$

so erkennt man, daß $\mathfrak{R}_n(x)$ und folglich auch $|\mathfrak{P}(x)|$ nach $+\infty$ divergiert, falls $x^{2^n} = 1$, d. h. für die 2^n Werte x, welche die Wurzeln dieser Gleichung bilden und die, wie früher gezeigt wurde (s. § 34, Nr. 5, S. 267), durch 2^n äquidistante Punkte auf dem Einheitskreise repräsentiert werden. Aus der zuvor benützten Schlußweise folgt dann, daß *jede* dieser 2^n Stellen (unter denen auch die Stelle $x = 1$ enthalten ist) eine *singuläre* für $f(x)$

---

1) Dies läßt sich auch in folgender Weise direkt verifizieren. Man hat (nach I_1, § 33, S. 199, Ungl. (10)) für jedes noch so große ν:

$$\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu < e, \quad \text{also} \quad \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\nu}}\right)^\nu > \frac{1}{e}.$$

Nun ist für jedes noch so große n und $\varrho < 1$:

$$\mathfrak{P}(\varrho) > \sum_0^n{}_\nu \varrho^{2^\nu} > (n+1) \cdot \varrho^{2^n}.$$

Setzt man jetzt:

$$\varrho \geqq \frac{1}{1 + \frac{1}{2^n}} \ (\text{zugleich} < 1),$$

so wird:

$$\mathfrak{P}(\varrho) > \frac{n+1}{e},$$

also durch die Wahl von n *beliebig groß.*

sein muß. Da es aber freisteht n unbegrenzt zu *vergrößern*, so ergibt sich schließlich, daß *in beliebiger Nähe jeder* auf dem Einheitskreise willkürlich angenommenen Stelle solche *singuläre* Stellen liegen müssen. Infolgedessen erscheint aber die Möglichkeit, $\mathfrak{P}(x)$ über den Einheitskreis analytisch fortzusetzen definitiv *ausgeschlossen*: das Funktionselement $\mathfrak{P}(x)$ definiert die mit $f(x)$ bezeichnete *analytische Funktion vollständig*, insofern diese letztere außerhalb des Einheitskreises *überhaupt nicht existiert*.

Das gleiche gilt übrigens auch für die Potenzreihe:

$$\mathfrak{Q}(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{2^\nu} x^{2^\nu},$$

welche gleichfalls den Konvergenzradius 1 besitzt (wegen: $\lim_{\nu \to \infty} \sqrt[2^\nu]{2^\nu} = 1$), sich von der zuvor betrachteten Reihe jedoch dadurch unterscheidet, daß sie auf dem ganzen Einheitskreise noch absolut und gleichmäßig konvergiert, also daselbst eine noch endlich und stetig bleibende Funktion definiert. Wäre nämlich die Reihe $\mathfrak{Q}(x)$ über den Einheitskreis fortsetzbar, so müßte dies gleichfalls für ihre Derivierte $\mathfrak{Q}'(x)$, also auch für $x \cdot \mathfrak{Q}'(x)$ gelten, was aber auf Grund des zuvor gefundenen Ergebnisses nicht der Fall ist, da ja:

$$x \cdot \mathfrak{Q}'(x) = \sum_0^\infty {}^\nu x^{2^\nu} = \mathfrak{P}(x).$$

§ 48. Analytischer Charakter einer in einem zusammenhängenden Bereiche eindeutig definierten Funktion regulären Verhaltens.

1. Es sei eine Funktion $\varphi(x)$ für jede Stelle im Innern eines aus einem oder mehreren (im einzelnen) zusammenhängenden Stücken bestehenden Bereiches $\mathfrak{B}$ *eindeutig definiert*[1]) und *regulären Verhaltens*, so daß also für eine gewisse Umgebung jeder im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegenen Stelle x_0 eine Beziehung von der Form:

$$(1) \qquad \varphi(x) = \mathfrak{P}_0(x \mid x_0) \qquad (\text{etwa für } |x - x_0| < r_0)$$

besteht. Dann soll $\mathfrak{P}_0(x \mid x_0)$ das *zur Stelle x_0 gehörige Funktionselement* von $\varphi(x)$ heißen.

Hat das zu einer anderen Stelle x_1 gehörige Funktionselement:

$$(2) \qquad \varphi(x) = \mathfrak{P}_1(x \mid x_1) \qquad (\text{etwa für } |x - x_1| < r_1)$$

ein Stück seines Geltungsbereiches mit demjenigen von $\mathfrak{P}_0(x \mid x_0)$ gemein,

1) z. B. in der Weise, daß $\varphi(x)$ einen *arithmetischen Ausdruck* mit den fraglichen Eigenschaften bedeutet.

so nennen wir die Funktionselemente $\mathfrak{P}_0(x\,|\,x_0)$ und $\mathfrak{P}_1(x\,|\,x_1)$ *zusammenhängend*. Und wir bezeichnen die Funktionselemente:

$$\mathfrak{P}_0(x\,|\,x_0),\ \mathfrak{P}_1(x\,|\,x_1),\ \ldots\ \mathfrak{P}_n(x\,|\,x_n)$$

als eine *Folge zusammenhängender* Funktionselemente, wenn *jedes* mit dem *folgenden* zusammenhängt. Da sodann für je zwei konsekutive Glieder dieser Folge $\mathfrak{P}_\nu(x\,|\,x_\nu)$, $\mathfrak{P}_{\nu+1}(x\,|\,x_{\nu+1})$ ein gewisser Bereich existiert, in welchem:

$$\varphi(x)\begin{cases} = \mathfrak{P}_\nu(x\,|\,x_\nu) \\ = \mathfrak{P}_{\nu+1}(x\,|\,x_{\nu+1}), \end{cases}$$

so sind sie nach dem Satze von § 45, Nr. 3 (S. 342) aus einander *ableitbar*. Daraus folgt schließlich, daß unter den gemachten Voraussetzungen $\mathfrak{P}_n(x\,|\,x_n)$ aus $\mathfrak{P}_0(x\,|\,x_0)$ abgeleitet werden kann und umgekehrt, oder noch allgemeiner ausgesprochen:

Hat man eine Folge zusammenhängender Funktionselemente, so ist jedes derselben aus jedem anderen ableitbar.

Es gilt aber auch der umgekehrte Satz:

Leitet man aus irgend einem Funktionselemente $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ von $\varphi(x)$ sukzessive die Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_0(x\,|\,x_0, x_1),\ \mathfrak{P}_0(x\,|\,x_0, x_1, x_2),\ \ldots\ \mathfrak{P}_0(x\,|\,x_0, x_1, \ldots x_n)$$

in der Weise ab, daß jede Stelle $x_{\nu+1}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$ innerhalb des Geltungsbereichs der Beziehung $\varphi(x) = \mathfrak{P}_0(x|x_0, x_1, \ldots, x_\nu)$ liegt, so sind dieselben identisch mit der Folge zusammenhängender Funktionselemente von $\varphi(x)$:

$$\mathfrak{P}_1(x\,|\,x_1),\quad \mathfrak{P}_2(x\,|\,x_2),\quad \ldots\ \mathfrak{P}_n(x\,|\,x_n).$$

Denn aus

$$\varphi(x) = \mathfrak{P}_0(x\,|\,x_0)$$

und

$$\mathfrak{P}_0(x\,|\,x_0, x_1) = \mathfrak{P}_0(x\,|\,x_0)$$

folgt zunächst:

$$\mathfrak{P}_0(x\,|\,x_0, x_1) = \varphi(x)$$

(für eine gewisse Umgebung von x_1). Da aber andererseits:

$$\varphi(x) = \mathfrak{P}_1(x\,|\,x_1)$$

so folgt weiter:

$$\mathfrak{P}_0(x\,|\,x_0, x_1) \equiv \mathfrak{P}_1(x\,|\,x_1) \quad \text{usf.}$$

2. Der Radius r_0, für welchen die Beziehung (1) besteht, hat für jede Stelle x_0 eine bestimmte, mit x_0 im allgemeinen veränderliche *obere Grenze*, welche mit $r(x_0)$ bezeichnet werden möge und der zum Funktionselement $\mathfrak{P}_0(x\,|\,x_0)$ gehörige *Geltungsradius* heißen soll. Dieser *Geltungsradius* kann offenbar *keinesfalls größer*, möglicherweise aber *kleiner* sein, als der *Kon-*

vergenzradius von $\mathfrak{P}_0(x \mid x_0)$. Das letztere ist sicher dann der Fall, wenn der Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}_0(x \mid x_0)$ über den mit $\mathfrak{B}$ bezeichneten Bereich hinausragt, da ja die Definition von $\varphi(x)$ sich ausschließlich auf das Innere von $\mathfrak{B}$ erstreckt. Sonst aber fallen, wie sich sogleich ergeben wird, beide Radien zusammen. Zunächst zeigen wir folgendes:

Der Geltungsradius $r(x_0)$ ist im Innern von $\mathfrak{B}$ bei veränderlichem x_0 eine stetige Funktion von x_0.

Beweis. Es bedeute x_1 irgend eine innerhalb des Kreises (x_0), $r(x_0)$ liegende Stelle, so kann man aus $\mathfrak{P}_0(x \mid x_0)$ eine Reihe $\mathfrak{P}_0(x \mid x_0, x_1)$ ableiten, und man hat sodann:

(3) $\quad \varphi(x) = \mathfrak{P}_0(x \mid x_0, x_1)$ *zum mindesten* für: $|x - x_1| < r(x_0) - |x_0 - x_1|$.

Andererseits hat man nach Voraussetzung:

$$\varphi(x) = \mathfrak{P}_1(x \mid x_1) \quad \text{für: } |x - x_1| < r(x_1), \tag{4}$$

und da die Reihen $\mathfrak{P}_0(x \mid x_0, x_1)$ und $\mathfrak{P}_1(x \mid x_1)$ identisch sein müssen, so folgt, daß:

$$r(x_1) \geqq r(x_0) - |x_0 - x_1|. \tag{5}$$

Nimmt man nun x_1 von vornherein so an, daß:

$$|x_0 - x_1| < \tfrac{1}{2} r(x_0),$$

so lehrt Ungl. (5), daß:

$$r(x_1) > \tfrac{1}{2} r(x_0).$$

Daraus geht hervor, daß x_0 sicher *im Innern* des Kreises (x_1), $r(x_1)$ liegt. Infolgedessen läßt sich in derselben Weise, wie die Ungleichung (5), die mit dieser analoge Beziehung erschließen:

$$r(x_0) \geqq r(x_1) - |x_1 - x_0|. \tag{6}$$

Aus der Zusammenfassung von (5) und (6) ergibt sich sodann:

$$-|x_0 - x_1| \leqq r(x_1) - r(x_0) \leqq |x_1 - x_0|,$$

und daher:

$$|r(x_1) - r(x_0)| \leqq |x_1 - x_0|,$$

so daß also $|r(x_1) - r(x_0)|$ gleichzeitig mit $|x_1 - x_0|$ *beliebig klein* wird. Somit ist in der Tat $r(x)$ im Innern des Bereiches $\mathfrak{B}$ eine (positive) *stetige* Funktion von x.

3. Sei jetzt wiederum

$$\varphi(x) = \mathfrak{P}_0(x \mid x_0) \tag{7}$$

für eine gewisse dem Bereiche $\mathfrak{B}$ angehörige Umgebung der Stelle x_0. Ferner sei x' eine ganz *beliebige* Stelle im Innern des *Konvergenz*bereiches von $\mathfrak{P}_0(x \mid x_0)$ und eines die Stelle x_0 enthaltenden zusammenhängenden Stückes $\mathfrak{B}'$ des Bereiches $\mathfrak{B}$. Dann soll gezeigt werden, daß die Beziehung

(7) sich auch auf die Stelle $x = x'$ erstreckt. Verbindet man x_0 und x' durch einen im Bereiche $\mathfrak{B}'$ verlaufenden Streckenzug, so gehört zu jedem seiner Punkte ein bestimmtes Funktionselement und die *Geltungs*radien aller dieser Funktionselemente müssen infolge der eben bewiesenen Stetigkeit ein gewisses *von Null verschiedenes Minimum* r haben. Wird dann $\varrho < r$ angenommen und schaltet man auf dem Streckenzuge $\overline{x_0 x'}$ Punkte $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ so ein, daß: $|x_\nu - x_{\nu-1}| \leqq 2\varrho$ (für $\nu = 1, 2, \ldots n$ und $x_n \equiv x'$), so bilden die Funktionselemente

$$\mathfrak{P}_0(x\,|\,x_0),\ \mathfrak{P}_1(x\,|\,x_1).\ \ldots\ \mathfrak{P}_{n-1}(x\,|\,x_{n-1}),\ \mathfrak{P}_n(x\,|\,x')$$

eine *zusammenhängende* Folge, da ja der *Geltungs*radius jedes einzelnen Funktionselements *größer* als ϱ ist, mithin je zwei konsekutive Funktionselemente ein Stück gemeinsamen Konvergenzbereiches besitzen. Infolgedessen ist $\mathfrak{P}_n(x\,|\,x')$ (d. h. das zur Stelle x' gehörige Funktionselement von $\varphi(x)$ aus $\mathfrak{P}_0(x\,|\,x_0)$ *ableitbar* und, da $\mathfrak{P}_0(x\,|\,x_0)$ noch für $x = x'$ konvergiert, an der Stelle x' mit $\mathfrak{P}_0(x\,|\,x_0)$ *gleichwertig*, so daß also, wie behauptet:

$$\varphi(x') = \mathfrak{P}_0(x'\,|\,x_0).$$

Somit findet man:

> *Der Geltungsbereich jedes einzelnen Funktionselementes $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ erstreckt sich auf den gesamten Konvergenzbereich der betreffenden Potenzreihe, soweit derselbe dem Innern eines die Stelle x_0 enthaltenden zusammenhängenden Stückes von $\mathfrak{B}$ angehört. Wenn also dieser Konvergenzbereich nicht über $\mathfrak{B}$ hinausragt, so sind Geltungs- und Konvergenzradius identisch.*

Dieses zunächst unter der Voraussetzung abgeleitete Resultat, daß es sich um Funktionselemente der Form $\mathfrak{P}(x\,|\,x_0)$, also mit im *Endlichen* gelegenem x_0 handelt, läßt sich durch die Substitution $x = \frac{1}{y}$ ohne weiteres auch auf den Fall übertragen, daß $\varphi(x)$ im *Unendlichen* durch ein Funktionselement von der Form $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ dargestellt wird.

4. Die soeben benutzte Beweismethode liefert noch ein weiteres, für die Folge als fundamental anzusehendes Resultat.

Es sei jetzt $\mathfrak{B}$ ein *zusammenhängender*, also aus *einem einzigen Stücke* bestehender, übrigens beliebig begrenzter Bereich, den wir vorläufig als *endlich* annehmen wollen. Im Inneren von $\mathfrak{B}$ sei dann wiederum $\varphi(x)$ *eindeutig definiert* und für jede einzelne Stelle *regulär*. Sind dann x_0, x' zwei ganz beliebige im Innern von $\mathfrak{B}$ angenommene Stellen, $\mathfrak{P}_0(x\,|\,x_0)$ und $\mathfrak{P}(x\,|\,x')$ die zugeordneten Funktionselemente, so läßt sich auf dieselbe Art wie in Nr. 3 zeigen, daß dieselben *auseinander ableitbar* sind.

Man gewinnt somit den folgenden *Hauptsatz:*

Eine im Innern eines beliebigen, im Endlichen gelegenen, zusammenhängenden Bereiches $\mathfrak{B}$ eindeutig definierte und für jede einzelne Stelle reguläre Funktion $\varphi(x)$ ist ebendaselbst ein eindeutiger Zweig einer monogenen analytischen Funktion: jedes ihrer, dem Bereiche $\mathfrak{B}$ angehörigen Funktionselemente ist aus jedem anderen auf beliebigem im Innern von $\mathfrak{B}$ verlaufenden Wege ableitbar, so daß also durch irgend eins dieser Funktionselemente der ganze Verlauf von $\varphi(x)$ im Bereiche $\mathfrak{B}$ vollkommen eindeutig bestimmt ist.

Zusatz. Aus dem Satze von § 44, Nr. 3 (S. 332), betreffend das ***Maximum*** und ***Minimum*** des Absolutwertes einer Potenzreihe folgt zunächst, daß $\varphi(x)$ (d. h. schließlich jede im Innern eines zusammenhängenden Bereiches $\mathfrak{B}$ *eindeutige* und *reguläre* Funktion) *im Innern* von $\mathfrak{B}$ kein ***Maximum*** und, falls durchweg von Null verschieden, auch kein ***Minimum*** des absoluten Betrages besitzen kann. Bedeutet also $\mathfrak{B}'$ irgend einen dem Innern von $\mathfrak{B}$ angehörigen *abgeschlossenen* Bereich, so folgt weiter:

$|\varphi(x)|$ *besitzt für den Bereich $\mathfrak{B}'$ einen bestimmten **Maximalwert**, welcher nur auf der Begrenzung von $\mathfrak{B}'$ angenommen wird. Das gleiche gilt bezüglich des **Minimalwertes**, falls im Innern von $\mathfrak{B}'$ durchweg* $|\varphi(x)| > 0$.

5. Erstreckt sich der fragliche Bereich $\mathfrak{B}$ ins *Unendliche*, ohne das *gesamte* unendliche Gebiet, etwa $|x| > R$, zu enthalten, mit anderen Worten, ist die Stelle $x = \infty$ *kein innerer*, sondern ein *Randpunkt* von $\mathfrak{B}$, so bleibt der obige Hauptsatz offenbar ohne weiteres in Kraft: denn er gilt ja für jeden noch so großen endlichen Teilbereich von $\mathfrak{B}$, also in der Tat ausnahmslos „*im Innern*" von $\mathfrak{B}$.

Liegt dagegen die Stelle $x = \infty$ im Innern des Definitionsbereiches von $\varphi(x)$, besteht also eine Beziehung $\varphi(x) = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ etwa für $|x| > R$, und wird in diesem Bereiche eine Stelle x_0 ganz beliebig angenommen, so läßt sich ja $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x \mid x_0)$ transformieren (s. § 46, Nr. 2, S. 349), welche infolge der Beziehung $\varphi(x) = \mathfrak{P}(x \mid x_0)$ mit dem zur Stelle x_0 gehörigen Funktionselement $\mathfrak{P}_0(x \mid x_0)$ identisch sein muß. Zugleich ergibt sich hieraus, daß der Geltungsbereich der Beziehung $\varphi(x) = \mathfrak{P}_0(x \mid x_0)$ mindestens das Gebiet $|x - x_0| < |x_0| - R$ umfaßt, also den Kreis um x_0, welcher den Kreis $(O)R$ von außen berührt. Da andererseits für etwaige der Bedingung $|x| \leqq R$ genügende Stellen des Bereiches $\mathfrak{B}$ die oben gefundenen Ergebnisse gültig bleiben, so folgt, daß wiederum jedes

beliebige Funktionselement auf beliebigem Wege aus $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ abgeleitet werden kann, somit der ganze Verlauf von $\varphi(x)$ im Innern von $\mathfrak{B}$ durch das Funktionselement $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ vollkommen eindeutig bestimmt ist.

Es bleibt aber auch noch zu zeigen, daß umgekehrt das Funktionselement $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ durch jedes der Funktionselemente $\mathfrak{P}_0(x \mid x_0)$ bestimmt ist bzw. daraus „abgeleitet" werden kann. Daß dabei an einen direkten „Ableitungsprozeß" in dem sonstigen spezifischen Sinne nicht zu denken ist, geht schon daraus hervor, daß, wie groß man auch $|x_0|$ annehmen möge, eine Reihe von der Form $\mathfrak{P}_0(x \mid x_0)$ niemals für $x = \infty$ konvergieren kann, somit den „Punkt" $x = \infty$ niemals *im Innern* ihres Konvergenzbereiches enthält. Im übrigen erkennt man auch unmittelbar, daß sich *die einzelnen Glieder* einer Reihe $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$ für *keinen noch so kleinen Bereich* nach positiven ganzen Potenzen von $\frac{1}{x}$ entwickeln lassen, daß also eine Gleichung, wie die folgende:

$$(x - x_0)^n = \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu x^{-\nu},$$

niemals für irgendeinen zusammenhängenden Bereich bestehen kann. Denn bringt man dieselbe durch Entwicklung von $(x - x_0)^n$ nach Potenzen von x auf die Form:

$$\sum_0^n{}^\nu (-1)^{n-\nu} n_\nu x_0^{\,n-\nu} x^\nu - \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu x^{-\nu} = 0,$$

so erscheint sie als Sonderfall einer für alle x des fraglichen Bereiches bestehenden Gleichung von der Form $P(x) = 0$, welche ja nach dem Satze am Schlusse von § 46 (S. 355) das Verschwinden aller Koeffizienten nach sich ziehen müßte.

6. Um nun den Nachweis zu führen, daß nichtsdestoweniger die *Reihe* $\mathfrak{P}_0(x - x_0) \equiv \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu (x - x_0)^\nu$ unter den gemachten Voraussetzungen in eine solche von der Form $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ transformiert werden kann, erscheint es zweckmäßig, die hierzu dienliche Betrachtung durch die Substitution $x = \frac{1}{y}$ aus dem unendlichen Gebiete $|x| > R$ in das Innere des Kreises $|y| = \frac{1}{R}$ zu verlegen. Zugleich wollen wir, um die Schreibweise mög-

lichst zu vereinfachen, der Zahl R den Spezialwert 1 beilegen, was offenbar im Falle $R < 1$ ohne weiteres gestattet ist (da es sich ja hier nicht um Feststellung irgendeines *wahren* Konvergenzbereiches handelt), übrigens aber in *jedem* Falle dadurch erzielt werden kann, daß man Rx an Stelle von x als Veränderliche einführt.

Wir setzen also jetzt voraus, es sei $\varphi(x)$ für jede Stelle x_0 des Bereiches $|x| > 1$ eindeutig definiert und regulär, außerdem für den ganzen Bereich einschließlich der Stelle $x = \infty$ in der Form $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ darstellbar. Es handelt sich dann darum, zu zeigen, daß durch jedes der Funktionselemente $\mathfrak{P}_0(x - x_0) \equiv \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu (x - x_0)^\nu$ (welches nach den bisherigen Ergebnissen auch durch den Ableitungsprozeß aus $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ gewonnen werden könnte und somit zum mindesten für $|x - x_0| < |x_0| - 1$ konvergent und gültig ist) die Entwicklung $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ eindeutig bestimmt ist, bzw. daraus wirklich hergestellt werden kann.

Transformiert man $\varphi(x)$ durch die bereits oben angegebene Substitution $x = \frac{1}{y}$ in $\varphi\left(\frac{1}{y}\right)$, so folgt zunächst die Gültigkeit der Beziehung:

$$\varphi\left(\frac{1}{y}\right) = \mathfrak{P}(y) \quad \text{für } |y| < 1.$$

Wird sodann nach Annahme einer beliebigen Stelle x_0 (wo $|x_0| > 1$) gesetzt:

$$y_0 = \frac{1}{x_0} \quad (\text{wo: } |y_0| < 1),$$

so fragt sich vor allem: Welches Funktionselement von $\varphi\left(\frac{1}{y}\right)$ entspricht für die Umgebung der Stelle y_0 dem zur Stelle x_0 gehörigen für $|x - x_0| < |x_0| - 1$ gültigen Funktionselemente

$$\varphi(x) = \mathfrak{P}_0(x - x_0) = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu (x - x_0)^\nu ?$$

Aus dieser Beziehung folgt zunächst nur die folgende:

$$(8) \qquad \begin{cases} \varphi\left(\frac{1}{y}\right) = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right)^\nu & \text{für: } \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \left|\frac{1}{y_0}\right| - 1 \\ \qquad = \sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu \cdot \frac{a_\nu}{y_0^\nu} \cdot \left(\frac{y - y_0}{y}\right)^\nu & \text{für: } |y - y_0| < (1 - |y_0|) \cdot |y|, \end{cases}$$

so daß es vor allem darauf ankommt, ob bzw. in welcher Weise diese Entwicklung in eine solche nach Potenzen von $(y-y_0)$ transformiert werden kann.

Setzt man, um die Gestalt des Konvergenzbereiches der Reihe (8) zu erkennen:

$$y = \xi + \eta i, \quad y_0 = \xi_0 + \eta_0 i,$$

so nimmt die fragliche Konvergenzbedingung die Form an:

$$(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 < (1 - |y_0|)^2(\xi^2 + \eta^2),$$

anders geschrieben:

$$\left(\xi - \frac{\xi_0}{|y_0|(2 - |y_0|)}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\eta_0}{|y_0|(2 - |y_0|)}\right)^2 < \left(\frac{1 - |y_0|}{2 - |y_0|}\right)^2,$$

d. h. der fragliche Konvergenzbereich ist ein Kreis mit dem Radius

$$\varrho = \frac{1 - |y_0|}{2 - |y_0|}$$

und dem (offenbar auf demselben Strahle, wie y_0, liegenden) Mittelpunkte

$$y' = \frac{y_0}{|y_0|} \cdot \frac{1}{2 - |y_0|},$$

also ein Kreis, der (wegen: $|y'| + \varrho = 1$) den Einheitskreis von innen berührt und $\left(\text{wegen: } y' - |\varrho| = \frac{|y_0|}{2 - |y_0|} < |y_0|\right)$ den Punkt y_0, wie vorauszusehen war, im Innern enthält.

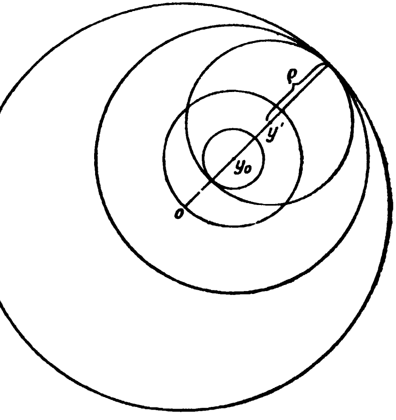


Fig. 20.

Um nun die Reihe (8) in eine solche nach Potenzen von $(y - y_0)$ umzuformen, hat man (s. § 46, Nr. 1, Gl. (10), S. 347):

$$(9) \qquad \frac{1}{y^\nu} = \frac{1}{y_0^\nu} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{y - y_0}{y_0}\right)^\nu} = \frac{1}{y_0^\nu} \cdot \sum_0^\infty{}_\lambda (-\nu)_\lambda \left(\frac{y - y_0}{y_0}\right)^\lambda$$

für: $|y - y_0| < |y_0|$, also im Innern des Kreises $(y_0)|y_0|$, welcher offenbar mit dem Innern des zuvor fixierten Kreises $(y')\varrho$ ein Stück gemein hat. Für diesen letzteren Bereich läßt sich daher die Entwicklung (8) in die Form setzen:

$$(10) \quad \varphi\left(\frac{1}{y}\right) = a_0 + \sum_1^\infty{}_\nu (-1)^\nu \cdot \frac{a_\nu}{y_0^{2\nu}} \left(\sum_0^\infty{}_\lambda (-\nu)_\lambda \cdot \left(\frac{y - y_0}{y_0}\right)^\lambda\right) \cdot (y - y_0)^\nu,$$

sie erscheint also für eine gewisse Umgebung der Stelle y_0 als eine gleichmäßig konvergente Reihe von Potenzreihen in $(y - y_0)$, kann somit nach

dem *Weierstraß*schen Doppelreihensatze in eine einfache Potenzreihe in $(y - y_0)$, etwa:

$$\varphi\left(\frac{1}{y}\right) = \mathfrak{P}^{(0)}(y - y_0) \tag{11}$$

umgeordnet werden. Alsdann folgt aus den bisherigen Ergebnissen, daß das Funktionselement $\varphi\left(\frac{1}{y}\right) = \mathfrak{P}(y)$ aus $\mathfrak{P}^{(0)}(y - y_0)$ *ableitbar* ist — nötigenfalls mit Hilfe passend gewählter Zwischenstellen. Es läßt sich aber zeigen, daß $\mathfrak{P}(y)$ bei geeigneter Einschränkung von $|y_0|$ sogar stets *direkt* aus $\mathfrak{P}^{(0)}(y - y_0)$ abgeleitet werden kann. Da nämlich, ebenfalls auf Grund der bisherigen Ergebnisse, $\mathfrak{P}^{(0)}(y - y_0)$ auch umgekehrt aus $\mathfrak{P}(y)$ ableitbar ist, so folgt, daß der Konvergenz- und Gültigkeitsbereich von $\mathfrak{P}^{(0)}(y - y_0)$ nicht auf den ursprünglich gefundenen (verhältnismäßig kleinen) Kreis um y_0 (vgl. die Figur) beschränkt ist, sondern sich auf das Innere eines Kreises um den Punkt y_0 erstreckt, welcher den Kreis $|y| = 1$ von innen berührt. Wird nun y_0 der Bedingung unterworfen $|y_0| < \frac{1}{2}$, so fällt der Punkt $y = 0$ in das Innere des betreffenden Kreises: alsdann ist aber $\mathfrak{P}(y)$ aus $\mathfrak{P}^{(0)}(y - y_0)$ *direkt* ableitbar (d. h. indem man die einzelnen Binome $(y - y_0)^\nu$ entwickelt und sodann alles nach Potenzen von y ordnet).

Dieses Resultat liefert jetzt durch Rücksubstitution von x die folgende Lösung unserer ursprünglichen Aufgabe. Man hat zunächst nach dem Vorbilde von Gl. (8) für $|x - x_0| < |x_0| - 1$:

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu (x - x_0)^\nu = \sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu a_\nu x_0^\nu x^\nu \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)^\nu \tag{12}$$

und findet hieraus mit Benutzung der aus Gl. (9) resultierenden Beziehung

$$x^\nu = x_0^\nu \sum_0^\infty{}_\lambda (-\nu)_\lambda x_0^\lambda \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)^\lambda \quad (\text{für: } |x - x_0| < |x|)\,[1] \tag{13}$$

die Umformung (s. Gl. (10)):

$$\varphi(x) = a_0 + \sum_1^\infty{}_\nu (-1)^\nu \cdot a_\nu x_0^{2\nu} \left(\sum_0^\infty{}_\lambda (-\nu)_\lambda x_0^\lambda \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)^\lambda\right) \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)^\nu. \tag{14}$$

Wird diese Entwicklung nach Potenzen von $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)$ geordnet, etwa (s. Gl. (11)):

$$\varphi(x) = \mathfrak{P}^{(0)}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right), \tag{15}$$

1) Dieser Bereich wird geometrisch repräsentiert durch die den Punkt x_0 enthaltende der beiden Halbebenen, in welche die x-Ebene durch die Senkrechte im Halbierungspunkte der Strecke $\overline{0x_0}$ zerlegt wird.

so ergibt sich, wenn x_0 der Bedingung unterworfen wird:

$$|x_0| > 2\ ^{1)},$$

die gesuchte Reihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ durch Entwicklung der einzelnen Glieder $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)^{\nu}$ und Anordnung der Reihe nach Potenzen von $\frac{1}{x}$.[2])

Die vorstehenden Betrachtungen zeigen, *daß der am Schlusse von Nr. 4 für endliche Bereiche formulierte Hauptsatz unverändert bestehen bleibt, auch wenn der in Frage kommende Bereich sich ins Unendliche erstreckt bzw. die Stelle ∞ „im Innern" enthält.*

§ 49. Anwendung des Hauptsatzes von § 48, S. 366 auf gleichmäßig konvergente Reihen regulärer, insbesondere rationaler Funktionen. — Arithmetische Ausdrücke, welche in verschiedenen Gebietsteilen verschiedene analytische Funktionen repräsentieren. — Reihen von der Form $P(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_\nu a_\nu x^\nu$.

1. Eine *rationale* Funktion $f(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ genügt offenbar den der Funktion $\varphi(x)$ des vorigen Satzes auferlegten Bedingungen in jedem noch so großen endlichen Bereiche, aus dem die Nullstellen des Nenners ausgeschlossen worden sind, überdies auch noch (wie sich wieder unmittelbar mit Hilfe der Substitution $x = \frac{1}{y}$ ergibt) in der Umgebung der Stelle $x = \infty$, wenn der Grad des Zählers denjenigen des Nenners nicht übersteigt. Daher erstreckt sich der Geltungs- und Konvergenzkreis der einzelnen Entwicklungen $f(x) = \mathfrak{P}(x \mid x_0)$ bzw. $f(x) = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ offenbar bis zu der oder den zu x_0 bzw. $x = \infty$ nächstgelegenen Nullstellen von $g_2(x)$ (s. § 41, Schluß von Nr. 5, S. 315).

---

1) Diese Bedingung ist, wie leicht ersichtlich, durch

$$|x_0| > 2R$$

zu ersetzen, wenn man statt des Bereiches $|x| > 1$ den Bereich $|x| > R > 1$ zugrunde legt.

2) Bei diesem Beweise wurde, außer der Eindeutigkeit und Regularität von $\varphi(x)$ für jedes endliche x des Bereiches $|x| > R$, die *Existenz* einer Beziehung von der Form $\varphi(x) = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ ausdrücklich vorausgesetzt. Es wird sich später zeigen (s. § 52, Nr. 3, S. 391), daß die letztere Voraussetzung entbehrt werden kann, sofern nur die Beschränktheit von $|\varphi(x)|$ feststeht, und daß andererseits die Koeffizienten der Reihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ auch noch in anderer Weise (nämlich in der Form von Mittelwerten) gewonnen werden können.

Es bedeute nun $f_\nu(x)$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ eine unbegrenzte Folge von Funktionen, welche im Innern eines gewissen zusammenhängenden Bereiches $\mathfrak{B}$ *eindeutig* definiert und *regulären* Verhaltens sind, was nach dem eben Gesagten insbesondere dann der Fall sein wird, wenn die $f_\nu(x)$ *rationale* Funktionen sind, deren Nenner im Innern von $\mathfrak{B}$ keine Nullstellen besitzen. Ferner werde vorausgesetzt, daß die Reihe $\sum_0^\infty{}' f_\nu(x)$ für jeden im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegenen abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}'$ *gleichmäßig konvergiere.* Bedeutet dann x_0 eine beliebige Stelle im Innern oder auf der Begrenzung von $\mathfrak{B}'$, so läßt sich jede der Funktionen $f_\nu(x)$ in der Form $\mathfrak{P}_\nu(x \mid x_0)$ darstellen für eine gewisse Umgebung der Stelle x_0 (die sich übrigens für *alle* $f_\nu(x)$ bis zur nächstgelegenen Stelle der Begrenzung von $\mathfrak{B}$ erstreckt, wie für *rationale* $f_\nu(x)$ aus dem Schlusse von § 41 [S. 315] hervorgeht, für *beliebige* $f_\nu(x)$ aus § 52, Nr. 4, Satz (IIa) geschlossen werden kann). Alsdann folgt aber aus dem *Weierstraß*schen Doppelreihensatze, daß $\sum_0^\infty{}' \mathfrak{P}_\nu(x \mid x_0)$ in eine einfache $\mathfrak{P}(x \mid x_0)$ umgeformt werden kann, somit $\sum_0^\infty{}' f_\nu(x)$ an der Stelle $x = x_0$ und das heißt schließlich für *jede* im *Innern* von $\mathfrak{B}$ gelegene Stelle x sich *regulär* verhält. Hieraus ergibt sich aber mit Benutzung des Hauptsatzes des vorigen Paragraphen das folgende Resultat:

Konvergiert die Reihe der im Innern eines gewissen zusammenhängenden Bereiches $\mathfrak{B}$ eindeutig definierten und regulären (z. B. rationalen) Funktionen $f_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ gleichmäßig für jeden dem Innern von $\mathfrak{B}$ angehörigen abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}'$, so wird durch den „arithmetischen Ausdruck“:

$$F_x \equiv \sum_0^\infty{}' f_\nu(x) \tag{1}$$

eine im Innern von $\mathfrak{B}$ eindeutige und reguläre analytische Funktion $F(x)$ dargestellt.[1])

Zugleich ergibt sich aus dem Satze über die Existenz und Bildung der Derivierten einer gleichmäßig konvergenten Reihe von der Form

1) Ist $F(x)$ über den Bereich $\mathfrak{B}$ hinaus fortsetzbar und verliert in dem so erweiterten Bereich den Charakter der Eindeutigkeit, so repräsentiert der arithmetische Ausdruck F_x einen im Innern von $\mathfrak{B}$ *eindeutigen Zweig* der (endlich- oder unendlich-) *vieldeutigen* analytischen Funktion $F(x)$ (vgl. § 47, Nr. 3, S. 358).

$\sum_0^\infty{}^{\nu}\, \mathfrak{P}_\nu(x\,|\,x_0)$ (s. § 43, Nr. 2, S. 326, Gl. (12)), daß im Innern von $\mathfrak{B}'$:

$$(2) \qquad F^{(n)}(x) = F_x^{(n)} = \sum_0^\infty{}^{\nu} f_\nu^{(n)}(x), \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,[1]$$

2. Benutzt man statt des *Weierstraß*schen den *Vitali*schen Doppelreihensatz (§ 45, Nr. 4, S. 343), so läßt sich die Forderung der *gleichmäßigen* Konvergenz von $\sum_0^\infty{}^{\nu} f_\nu(x)$ in dem angegebenen Umfange auf die beiden folgenden reduzieren:

a) *Die Gesamtheit der Partialsummen* $\sum_0^n{}^{\nu} f_\nu(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *muß in jedem dem Innern von* $\mathfrak{B}$ *angehörigen abgeschlossenen Bereich* $\mathfrak{B}'$ *beschränkt sein.*

b) *Die Reihe* $\sum_0^\infty{}^{\nu} f_\nu(x)$ *muß konvergieren für unendlich viele Stellen* x *in beliebiger Nähe irgendeiner im Innern von* $\mathfrak{B}$ *gelegenen Stelle* x_0

Sind diese Bedingungen erfüllt, so bestehen sie insbesondere für *jeden* dem *Innern* von $\mathfrak{B}$ angehörigen *Kreis,* der den Punkt x_0 *im Innern* enthält, und auf Grund des *Vitali*schen Doppelreihensatzes konvergiert daher $\sum_0^\infty{}^{\nu} f_\nu(x)$ *gleichmäßig* zunächst im *Innern* und auf der *Peripherie* eines jeden solchen Kreises. Da sodann jeder Punkt des auf diese Weise geschaffenen Bereiches *gleichmäßiger* Konvergenz die Rolle des Punktes x_0 übernehmen kann, so läßt sich vermittels eines begrenzten Fortsetzungsverfahrens jeder beliebige Innenpunkt x' von $\mathfrak{B}$ dem Bereiche *gleichmäßiger* Konvergenz einverleiben. Die Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu} f_\nu(x)$ konvergiert also *gleichmäßig in der Nähe* jedes Innenpunktes von $\mathfrak{B}$ und somit nach einem früher bewiesenen Satze (§ 29, Nr. 2, S. 238) auch in jedem dem Innern von $\mathfrak{B}$ angehörigen *abgeschlossenen* Bereich $\mathfrak{B}'$.

---

1) Anders geschrieben:

$$D^n \sum_0^\infty{}^{\nu} f_\nu(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} D^n f_\nu(x),$$

d. h. die Derivierten der Reihe $\sum f_\nu(x)$ werden durch gliedweise Derivation gefunden.

Damit ist aber schließlich wieder die in Nr. 1 gemachte gleichlautende Voraussetzung erfüllt und es gilt daher der folgende („*Vitali*sche") Satz:

Genügen die im Innern des zusammenhängenden Bereiches $\mathfrak{B}$ *eindeutig definierten und regulären Funktionen* $f_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ *den Bedingungen* a) *und* b), *so konvergiert die Reihe* $\sum_0^\infty {}^\nu f_\nu(x)$ ***gleichmäßig*** *in jedem dem Innern von* $\mathfrak{B}$ *angehörigen abgeschlossenen Bereiche* $\mathfrak{B}'$ *und stellt eine im Innern von* $\mathfrak{B}$ *eindeutige und reguläre analytische Funktion dar, deren Derivierte durch gliedweise Derivation gebildet werden können.*

3. Besteht der *Bereich*, in welchem die Funktionen $f_\nu(x)$ außer der Eindeutigkeit und Regularität die Eigenschaften a) und b) besitzen, bzw. (was ja nach dem in Nr. 2 Gesagten auf dasselbe hinausläuft) der *Bereich* gleichmäßiger Konvergenz von $\sum_0^\infty {}^\nu f_\nu(x)$ *aus mehreren getrennten Stücken*, so stellt zwar auf Grund des Ergebnisses von Nr. 1 und 2 *der arithmetische Ausdruck* $F_x \equiv \sum_0^\infty {}^\nu f_\nu(x)$ in jedem *einzelnen* dieser Teilbereiche eine eindeutige analytische Funktion regulären Verhaltens dar. Es besteht aber *keinerlei* Handhabe zu der Annahme, daß die auf diese Weise in den verschiedenen Teilbereichen definierten analytischen Funktionen *Bestandteile einer und derselben analytischen Funktion* sein müßten. Vielmehr lassen sich sehr einfache Reihen der fraglichen Art angeben, welche in verschiedenen Teilbereichen ganz *verschiedene* (d. h. *nicht* durch analytische Fortsetzung in Zusammenhang zu bringende), ja sogar verschiedene ganz *willkürlich vorzuschreibende* analytische Funktionen darstellen.

Beispiel. Es möge p_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ eine unbegrenzte Folge wachsender natürlicher Zahlen bedeuten (also: $p_0 \geqq 1$, $p_\nu < p_{\nu+1}$, $\lim_{\nu\to\infty} p_\nu = +\infty$) und es werde gesetzt:

$$(3)\quad f_0(x) = \frac{1}{1-x^{p_0}} \quad \text{und für } \nu \geqq 1\text{:}\quad f_\nu(x) = \frac{1}{1-x^{p_\nu}} - \frac{1}{1-x^{p_{\nu-1}}}$$
$$= \frac{x^{p_\nu} - x^{p_{\nu-1}}}{(1-x^{p_\nu})(1-x^{p_{\nu-1}})}.$$

Da die Wurzeln der Gleichung $x^{p_\nu} = 1$ für jedes $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ auf dem Kreise $|x| = 1$ liegen, so ist jedes $f_\nu(x)$ eindeutig und regulär sowohl für $|x| < 1$, als für $|x| > 1$. Des weiteren hat man:

$$(4)\quad \sum_0^n {}^\nu f_\nu(x) = \frac{1}{1-x^{p_0}} + \sum_1^n {}^\nu \left(\frac{1}{1-x^{p_\nu}} - \frac{1}{1-x^{p_{\nu-1}}}\right) = \frac{1}{1-x^{p_n}},$$

und für $|x| \leqq \varrho < 1$:

$$\left|\frac{1}{1-x^{p_n}}\right| \leqq \frac{1}{1-\varrho^{p_n}} \leqq \frac{1}{1-\varrho^{p_0}} \leqq \frac{1}{1-\varrho},$$

für $|x| \geqq r > 1$:

$$\left|\frac{1}{1-x^{p_n}}\right| \leqq \frac{1}{r^{p_n}-1} \leqq \frac{1}{r^{p_0}-1} \leqq \frac{1}{r-1}.$$

Die Summen $\sum_0^n f_\nu(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sind also in ihrer Gesamtheit *beschränkt* in den beiden Teilbereichen $|x| \leqq \varrho < 1$ und $|x| \geqq r > 1$ (die, wie nahe an 1 man auch ϱ und r annehmen möge, immer durch die Linie $|x| = 1$ getrennt bleiben).

Außerdem ist, wegen:

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-x^{p_n}} \begin{cases} = 1 & \text{für: } |x| \leqq \varrho < 1, \\ = 0 & \text{für: } |x| \geqq r > 1, \end{cases}$$

die aus (4) für $n \to \infty$ hervorgehende unendliche Reihe für $|x| \leqq \varrho$ und $|x| \geqq r$ *konvergent*, und zwar, da nunmehr die Bedingungen a) und b) von Nr. 2 erfüllt sind, in jedem dieser Teilbereiche *gleichmäßig* konvergent.[1] Man findet nun aus Gl. (4) und (5):

$$(6) \qquad F_x \equiv \sum_0^\infty f_\nu(x) \begin{cases} = 1 & \text{für } |x| \leqq \varrho < 1, \\ = 0 & \text{für } |x| \geqq r > 1, \end{cases}$$

und zwar nimmt die vorstehende Reihe eine besonders einfache Form an, wenn gesetzt wird: $p_\nu = 2^\nu$. Alsdann ergibt sich nämlich:

---

1) Man kann sich (bei Beschränkung auf den Satz von Nr. 1) auch leicht direkt von der *Gleichmäßigkeit* der Konvergenz von $\sum f_\nu(x)$ für $|x| \leqq \varrho$ bzw. $|x| \geqq r$ überzeugen. Man hat für $|x| \leqq \varrho < 1$:

$$R_n(x) = \sum_{n+1}^\infty \left(\frac{1}{1-x^{p_\nu}} - \frac{1}{1-x^{p_{\nu-1}}}\right) = -\frac{1}{1-x^{p_n}} + 1 = -\frac{x^{p_n}}{1-x^{p_n}},$$

also, wenn gesetzt wird $\varrho = \frac{1}{1+\delta}$, wo $\delta > 0$:

$$|R_n(x)| \leqq \frac{\varrho^{p_n}}{1-\varrho^{p_n}} = \frac{1}{(1+\delta)^{p_n}-1} < \frac{1}{p_n\delta},$$

und daher:

$$|R_n(x)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |x| \leqq \frac{1}{1+\delta},$$

sobald n der Bedingung genügt:

$$\frac{1}{p_n\delta} \leqq \varepsilon, \quad \text{d. h.} \quad p_n \geqq \frac{1}{\delta\varepsilon}.$$

Analog für $|x| \geqq r > 1$.

$$\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} f_\nu(x) = \frac{1}{1-x} + \sum_{1}{}^{\nu}\left(\frac{1}{1-x^{2^\nu}} - \frac{1}{1-x^{2^{\nu-1}}}\right)$$

$$= \frac{1}{1-x} + \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}\left(\frac{1}{1-x^{2^\nu}} - \frac{1+x^{2^{\nu-1}}}{1-x^{2^\nu}}\right)$$

$$= \frac{1}{1-x} - \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\frac{x^{2^\nu}}{1-x^{2^{\nu-1}}}$$

und daher schließlich:

$$F_x \equiv \frac{1}{1-x} + \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\frac{1}{x^{2^\nu}-x^{-2^\nu}} \begin{cases} =1 & \text{für } |x|<1, \\ =0 & \text{für } |x|>1. \end{cases} \tag{7}$$

Der *arithmetische Ausdruck* F_x stellt also im Innern des Einheitskreises die *„analytische Funktion“* 1, außerhalb desselben die *„analytische Funktion“* 0 dar, d. h. F_x läßt sich (infolge der gleichmäßigen Konvergenz, durch Entwicklung der einzelnen Glieder und entsprechende Umordnung) für $|x|<1$ in eine $\mathfrak{P}(x)$ mit der Summe 1, für $|x|>1$ in eine $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ mit der Summe 0 entwickeln (die betreffenden Reihen reduzieren sich also bei wirklicher Ausführung der entsprechenden Entwicklungen auf das konstante Glied 1 bzw. 0).

In dieser Form wirkt das vorliegende Beispiel eines arithmetischen Ausdruckes, der in verschiedenen Teilgebieten verschiedene analytische Funktionen darstellt, wegen der allzu speziellen Natur der beiden dargestellten *analytischen Funktionen*, noch nicht recht schlagend. Diesem Umstande läßt sich jedoch in folgender Weise leicht abhelfen.

Es seien $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ zwei ganz *beliebig vorgeschriebene* eindeutige *analytische*, z. B. *rationale* Funktionen, und es werde gesetzt:

$$\begin{cases} \Phi_x \equiv F_x\cdot\varphi_1(x) + (1-F_x)\cdot\varphi_2(x) = F_x(\varphi_1(x)-\varphi_2(x)) + \varphi_2(x) \\ \quad = \dfrac{\varphi_1(x)-\varphi_2(x)}{1-x} + \displaystyle\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\frac{\varphi_1(x)-\varphi_2(x)}{x^{2^\nu}-x^{-2^\nu}} + \varphi_2(x), \end{cases} \tag{8}$$

so hat man:

$$\Phi_x \begin{cases} =\varphi_1(x) & \text{für } |x|<1 \\ =\varphi_2(x) & \text{für } |x|>1, \end{cases} \tag{9}$$

so daß also der *arithmetische Ausdruck* Φ_x in den beiden Teilgebieten $|x|<1$ und $|x|>1$ je eine der beiden *analytischen Funktionen* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ darstellt.

Dieses Ergebnis läßt sich noch in mannigfacher Weise, z. B. folgendermaßen verallgemeinern. Es sei r' eine *positive*, a eine beliebige *kom-*

plexe Zahl und es werde x durch $\frac{x-a}{r'}$ in F_x ersetzt, so findet man:

$$(10)\quad F_{\frac{x-a}{r'}}\begin{cases} = 1, & \text{wenn } |x-a| < r', \text{ also innerhalb} \\ = 0, & \text{wenn } |x-a| > r', \text{ also außerhalb} \end{cases}\text{ des Kreises } (a)r'.$$

Nun seien m sich nicht schneidende Kreise mit den Mittelpunkten $a_1, a_2, \ldots, a_m$ und den Radien $r_1, r_2, \ldots, r_m$, außerdem $m+1$ beliebige eindeutige *analytische*, z. B. *rationale* Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{m+1}(x)$ vorgelegt. Alsdann wird der *arithmetische Ausdruck:*

$$(11)\quad \begin{cases} \Phi_x \equiv \sum_1^m{}^{\mu} F_{\frac{x-a_\mu}{r_\mu}} \cdot \varphi_\mu(x) + \left(1 - \sum_1^m{}^{\mu} F_{\frac{x-a_\mu}{r_\mu}}\right) \cdot \varphi_{m+1}(x) \\ \quad = \sum_1^m{}^{\mu} F_{\frac{x-a_\mu}{r_\mu}} \cdot (\varphi_\mu(x) - \varphi_{m+1}(x)) + \varphi_{m+1}(x) \end{cases}$$

innerhalb eines jeden der m Kreise $(a_\nu)r_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ die entsprechende *analytische Funktion* $\varphi_\nu(x)$, dagegen in dem außerhalb aller Kreise liegenden unendlichen Gebiete die *analytische Funktion* $\varphi_{m+1}(x)$ darstellen.

4. Eine für den Bereich: $R_0 < |x-x_0| < R$ (wo $R_0 \geqq 0$, R beliebig groß, eventuell auch $= +\infty$[1])) konvergierende Reihe von der Form:

$$P(x-x_0) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} a_\nu (x-x_0)^\nu$$

bildet offenbar einen besonders einfachen Typus der in Nr. 1 mit $\sum f_\nu(x)$ bezeichneten Reihen. Denn jedes *Reihenglied* $a_\nu(x-x_0)^\nu$ ist (auch für $\nu < 0$: vgl. § 41, Nr. 5, S. 314) im Bereich $R_0 < |x-x_0| < R$ *regulär* und der Bereich *gleichmäßiger* Konvergenz besteht hier aus jedem Ringgebiete $R_0 + \delta \leqq |x-x_0| \leqq R - \delta$ (wo $\delta > 0$ beliebig klein und, im Falle $R = +\infty$, an die Stelle von $R-\delta$ jede noch so große positive Zahl gesetzt werden kann). Diese Feststellungen genügen[2]), um auf Grund des Satzes von Nr. 1 zu erschließen, daß $P(x-x_0)$ eine im Innern des Ringgebietes $R_0 < |x-x_0| < R$ *eindeutige analytische Funktion regulären Verhaltens* darstellt.

1) Der Bereich („das Ringgebiet") $R_0 < |x-x_0| < R$ kann also eventuell aus der ganzen x-Ebene mit Ausschluß der Stellen x_0 und ∞ bestehen.

$$\left(\text{Beispiel: } \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} \frac{1}{|\nu|!}(x-x_0)^\nu\right).$$

2) D. h. man hat nicht notwendig, von der früher (§ 46, Nr. 3, S. 353, Gl (35)) durchgeführten Transformation der Reihe $P(x-x_0)$ in eine $\mathfrak{P}(x-x_1)$ Gebrauch zu machen.

Es erweist sich nun für die weitere Ausgestaltung der Lehre von den analytischen Funktionen als bedeutungsvoll, daß dieses Ergebnis *umkehrbar* ist, d. h. daß eine im Innern eines Ringgebietes $R_0 < |x - x_0| < R$ *eindeutige* und *reguläre* Funktion auch stets in der Form $P(x - x_0)$ dargestellt werden kann.

Um dieses wichtige, den Inhalt des sogenannten *Laurent*schen Satzes bildende Resultat herzuleiten, schicken wir zunächst zwei Hilfssätze voraus, deren erster zugleich die Möglichkeit bieten wird, die Voraussetzung des *regulären Verhaltens* durch eine gänzlich anders geartete zu ersetzen, die *scheinbar* eine wesentlich größere Tragweite besitzt, späterhin sich jedoch nur als vollkommen gleichwertig erweisen wird; während der zweite, an den früher (§ 35, S. 272) eingeführten Mittelwertbegriff anknüpfend, uns das eigentliche Beweisinstrument für den fraglichen Satz liefern wird.

§ 50 Gleichmäßige Konvergenz der Differenzenquotienten gegen die Derivierte. — Gleichmäßige Differenzierbarkeit.

1. Satz. *Ist $F(x)$ eindeutig und regulär im Innern und auf der Begrenzung des endlichen Bereiches $\mathfrak{B}$, so konvergiert der „Differenzenquotient“*

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

mit verschwindendem h in $\mathfrak{B}$ gleichmäßig gegen die Derivierte $F'(x)$, d. h. zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ läßt sich $\delta > 0$ so fixieren, daß für alle x des genannten Bereiches die Beziehung besteht:

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - F'(x)\right| < \varepsilon, \quad \text{falls } |h| \leqq \delta. \tag{1}$$

Beweis. Für jede Stelle x des Bereiches $\mathfrak{B}$ besteht eine Beziehung von der Form:

$$F(x+h) = \sum_{0}^{\infty} \nu \frac{1}{\nu!} F^{(\nu)}(x) \cdot h^{\nu}. \tag{2}$$

Der Geltungsradius dieser Reihenentwicklung besitzt für die Gesamtheit der Stellen x ein von Null verschiedenes *Minimum* ϱ[1]), so daß also die

1) Dies folgt wieder aus der in § 48, Nr. 2 (S. 364) bewiesenen *Stetigkeit* des Geltungsradius bei veränderlichem x. (Um den Satz in der a. a. O. gegebenen Fassung auf den vorliegenden Fall zu übertragen, ersetze man in Gl. (2) x durch

Relation (2) sicher für *alle* x des Bereiches $\mathfrak{B}$ gilt, falls $|h| < \varrho$. Daraus folgt dann weiter:

$$(3) \qquad \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - F'(x) = \sum_{2}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu!} F^{(\nu)}(x) \cdot h^{\nu-1}$$

$$= h \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{(\nu+2)!} F^{(\nu+2)}(x) \quad h^{\nu}.$$

Nun besteht offenbar für $F''(x)$, und zwar ebenfalls für alle x, wenn $|h| < \varrho$, die mit (2) analoge Entwicklung:

$$F''(x+h) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu!} F^{(\nu+2)}(x) \cdot h^{\nu}.$$

Da andererseits nach Annahme einer positiven Zahl $\delta < \varrho$ der absolute Betrag der *stetigen* Funktion $F''(x+h)$ für alle x des Bereiches $\mathfrak{B}$ und $|h| \leqq \delta$ unter einer endlichen Schranke g bleibt, so hat man nach dem *Cauchy*schen Koeffizientensatze:

$$\frac{1}{\nu!} |F^{(\nu+2)}(x) \cdot h^{\nu}| < g,$$

und daher nach Gl. (3), sofern nur $|h| \leqq \delta$:

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - F'(x)\right| < g \cdot \delta \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} = g\delta,$$

also, wenn $\delta < \varrho$ so angenommen wird, daß $g\delta \leqq \varepsilon$, wie behauptet:

$$(1) \qquad \left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - F'(x)\right| < \varepsilon$$

für alle x des Bereiches $\mathfrak{B}$, sofern nur $|h| \leqq \delta$.

2. Die charakteristische Ungleichung (1) behält offenbar auch noch eine bestimmte Bedeutung, wenn $F'(x)$ nicht eine *Derivierte* in dem hier ein für allemal festgestellten Sinne (s. § 43, Nr. 1, S. 323), sondern den (im komplexen Sinne zu verstehenden) *Differentialquotienten* einer für den Bereich $\mathfrak{B}$ eindeutig definierten Funktion $F(x)$ bedeutet, d. h. den *Grenz-*

---

x_0 und h durch $x - x_0$, so daß also:

$$F(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu!} F^{(\nu)}(x_0) \cdot (x-x_0)^{\nu}$$

$$\equiv \mathfrak{P}(x|x_0).$$

Die *Stetigkeit* des Geltungsradius besteht dann bei veränderlichem x_0, welches ja jetzt die Rolle des ursprünglichen Zeichens x spielt.)

wert (vgl. § 15, Nr. 3, S. 142):

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

bei beliebig komplex gedachten, gegen Null konvergierendem h. Man erkennt leicht, daß eine Funktion $F(x)$, die in dem angegebenem Sinne einen *Differentialquotienten* besitzt, an jeder Stelle, wo dieser *von Null verschieden* ist, eine *konforme* Abbildung vermittelt. Ist nämlich x_0 eine solche Stelle, so hat man bei beliebigen Grenzübergängen $h_1 \to 0$, $h_2 \to 0$:

$$\lim_{h_2 \to 0} \frac{F(x_0+h_2) - F(x_0)}{h_2} = \lim_{h_1 \to 0} \frac{F(x_0+h_1) - F(x_0)}{h_1} \neq 0$$

und somit:

$$\lim_{h_1, h_2 \to 0} \frac{F(x_0+h_2) - F(x_0)}{F(x_0+h_1) - F(x_0)} \cdot \frac{h_1}{h_2} = 1,$$

anders geschrieben:

$$\lim_{x_1, x_2 \to x_0} \frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} \cdot \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} = 1,$$

wenn gesetzt wird:

$$x_0 + h_1 = x_1, \quad x_0 + h_2 = x_2, \quad y_\nu = F(x_\nu), \qquad (\nu = 0, 1, 2).$$

Diese Beziehung ist aber, wie die Vergleichung mit § 17, Nr. 3, Gl. (15) (S. 160) zeigt, hinreichend für die *Konformität* der Abbildung an der Stelle x_0. Wenn also *jetzt* $F'(x)$ durch die Gleichung *definiert* ist:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}, \tag{4}$$

und angenommen wird, daß dieses $F'(x)$ für jede Stelle x des abgeschlossenen Bereiches $\mathfrak{B}$ einen bestimmten Wert besitzt, in $\mathfrak{B}$ beschränkt ist und überdies der Ungleichung (1) in dem angegebenen Umfange genügt, so soll gesagt werden, $F(x)$ sei in $\mathfrak{B}$ *gleichmäßig differenzierbar.*

Da ja allemal, wenn eine *Derivierte* existiert, diese zugleich den *Differentialquotienten* der betreffenden Funktion darstellt, so kann der Inhalt des vorigen Satzes auch dahin formuliert werden, daß jede in $\mathfrak{B}$ *reguläre* Funktion daselbst auch *gleichmäßig differenzierbar* ist. Daß auch das *umgekehrte* stattfindet, wird sich weiterhin ergeben.

Zunächst knüpfen wir an die Ungleichung (1) noch die folgende Bemerkung. Ist dieselbe erfüllt, besteht also in $\mathfrak{B}$ gleichmäßige Differenzierbarkeit, so hat man, wenn man noch $\frac{\varepsilon}{2}$ statt ε schreibt, für alle x von $\mathfrak{B}$:

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - F'(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ wenn } |h| \leqq \delta,$$

und ebenso:

$$\left|\frac{F(x+k) - F(x)}{k} - F'(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ wenn } |k| \leqq \delta,$$

und daher:

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\frac{F(x+k)-F(x)}{k}\right|<\varepsilon, \text{ wenn } \begin{cases}|h|\leq\delta, \\ |k|\leq\delta\end{cases} \tag{5}$$

Im Anschluß an den soeben eingeführten Begriff der gleichmäßigen Differenzierbarkeit beweisen wir für spätere Verwendung noch den folgenden Hilfssatz:

Sind $f_1(x)$, $f_2(x)$ in $\mathfrak{B}$ eindeutig definiert und gleichmäßig differenzierbar, so gilt das gleiche auch von dem Produkte

$$F(x)\equiv f_1(x)\cdot f_2(x).$$

Beweis. Um zunächst die *Existenz* von $F'(x)$ zu erweisen, hat man:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{f_1(x+h)\cdot f_2(x+h)-f_1(x)\cdot f_2(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\left\{f_2(x+h)\cdot\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}+f_1(x)\cdot\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}\right\}\end{aligned}$$

und, wegen $\lim_{h\to 0}f_2(x+h)=f_2(x)$ (da ja die Existenz eines *endlichen* Differentialquotienten allemal die Stetigkeit involviert):

$$F'(x)=f_2(x)\cdot f_1'(x)+f_1(x)\cdot f_2'(x). \tag{6}$$

Sodann ergibt sich:

$$\begin{aligned}&\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-F'(x)\\ &=f_2(x+h)\cdot\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}+f_1(x)\cdot\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}\\ &\qquad -f_2(x)\cdot f_1'(x)\qquad\qquad -f_1(x)\cdot f_2'(x)\\ &=(f_2(x+h)-f_2(x))\cdot f_1'(x)+f_2(x+h)\left(\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}-f_1'(x)\right)\\ &\qquad +f_1(x)\left(\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}-f_2'(x)\right).\end{aligned}$$

Nun bleiben $|f_1(x)|$, $|f_2(x+h)|$, $|f_1'(x)|$ in $\mathfrak{B}$ unter einer endlichen Schranke g, so daß also:

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-F'(x)\right|<g\left\{|f_2(x+h)-f_2(x)|+\left|\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}-f_1'(x)\right|+\left|\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}-f_2'(x)\right|\right\},$$

also, da jeder der drei rechts stehenden Summanden durch passende Einschränkung von $|h|$, etwa für $|h|\leqq\delta$, kleiner gemacht werden kann, als $\frac{\varepsilon}{3g}$, schließlich

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-F'(x)\right|<\varepsilon\quad\text{für } h\leqq\delta,$$

womit die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

§ 51. Konstanz des Mittelwertes $\mathfrak{M}F(\mathfrak{e}r)$ in ringförmigen bzw. kreisförmigen Bereichen regulären Verhaltens oder gleichmäßiger Differenzierbarkeit.

1. Satz. *Ist $F(x)$ in dem Bereiche (Kreisringe) $R_0 \leqq |x| \leqq R$ eindeutig definiert und an jeder Stelle regulär oder auch nur in dem obigen Bereiche gleichmäßig differenzierbar, so ist $\mathfrak{M}F(\mathfrak{e}r)$ für alle r des Intervalls $R_0 \leqq r \leqq R$ konstant, so daß also:*

$$\mathfrak{M}F(\mathfrak{e}r) = \mathfrak{M}F(\mathfrak{e}r_0), \quad \text{wenn: } R_0 \leqq r_0 < r \leqq R.$$

Ist $R_0 = 0$, besteht also der fragliche Bereich aus dem Kreise $0 \leqq |x| \leqq R$, so hat man entsprechend:

$$\mathfrak{M}F(\mathfrak{e}r) = \mathfrak{M}F(\mathfrak{e} \cdot 0), \text{ d. h. } = F(0) \text{ für: } r \leqq R.$$

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt, daß der Differenzenquotient von $F(x)$ der Relation (5) des vorigen Paragraphen genügt, daß also zu beliebig klein vorgeschriebenen $\varepsilon > 0$ bei passender Verkleinerung von h und k

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \frac{F(x+k) - F(x)}{k} \right| < \varepsilon \tag{1}$$

wird, und zwar gleichmäßig für alle x des fraglichen Bereiches.

Es werde nun, nachdem $\varepsilon > 0$ beliebig klein, r_0 und r willkürlich innerhalb der oben bezeichneten Grenzen angenommen sind, eine natürliche Zahl m so fixiert, daß, wenn gesetzt wird:

$$\frac{r - r_0}{m} = \delta \qquad (\text{also: } r = r_0 + m\delta), \tag{2}$$

die Ungleichung (1) für $|h| \leqq \delta$, $|k| \leqq \delta$ erfüllt ist.

Bedeutet ferner c_n die Hauptwurzel der Gleichung $x^{2^n} = 1$, so läßt sich eine untere Schranke n' für n so festsetzen, daß:

$$r \cdot |c_n - 1| \leqq \delta \quad \text{für } n \geqq n'. \tag{3}$$

Bezeichnet man sodann mit ϱ eine beliebige Zahl des Intervalls $r_0 \leqq \varrho \leqq r - \delta$, und setzt zugleich:

$$\begin{cases} x = c_n^\nu \cdot \varrho, \\ h = c_n^\nu \cdot \delta, \qquad k = (c_n^{\nu+1} - c_n^\nu)\,\varrho = c_n^\nu(c_n - 1) \quad \varrho, \end{cases} \tag{4}$$

so hat man für $n \geqq n'$:

$$|h| = \delta \qquad |k| = |c_n - 1| \cdot \varrho < |c_n - 1| \cdot r \leqq \delta$$

und daher nach Ungl. (1):

$$\left| \frac{F(c_n^\nu(\varrho + \delta)) - F(c_n^\nu \varrho)}{c_n^\nu \delta} - \frac{F(c_n^{\nu+1}\varrho) - F(c_n^\nu \varrho)}{c_n^\nu(c_n - 1)\varrho} \right| < \varepsilon, \tag{5}$$

also durch Multiplikation mit der Gleichung $|c_n^\nu \delta| = \delta$

$$(6) \qquad \left| F(c_n^\nu(\varrho + \delta)) - F(c_n^\nu \varrho) + \frac{\delta}{(1 - c_n)\varrho}(F(c_n^{\nu+1}\varrho) - F(c_n^\nu \varrho))\right| < \delta\varepsilon.$$

Substituiert man hier für ν der Reihe nach die Zahlen $0, 1, \ldots, 2^n - 1$, addiert die resultierenden Ungleichungen, ersetzt sodann auf der linken Seite die Summe der absoluten Beträge durch den absoluten Betrag der Summe und benützt die Beziehung:

$$\sum_0^{2^n-1}{}_\nu (F(c_n^{\nu+1}\varrho) - F(c_n^\nu \varrho)) = 0 \quad (\text{wegen: } c_n^{2^n} = c_n^0 = 1),$$

so ergibt sich:

$$\left|\sum_0^{2^n-1}{}_\nu F(c_n^\nu(\varrho + \delta)) - \sum_0^{2^n-1}{}_\nu F(c_n^\nu \varrho)\right| < 2^n \delta\varepsilon,$$

und daher durch Division mit 2^n die Mittelwertbeziehung (s. § 35, S. 270, Gl. (1)):

$$|\mathfrak{M}_n F(\mathfrak{e}[\varrho + \delta]) - \mathfrak{M}_n F(\mathfrak{e}\varrho)| < \delta\varepsilon \quad (n \geqq n'),$$

also für $n \to \infty$:

$$(7) \qquad |\mathfrak{M} F(\mathfrak{e}[\varrho + \delta]) - \mathfrak{M} F(\mathfrak{e}\varrho)| \leqq \delta\varepsilon.$$

Ersetzt man hier ϱ durch $r_0 + (\mu - 1)\delta$ (was gestattet ist, falls $1 \leqq \mu \leqq m$), so folgt zunächst:

$$|\mathfrak{M} F(\mathfrak{e}[r_0 + \mu\delta]) - \mathfrak{M} F(\mathfrak{e}[r_0 + \overline{(\mu - 1)\delta}])| \leqq \delta\varepsilon,$$

und hieraus durch Substitution von $\mu = 1, 2, \ldots, m$ und Addition der resultierenden Ungleichungen, wenn man wieder auf der linken Seite die Summe der absoluten Beträge durch den absoluten Betrag der Summe ersetzt:

$$(8) \qquad |\mathfrak{M} F(\mathfrak{e}r) - \mathfrak{M} F(\mathfrak{e}r_0)| \leqq m\delta\varepsilon = (r - r_0)\varepsilon$$

(wegen: $r_0 + m\delta = r$ nach Gl. (2)).

Da es aber freisteht ε unbegrenzt zu verkleinern, so ergibt sich schließlich, wie behauptet:

$$(9) \qquad \mathfrak{M} F(\mathfrak{e}r) = \mathfrak{M} F(\mathfrak{e}r_0) \qquad (\text{für: } R_0 \leqq r_0 < r \leqq R).$$

Ist $R_0 = 0$, d. h. besitzt $F(x)$ die Eigenschaft *regulären Verhaltens* bzw. *gleichmäßiger Differenzierbarkeit* in dem *Kreise* $0 \leqq |x| \leqq R$, so erleidet das an Ungl. (7) geknüpfte Schlußverfahren keinen Abbruch, wenn man $r_0 = 0$ setzt, und es tritt sodann an die Stelle der Gl. (9), wie behauptet, die folgende:

$$(10) \qquad \mathfrak{M} F(\mathfrak{e}r) = \mathfrak{M} F(\mathfrak{e} \cdot 0) = F(0) \quad (\text{für: } r \leqq R).$$

Hieraus folgt noch, wenn man $F(x)$ durch $x^\nu F(x)$ $(\nu \geqq 1)$ ersetzt, daß unter den zuletzt über $F(x)$ gemachten Voraussetzungen:

$$(11) \qquad \mathfrak{M}((\mathfrak{e}r)^\nu F(\mathfrak{e}r)) = 0, \quad \text{wenn: } \nu \geqq 1.$$

2. Die in den Gleichungen (9), (10), (11) enthaltene Eigenschaft des Mittelwertes $\mathfrak{M}(F(\mathfrak{e}r))$ bzw. $\mathfrak{M}((\mathfrak{e}r)^\nu \cdot F(\mathfrak{e}r))$ bleibt erhalten, wenn die über $F(x)$ gemachten Voraussetzungen nicht ganz in dem angegebenen Umfange bestehen. Sind sie zunächst nur erfüllt *im Innern* des betreffenden Kreisringes (bzw. *im Innern* des betreffenden Kreises *mit Ausschluß* des Mittelpunktes), also für $R_0 < |x| < R$ (bzw. $0 < |x| < R$), so gilt Gl. (9) bzw. (10), (11) für $r_0' \leqq r_0 < r \leqq r'$, wenn r_0', r' so angenommen werden, daß: $R_0 < r_0' < r' < R$ (bzw. $0 < r_0' < r' < R$). Und da es freisteht, r_0' und r' den Grenzen R_0 und R bzw. 0 und R beliebig zu nähern, so gelten die fraglichen Gleichungen schließlich für $R_0 < r_0 < r < R$ bzw. $0 < r_0 < r < R$.

Nun kann aber — selbst wenn in bezug auf $F(x)$ gar nichts anderes feststeht, als die Eigenschaft der gleichmäßigen *Stetigkeit* in dem fraglichen Bereiche — $\mathfrak{M}F(\mathfrak{e}r)$ gleichzeitig mit r sich immer nur *stetig* ändern. Denn aus der Beziehung:

$$(12) \qquad \mathfrak{M}_n F(\mathfrak{e}r') - \mathfrak{M}_n F(\mathfrak{e}r) = \frac{1}{2^n} \sum_0^{2^n-1} {}_\nu (F(c_n^\nu r') - F(c_n^\nu r))$$

folgt unmittelbar:

$$(13) \qquad |\mathfrak{M}_n F(\mathfrak{e}r') - \mathfrak{M}_n F(\mathfrak{e}r)| < \varepsilon,$$

falls:

$$(14) \qquad |F(c_n^\nu r') - F(c_n^\nu r)| < \varepsilon,$$

was ja infolge der vorausgesetzten gleichmäßigen Stetigkeit von $F(x)$ durch passende Verkleinerung von $|c_n^\nu r' - c_n^\nu r|$, d. h. schließlich von $|r' - r|$ stets erzielt werden kann. Daraus folgt dann weiter:

$$(15) \qquad |\mathfrak{M}F(\mathfrak{e}r') - \mathfrak{M}F(\mathfrak{e}r)| \leqq \varepsilon$$

und somit schließlich:

$$(16) \qquad \lim_{r' \to r} \mathfrak{M}F(\mathfrak{e}r') = \mathfrak{M}F(\mathfrak{e}r).$$

Ist also $F(x)$ beim Übergange zu den Grenzen $|x| = R$, $|x| = R_0$ wenigstens noch *stetig*, so bleibt auf Grund der Grenzbeziehung (16) die Gl. (9) auch noch für $r = R$ bzw. $r_0 = R_0$ gültig.[1]) Ebenso ist das Bestehen von

---

1) Nach dem in § 35, Nr. 3 (S. 272) Gesagten besteht dieses Resultat unverändert, wenn die Stetigkeit oder eindeutige Bestimmtheit von $F(x)$ für $|x| = R$ bzw. $|x| = R_0$ an einer endlichen Anzahl von Stellen Ausnahme erleidet, sofern nur $|F(x)|$ stets unter einer endlichen Schranke bleibt.

Gl. (10) schon gesichert, wenn nur feststeht[1]), daß $F(x)$ für $x = 0$ noch *stetig* ist, während für das Bestehen von Gl. (11) sogar die *Beschränktheit* von $F(x)$ in der Nähe von $x = 0$ ausreichen würde.

Sodann aber wird das Bestehen von Gl. (9) bzw. (10), (11) auch dann nicht alteriert, wenn die Gültigkeit der gemachten Voraussetzungen für eine endliche Anzahl *im Innern* gelegener Stellen nicht feststeht[2]), sofern nur $|F(x)|$ stets unter einer endlichen Schranke g bleibt. Um die Richtigkeit dieser Behauptung zu erkennen, genügt es offenbar, dieselbe für den Fall einer einzigen derartigen Ausnahmestelle zu erweisen, deren absoluter Betrag mit ϱ bezeichnet werden möge. Man bemerke zunächst, daß dadurch die Existenz von $\mathfrak{M}F(e\varrho)$ in keiner Weise beeinträchtigt wird (vgl. § 35, Nr. 3, S. 272), und daß für $r \gtrless \varrho$ nach Analogie von Gl. (13) auch die Beziehung besteht:

$$\lim_{r \to \varrho} \mathfrak{M}F(er) = \mathfrak{M}F(e\varrho). \tag{17}$$

An Stelle der Ungleichung (13) erscheint nämlich in dem vorliegenden Falle bei passender Verkleinerung von $|\varrho - r|$ die folgende:

$$|\mathfrak{M}_n F(e\varrho) - \mathfrak{M}_n F(er)| < \varepsilon + \frac{2g}{2^n}, \tag{18}$$

da ja in der definierenden Summe: $\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sum_0^{2^n-1}\nu (F(c_n^\nu \varrho) - F(c_n^\nu r))$ der Absolutwert eines einzigen Summanden zwar nicht $< (\frac{1}{2})^n \cdot \varepsilon$, aber immerhin $< (\frac{1}{2})^n \cdot 2g$ ausfällt. Daraus folgt aber für $n \to \infty$ in voller Analogie mit Ungl. (15):

$$|\mathfrak{M}F(e\varrho) - \mathfrak{M}F(er)| \leqq \varepsilon, \tag{19}$$

woraus dann die Richtigkeit von Gl. (17) unmittelbar hervorgeht. Ist jetzt $r_0 < r' < \varrho < r'' < r$, so hat man, wie früher:

$$\mathfrak{M}F(er_0) = \mathfrak{M}F(er'), \quad \mathfrak{M}F(er'') = \mathfrak{M}F(er), \tag{20}$$

und zwar bei beliebiger Annäherung von r' und r'' an ϱ; andererseits

1) Wir sagen ausdrücklich, wenn *nur feststeht,* daß ... und *nicht:* wenn $F(x)$ für $x = 0$ *nur stetig ist* (sc. ohne *regulär* zu sein). Es wird sich nämlich zeigen, daß dieser Fall überhaupt nicht eintreten kann; d. h. wenn außer den übrigen Bedingungen die *Stetigkeit* von $F(x)$ für $x = 0$ besteht, so ist $F(x)$ an dieser Stelle nachweislich auch *regulär*.

2) Vgl. die vorige Note. Auch hier zeigt sich nachträglich, daß die fraglichen Bedingungen an den vorläufig ausgenommenen Stellen von selbst erfüllt sind, wenn zu der im Text vorausgesetzten *Endlichkeit* noch die *Stetigkeit* hinzukommt.

nach Gl. (17):

$$\lim_{r' \to \varrho} \mathfrak{M} F(\mathfrak{e} r') = \mathfrak{M} F(\mathfrak{e} \varrho) = \lim_{r'' \to \varrho} \mathfrak{M} F(\mathfrak{e} r''), \tag{21}$$

und daher schließlich:

$$\mathfrak{M} F(\mathfrak{e} r_0) = \mathfrak{M} F(\mathfrak{e} \varrho) = \mathfrak{M} F(\mathfrak{e} r), \tag{22}$$

womit die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

§ 52. Entwicklung einer in einem Kreisringe oder Kreise regulären bzw. gleichmäßig differenzierbaren Funktion in eine Potenzreihe (Laurentscher und Cauchy-Taylorscher Satz).

1. Satz. I. *Ist die Funktion $f(x)$ in dem Kreisringe $R_0 < |x| < R$ eindeutig definiert und entweder für jede einzelne Stelle regulär oder in jedem Bereiche $r_0 \leqq |x| \leqq r$ (bei $r_0 > R_0$, $r < R$) gleichmäßig differenzierbar, so läßt sich $f(x)$ in eine für $R_0 < |x| < R$ absolut konvergente Reihe nach positiven und negativen Potenzen von x entwickeln, nämlich:*

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{\nu}\, a_\nu x^\nu, \tag{1}$$

wo: $a_\nu = \mathfrak{M}((\mathfrak{e}\varrho)^{-\nu} \cdot f(\mathfrak{e}\varrho))$ und ϱ eine beliebige Zahl des Intervalls $R_0 < \varrho < R$ bedeutet (Laurentscher Satz).

II. *Gelten die genannten Voraussetzungen für das Innere des Kreises $0 \leqq |x| < R$, insbesondere diejenige der gleichmäßigen Differenzierbarkeit für jeden Bereich $0 \leqq |x| \leqq r < R$, so reduziert sich die obige Entwicklung auf eine für $0 \leqq |x| < R$ absolut konvergente Reihe nach positiven Potenzen, nämlich:*

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} {}_{\nu}\, a_\nu x^\nu, \tag{2}$$

wo wieder: $a_\nu = \mathfrak{M}((\mathfrak{e}\varrho)^{-\nu} \cdot f(\mathfrak{e}\varrho))$ und ϱ jetzt eine beliebige Zahl des Intervalls $0 < \varrho < R$ bedeutet (Cauchy-Taylorscher Satz).

Beweis zu I. Es bezeichne x' eine ganz beliebig im Innern des Kreisringes $R_0 < |x| < R$ angenommene Stelle und es werde gesetzt:

$$F(x) = x \cdot \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}. \tag{3}$$

Ist nun $f(x)$ für jede im Innern des Kreisringes gelegene Stelle *regulär*[1]), so gilt das gleiche offenbar auch für $F(x)$ als Produkt von

1) Da jede in irgendeinem abgeschlossenen Bereiche *reguläre* Funktion nach § 50, Nr. 1 als *gleichmäßig differenzierbar* erkannt wurde, so würde es selbstver-

$f(x) - f(x')$ und $\frac{x}{x-x'}$ mit eventueller Ausnahme der Stelle $x = x'$, da ja $\frac{x}{x-x'}$, abgesehen von der ebengenannten Stelle, durchweg regulär ist. Für die Umgebung dieser Stelle x' hat man andererseits:

$$f(x) = f(x') + \sum_1^\infty \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x') \cdot (x - x')^\nu,$$

und daher:

$$F(x) = x \cdot \sum_1^\infty \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x') \cdot (x - x')^{\nu - 1}, \tag{4}$$

so daß also $F(x)$ schließlich auch für $x = x'$ noch *regulär* ist.

Geht man andererseits von der Voraussetzung aus, daß $f(x)$ für jeden Bereich $r_0 \leqq |x| \leqq r$, wo: $R_0 < r_0 < r < R$, nur die Eigenschaft der *gleichmäßigen Differenzierbarkeit* besitze, so gilt das gleiche auch für $F(x)$ in der Umgebung jeder von x' verschiedenen Stelle, da ja der zu $f(x)$ hinzutretende Faktor $\frac{x}{x-x'}$ in dem besagten Umfange sogar *regulär*, also nach § 50, Nr. 1 (S. 378) auch *gleichmäßig differenzierbar* ist und somit der Satz von § 50, Nr. 3 über das Produkt zweier gleichmäßig differenzierbarer Funktionen in Kraft tritt.

An der in diesem Zusammenhange zunächst ausgeschlossenen Stelle $x = x'$ erscheint $F(x)$ unter der Form $\frac{0}{0}$, ist also daselbst überhaupt *nicht definiert*. Da aber

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x'} F(x) &= \lim_{x \to x'} x' \cdot \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \\ &= x' \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x' + h) - f(x')}{h} = x' \cdot f'(x'), \end{aligned} \tag{5}$$

also endlich und bestimmt ist, so bleibt $|F(x)|$ in der Umgebung der Stelle x' unter einer endlichen Schranke, so daß also auf Grund der am

ständlich genügen, den vorliegenden Beweis unter Voraussetzung dieser letzteren Eigenschaft zu führen. Es schien mir jedoch nützlich, ausdrücklich zu zeigen, wie sich der fragliche Beweis gestaltet, wenn man im Sinne der *Weierstraß*schen Funktionentheorie unter Ausschaltung des *infinitesimalen* Begriffes der gleichmäßigen *Differenzierbarkeit* die wesentlich *elementarer* geartete Eigenschaft des *regulären* Verhaltens zugrunde legt. Auf der anderen Seite wird die gleichzeitige Durchführung des Beweises unter der scheinbar weniger speziellen Voraussetzung der gleichmäßigen *Differenzierbarkeit* die Möglichkeit liefern, die vollkommene *Äquivalenz* der beiden zunächst so verschiedenartig erscheinenden Voraussetzungen nachträglich festzustellen und auf diese Weise die wünschenswerte Beziehung zwischen den Grundlagen der *Weierstraß*schen und der *Cauchy-Riemann*schen Funktionentheorie zu gewinnen.

Schlusse des vorigen Paragraphen gemachten Bemerkung die Anwendbarkeit des Satzes von der Konstanz des Mittelwertes durch das Vorhandensein der Stelle x' nicht beeinträchtigt wird.

Man hat also, wenn die Zahlen $r_0 > R_0$ und $r < R$ so, daß $r_0 < |x'| < r$, im übrigen beliebig angenommen werden, unter jeder der beiden in Betracht gezogenen Voraussetzungen:

$$(6) \qquad \mathfrak{M} F(er_0) = \mathfrak{M} F(er),$$

d. h.

$$\mathfrak{M}\left(e r_0 \cdot \frac{f(er_0) - f(x')}{er - x'}\right) = \mathfrak{M}\left(e r \cdot \frac{f(er) - f(x')}{er - x'}\right),$$

anders geschrieben:

$$\mathfrak{M}\frac{er_0 f(er_0)}{er_0 - x'} - \left(\mathfrak{M}\frac{er_0}{er_0 - x'}\right) \cdot f(x') = \mathfrak{M}\frac{er f(er)}{er - x'} - \left(\mathfrak{M}\frac{er}{er - x'}\right) \cdot f(x')$$

oder schließlich:

$$(7) \qquad \left(\mathfrak{M}\frac{er}{er - x'} - \mathfrak{M}\frac{er_0}{er_0 - x'}\right) \cdot f(x') = \mathfrak{M}\frac{er \cdot f(er)}{er - x'} - \mathfrak{M}\frac{er_0 \cdot f(er_0)}{er_0 - x'}.$$

Da $|x'| < r$, so ergibt sich durch Entwicklung von $\frac{er}{er - x'} = \frac{1}{1 - \frac{x'}{er}}$ nach positiven Potenzen von $\frac{x'}{er}$ mit Benutzung von § 35, Gl. (19), S. 274:

$$(8) \qquad \mathfrak{M}\frac{er}{er - x'} = \mathfrak{M}\sum_0^\infty{}_\nu \left(\frac{x'}{er}\right)^\nu = \sum_0^\infty{}_\nu (\mathfrak{M}(er)^{-\nu}) \cdot x'^\nu = 1,$$

(da außerdem nach § 35, Gl. (21/2): $\mathfrak{M}(er)^{\pm\nu} = 0$ für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, nur $\mathfrak{M}(er)^0 = 1$) und:

$$(9) \qquad \mathfrak{M}\frac{er f(er)}{er - x'} = \mathfrak{M}\left(\sum_0^\infty{}_\nu \left(\frac{x'}{er}\right)^\nu f(er)\right) = \sum_0^\infty{}_\nu \mathfrak{M}((er)^{-\nu} \cdot f(er)) \cdot x'^\nu.$$

Da andererseits $|x'| > r_0$, so findet man durch Entwicklung von $\frac{er_0}{er_0 - x'} = -\frac{er_0}{x'} \cdot \frac{1}{1 - \frac{er_0}{x'}}$ nach positiven Potenzen von $\frac{er_0}{x'}$:

$$(10) \qquad \mathfrak{M}\frac{er_0}{er_0 - x'} = -\mathfrak{M}\left(\sum_1^\infty{}_\nu \left(\frac{er_0}{x'}\right)^\nu\right) = -\sum_1^\infty{}_\nu (\mathfrak{M}(er_0)^\nu) \cdot x'^{-\nu} = 0,$$

$$(11) \qquad \mathfrak{M}\frac{er_0 f(er_0)}{er_0 - x'} = -\mathfrak{M}\left(\sum_1^\infty{}_\nu \left(\frac{er_0}{x'}\right)^\nu \cdot f(er_0)\right) = -\sum_1^\infty{}_\nu \mathfrak{M}((er_0)^\nu \cdot f(er_0)) \cdot x'^{-\nu}.$$

Durch Einführung der vier Entwicklungen (8)—(11) in die Gl. (7) ergibt sich:

$$(12) \qquad f(x') = \sum_0^\infty{}_\nu \mathfrak{M}((er)^{-\nu} \cdot f(er)) \cdot x'^\nu + \sum_1^\infty{}_\nu \mathfrak{M}((er_0)^\nu \cdot f(er_0)) \cdot x'^{-\nu}.$$

Nun lassen sich aber die jetzt als Koeffizienten der rechts stehenden Reihenentwicklungen auftretenden Mittelwerte (aus denen ja die in den ursprünglichen Mittelwerten auftretenden kritischen Nenner $\mathfrak{e}r - x'$ und $\mathfrak{e}r_0 - x'$ verschwunden sind) noch auf eine *gemeinsame* Form bringen. Da nämlich die Funktionen $x^{\pm\nu} \cdot f(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ für das ganze Innere des Kreisringes *regulär* bzw., wenn nur die gleichmäßige Differenzierbarkeit von $f(x)$ vorausgesetzt wurde, daselbst ebenfalls *gleichmäßig differenzierbar* sind[1]), so läßt sich der Satz von der Konstanz solcher Mittelwerte in der Weise anwenden, daß man r durch r_0 oder r_0 durch r oder auch beide Zahlen durch eine beliebige dem Intervall (r_0, r) angehörige Zahl ersetzen kann. Versteht man also unter ϱ irgendeine der Bedingung $r_0 \leqq \varrho \leqq r$ genügende Zahl, so hat man:

$$(13) \quad \mathfrak{M}((\mathfrak{e}r)^{-\nu} \cdot f(\mathfrak{e}r)) = \mathfrak{M}((\mathfrak{e}\varrho)^{-\nu} \cdot f(\mathfrak{e}\varrho)), \quad \mathfrak{M}((\mathfrak{e}r_0)^{\nu} f(\mathfrak{e}r_0)) = \mathfrak{M}((\mathfrak{e}\varrho)^{\nu} f(\mathfrak{e}\varrho)).$$

Schreibt man dann noch in (12) x statt x' und ersetzt in der zweiten der betreffenden Reihen den Index ν durch $-\nu$, so nimmt die obige Entwicklung die einfache Form an:

$$(\mathrm{I}) \qquad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu}\, \mathfrak{M}((\mathfrak{e}\varrho)^{-\nu} \cdot f(\mathfrak{e}\varrho)) \cdot x^{\nu},$$

und zwar gilt sie zunächst für $r_0 < |x| < r$, d. h. schließlich für $R_0 < |x| < R$[2]), während analog ϱ jede beliebige Zahl des Intervalls $R_0 < \varrho < R$ bedeuten kann.

Beweis zu II. Für den Fall, daß das reguläre Verhalten bzw. die gleichmäßige Differenzierbarkeit von $f(x)$ sich auf das Innere des Kreisgebietes $0 \leqq |x| < R$ erstreckt, findet man nach § 51, Gl. (11) (S. 384) für $0 < \varrho < R$ und $\nu \geqq 1$:

$$(14) \qquad \mathfrak{M}((\mathfrak{e}\varrho)^{\nu} \cdot f(\mathfrak{e}\varrho)) = 0.$$

Infolgedessen verschwinden für $0 < |x| < R$ in Gl. (I) alle Reihenglieder mit *negativem* ν, und die betreffende Entwicklung reduziert sich daher auf die folgende:

$$(\mathrm{II}) \qquad f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\, \mathfrak{M}((\mathfrak{e}\varrho)^{-\nu} \cdot f(\mathfrak{e}\varrho)) \cdot x^{\nu},$$

zunächst gültig für $0 < |x| < R$, schließlich aber, wie aus Gl. (10) des § 51 (S. 383) hervorgeht, auch für $x = 0$.

---

1) Vgl. das oben in bezug auf $\frac{x}{x - x'} \cdot f(x)$ Gesagte.

2) Denn, wie nahe man auch $|x|$ an R_0 oder an R annehmen mag, so gibt es immer noch (unendlich viele) Zahlen r_0, r von der Beschaffenheit, daß:

$$R_0 < r_0 < |x| < r < R.$$

Die Reihe (II) kann natürlich keine andere als die *Mac Laurin*sche Reihe (vgl. § 42, Nr. 1, Gl. (9), S. 318) sein. Denn ist $f(x)$ überhaupt als Summe einer Reihe von der Form $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ darstellbar, so findet man:

$$f(x) = f(0) + \sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(0) \cdot x^\nu$$

und, da eine solche Darstellung nur auf *eine* Weise möglich ist, durch Vergleichung mit (II):

$$(15)\qquad f(0) = \mathfrak{M} f(\mathfrak{e}\varrho), \quad \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(0) = \mathfrak{M}((\mathfrak{e}\varrho^{-\nu}) f(\mathfrak{e}\varrho)) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wie bereits bei früherer Gelegenheit sich ergeben hatte (a. a. O. Gl. (10)).

2. Die Entwicklungen (I) und (II) bleiben gültig, falls für eine endliche Anzahl von Stellen x' des in Frage kommenden Bereiches[1]) bezüglich der Beschaffenheit von $f(x)$ nur soviel feststeht, daß $f(x)$ daselbst *stetig* ist, so daß also:

$$(16)\qquad \lim_{x \to x'} f(x) = f(x').$$

Denn bedeutet x_0 irgendeine von den x' *verschiedene* Stelle, so bleibt für $F(x) = x_0 \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ die Konstanz des Mittelwertes $\mathfrak{M}(F(\mathfrak{e}r))$ ($R_0 < r < R$ bzw. $0 \leqq r < R$) nach Nr. 3 des vorigen Paragraphen trotz jener supponierten Ausnahmestellen erhalten, mithin auch die daraus gezogenen Folgerungen. Es gilt also wiederum die Entwicklung (I) bzw. (II) für alle Stellen x des Bereiches $R_0 < |x| < R$ bzw. $0 \leqq |x| < R$ mit vorläufigem Ausschluß jener Stellen x', für welche in der Tat das entsprechende Resultat nicht in gleicher Weise festgestellt werden kann, weil die geeigneten Voraussetzungen für das Bestehen der hierzu erforderlichen Gleichungen (4) bzw. (5) nicht vorhanden sind. Da aber für alle x in beliebiger Nähe jener Stellen x' eine Entwicklung von der Form besteht:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^\nu a_\nu x^\nu \qquad \text{bzw.} \qquad f(x) = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu,$$

so findet man infolge der *Stetigkeit* einer jeden Potenzreihe, daß:

$$(17)\qquad \lim_{x \to x'} f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^\nu a_\nu x'^\nu \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to x'} f(x) = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x'^\nu$$

und daher schließlich in Verbindung mit der Voraussetzung (16):

$$(18)\qquad f(x') = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^\nu a_\nu x'^\nu \qquad \text{bzw.} \qquad f(x') = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x'^\nu,$$

---

1) Im Falle (II) kann insbesondere die Stelle 0 zu diesen Stellen x' gehören.

d. h. die fraglichen Entwicklungen gelten auch für jene Stellen x'. Mit anderen Worten: jene *vorläufig ausgenommenen* Stellen sind in Wahrheit für $f(x)$ *keine Ausnahmestellen*, vielmehr, wie die Gl. (20) lehren, geradeso wie alle übrigen Innenpunkte des in Frage kommenden Bereiches, Stellen *regulären Verhaltens.*

3. Es kann der Fall eintreten, daß es freisteht, die mit R bezeichnete obere Schranke für $|x|$, also den Radius des *äußeren* bzw. des *einzigen* Begrenzungskreises unbeschränkt zu vergrößern. Bestehen in diesem Sinne die gemachten Voraussetzungen im Falle (I), also für einen Bereich $R_0 < |x| < R$, d. h. ist $f(x)$ eindeutig definiert und regulär bzw. gleichmäßig differenzierbar in jedem noch so großen, der Bedingung $|x| > R_0$ genügenden endlichen Bereiche, so ist die Entwicklung

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} a_\nu x^\nu, \quad \text{wo:} \quad a_\nu = \mathfrak{M}((e\varrho)^{-\nu} \cdot f(e\varrho)),$$

konvergent und gültig für jedes noch so große, der Bedingung $|x| > R_0$ genügende x. Dagegen kann sie, falls nicht etwa *alle* a_ν für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ *Null* sein sollten, keinesfalls für $|x| > R_0$ *beschränkt* bleiben, da ja (nach § 38, Gl. (2a), S. 282):

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \left| \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu x^\nu \right| = +\infty \text{ [1]}$$

und andererseits:

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{-\infty}^{0}{}^{\nu} a_\nu x^\nu = \lim_{y = 0} \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} a_{-\nu} y^\nu = a_0,$$

also schließlich:

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \left| \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} a_\nu x^\nu \right| = +\infty.$$

Hieraus folgt aber, daß alle a_ν mit positivem Index $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ *verschwinden müssen,* falls zu den für $f(x)$ bereits bestehenden Bedingungen noch die hinzutritt, daß $|f(x)|$ für $|x| \geqq r > R_0$ unter einer endlichen Schranke bleibt. Somit ergibt sich die folgende Vervollkommnung des in § 48, Nr. 6 (S. 367 ff.) gewonnenen Resultats[2]):

Ist $f(x)$ eindeutig definiert und regulär bzw. gleichmäßig differenzierbar in jedem der Bedingung $|x| > R_0 > 0$ genügenden

---

1) Reduziert sich die Anzahl der Glieder auf eine *endliche* Zahl n, so hat man sogar:

$$\lim_{x \to \infty} \left| \sum_{1}^{n}{}^{\nu} a_\nu x^\nu \right| = +\infty.$$

2) Vgl. insbesondere die Fußnote 2, S. 371.

(noch so großen) endlichen Bereiche und bleibt $|f(x)|$ *für* $|x| \geqq r > R_0$ *unter einer endlichen Schranke, so gilt für* $|x| > R_0$ *die Entwicklung:*

$$(19)\quad f(x) = \sum_0^\infty{}^\nu \mathfrak{M}((\mathfrak{e}\varrho)^\nu \cdot f(\mathfrak{e}\varrho)) \cdot x^{-\nu} \qquad (\varrho > R_0,\ \textit{sonst beliebig}),$$

so daß sich also $f(x)$ *auch noch für* $x = \infty$ *regulär verhält.* —

Wir betrachten noch das Analogon für den Fall (II). Bleiben hier, also für einen Bereich von der Form $0 \leqq |x| < R$ die gemachten Voraussetzungen erhalten, auch wenn man R unbegrenzt vergrößert, so ist die entsprechende Entwicklung:

$$(20)\qquad f(x) = \sum_0^\infty{}^\nu \mathfrak{M}((\mathfrak{e}\varrho)^{-\nu} \cdot f(\mathfrak{e}\varrho)) \cdot x^\nu \qquad (\varrho > 0,\ \textit{sonst beliebig}),$$

falls sie überhaupt unendlich viele Glieder enthält, *beständig konvergent.* Da nun wiederum:

$$(21)\qquad \overline{\lim_{x\to\infty}} \left| \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu \right| = +\infty, \text{ bzw. } \lim_{x\to\infty} \left| \sum_0^n{}^\nu a_\nu x^\nu \right| = +\infty,$$

so folgt weiter, daß sich jene Reihe auf das konstante Anfangsglied reduzieren muß, falls noch feststeht, daß $|f(x)|$ stets unter einer endlichen Schranke bleibt. Somit gewinnt man den folgenden wichtigen Satz:

Ist die Funktion $f(x)$ *in jedem (noch so großen) endlichen Bereiche eindeutig definiert und regulär bzw. gleichmäßig differenzierbar, so ist sie eine ganze rationale oder transzendente Funktion und sie reduziert sich auf eine Konstante, falls noch feststeht, daß* $|f(x)|$ *stets unter einer endlichen Schranke bleibt.*

4. Substituiert man in dem Hauptsatze von Nr. 1 dieses Paragraphen $x - x_0$ statt x und schreibt schließlich wieder $f(x)$ statt $f(x - x_0)$, so nimmt jener Satz die folgende etwas allgemeinere Form an (bei welcher also jetzt der beliebig anzunehmende Wert $x = x_0$ an Stelle von $x = 0$ die Rolle des Mittelpunktes übernimmt):

Ia. *Ist die Funktion* $f(x)$ *in dem Kreisringe* $R_0 < |x - x_0| < R$ *eindeutig definiert und regulär bzw. in jedem Bereiche* $R_0 < r_0 \leqq |x - x_0| \leqq r < R$ *gleichmäßig differenzierbar*[1]), *so gilt für* $R_0 < |x - x_0| < R$ *die Entwicklung:*

$$(\text{Ia})\qquad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^\nu b_\nu (x - x_0)^\nu,$$

wo: $b_\nu = \mathfrak{M}((\mathfrak{e}\varrho)^{-\nu} \cdot f(x_0 + \mathfrak{e}\varrho))$ *und* $R_0 < \varrho < R$.

---

1) Dabei wären wieder noch Ausnahmen in dem oben (s. Nr. 2) näher bezeichneten Umfange zulässig.

II a. *Gelten die genannten Voraussetzungen für das Innere des Kreises* $0 \leqq |x - x_0| < R$, *so reduziert sich die obige Entwicklung auf die folgende, für* $0 \leqq |x - x_0| < R$ *gültige:*

$$\text{(IIa)} \qquad f(x) = \sum_0^{\infty} {}^{\nu}\, b_\nu (x - x_0)^\nu,$$

wo: $b_\nu = \mathfrak{M}((\mathfrak{e}\varrho)^{-\nu} \cdot f(x_0 + \mathfrak{e}\varrho))$ *und* $0 < \varrho < R$.

Die letzte Reihe muß offenbar identisch sein mit der *Taylor*schen Reihe (vgl. § 42, Gl. ((8), S. 318) für das zur Stelle x_0 gehörige Funktionselement von $f(x)$.

§ 53. Äquivalenz zwischen gleichmäßiger Differenzierbarkeit und regulärem Verhalten. — Die Cauchyschen[1]) Differentialgleichungen. — Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung. — Zurückführung der gleichmäßigen auf stetige Differenzierbarkeit.

1. Angenommen, es sei $f(x)$ eindeutig definiert im Innern eines *zusammenhängenden* Bereiches $\mathfrak{B}$ und in der Umgebung jeder daselbst gelegenen Stelle x_0 *gleichmäßig differenzierbar.*[2]) Dann folgt aus dem letzten Satze des vorigen Paragraphen, daß $f(x)$ für jede solche Stelle x_0 *regulären* Verhaltens ist und somit nach dem Hauptsatze von § 48, Nr. 4 und 6 (S. 366/71) eine im Innern von $\mathfrak{B}$ *eindeutige analytische* Funktion repräsentiert. Somit ergibt sich das folgende bemerkenswerte Resultat:

> *Die in irgendeinem zusammenhängenden Bereiche eindeutig definierten gleichmäßig differenzierbaren Funktionen bilden keine allgemeinere Klasse als die daselbst eindeutigen analytischen Funktionen regulären Verhaltens.*

Zugleich folgt aus § 49, Nr. 3 (S. 374):

> *Besteht der Bereich gleichmäßiger Differenzierbarkeit für irgendeinen arithmetischen Ausdruck in x aus mehreren getrennten Stücken, so kann derselbe in diesen einzelnen Teilbereichen ganz verschiedene analytische Funktionen repräsentieren.*

2. Da es auf Grund der vorstehenden Ergebnisse zulässig erscheint, als *Ausgangspunkt* für die Definition der *analytischen* Funktionen einer komplexen Veränderlichen statt der Voraussetzung des *regulären Ver-*

---

1) Ich ziehe diese Bezeichnung der Kürze halber der zumeist üblichen: „*Cauchy-Riemann*sche" Differentialgleichungen vor.

2) Sollte der Bereich die Stelle $x = \infty$ im Innern enthalten, so ist für die „*gleichmäßige Differenzierbarkeit in der Umgebung der Stelle $x = \infty$*" (analog wie für die Regularität) das Verhalten von $f\left(\frac{1}{y}\right)$ in der Umgebung von $y = 0$ maßgebend.

haltens, also der Präexistenz eines *ganz speziellen arithmetischen Ausdruckes* (nämlich einer konvergenten Potenzreihe), ohne überhaupt von vornherein an *irgendeine* bestimmte arithmetische *Ausdrucksform* anzuknüpfen, lediglich die *Eigenschaft* der *gleichmäßigen Differenzierbarkeit* zugrunde zu legen, so erscheint es wünschenswert, diesen in bezug auf seine Formulierung etwas schwerfälligen Begriff noch durch einen damit gleichwertigen, begrifflich etwas einfacheren zu ersetzen

Hierzu bemerken wir zunächst folgendes. Da eine eindeutig definierte Funktion für alle Stellen regulären Verhaltens Derivierte jeder beliebigen Ordnung und ebenfalls regulären Verhaltens besitzt, so folgt jetzt aus der gleichmäßigen Differenzierbarkeit die Existenz von Differentialquotienten jeder beliebigen Ordnung, insbesondere auch die *Stetigkeit* jenes *ersten* Differentialquotienten. Wir werden nun nach einigen Vorbereitungen zeigen, daß auch umgekehrt die *Stetigkeit* des ersten Differentialquotienten die *gleichmäßige* Differenzierbarkeit (mit allen ihren Konsequenzen) nach sich zieht.

Angenommen, es stehe für die eindeutig definierte Funktion $f(x)$ an irgendeiner Stelle x die *Existenz* eines ersten Differentialquotienten $f'(x)$ in dem früher angegebenen Sinne fest, d. h. man habe:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x), \tag{1}$$

wenn einer gewissen Umgebung der Stelle x die Zahl $x + h$ beliebig entnommen wird und sodann $h = \sigma + \tau i$ in ganz beliebiger Weise gegen Null konvergiert. Es steht daher insbesondere frei, h nur reelle oder rein imaginäre Werte annehmen zu lassen, also τ bzw. σ von vornherein gleich Null zu setzen, so daß also, wenn man noch

$$x = \xi + \eta i$$

setzt, aus der *allgemeinen* Definition (1) des Differentialquotienten $f'(x)$ sich die beiden *spezielleren* Beziehungen ergeben:

$$f'(x) \begin{cases} = \lim\limits_{\sigma \to \pm 0} \dfrac{f(\xi + \sigma + \eta i) - f(\xi + \eta i)}{\sigma} \\ = \lim\limits_{\tau \to \pm 0} \dfrac{f(\xi + (\eta + \tau) i) - f(\xi + \eta i)}{\tau i}. \end{cases} \tag{2}$$

Da man andererseits $f(\xi + \eta i)$ als eine *komplexe* Funktion der beiden *reellen* Veränderlichen ξ und η auffassen kann, etwa:

$$f(\xi + \eta i) = \varphi(\xi, \eta) + i \cdot \psi(\xi, \eta), \tag{3}$$

so lassen sich die Gl. (2) in die folgende Form setzen:

$$f'(x) \begin{cases} = \lim\limits_{\sigma \to \pm 0} \dfrac{\varphi(\xi + \sigma, \eta) - \varphi(\xi, \eta)}{\sigma} + i \lim\limits_{\sigma \to \pm 0} \dfrac{\psi(\xi + \sigma, \eta) - \psi(\xi, \eta)}{\sigma} \\ = \dfrac{1}{i} \lim\limits_{\tau \to \pm 0} \dfrac{\varphi(\xi, \eta + \tau) - \varphi(\xi, \eta)}{\tau} + \lim\limits_{\tau \to \pm 0} \dfrac{\psi(\xi, \eta + \tau) - \psi(\xi, \eta)}{\tau}, \end{cases} \tag{4}$$

wo die nunmehr auftretenden, lediglich durch Trennung des Reellen und Imaginären aus den beiden ursprünglichen hervorgegangenen Grenzwerte wirklich *existieren*, d. h bestimmte *reelle* Zahlen (inkl. 0) vorstellen.

Bedeutet nun $\varphi(\xi)$ eine reelle Funktion der reellen Veränderlichen ξ, so wird der Grenzwert

$$\lim_{\sigma \to \pm 0} \frac{\varphi(\xi + \sigma) - \varphi(\xi)}{\sigma}$$

wiederum als *Differentialquotient* von $\varphi(\xi)$ in bezug auf die *reelle* Veränderliche ξ bezeichnet. Und man bezeichnet ferner, wenn $\varphi(\xi, \eta)$ wie oben eine reelle Funktion der beiden reellen Veränderlichen ξ, η vorstellt, den ganz analog gebildeten Grenzwert

$$\lim_{\sigma \to \pm 0} \frac{\varphi(\xi + \sigma, \eta) - \varphi(\xi, \eta)}{\sigma}$$

als *partiellen Differentialquotienten* von $\varphi(\xi, \eta)$ in bezug auf die reelle Veränderliche ξ (*partiell*, weil bei diesem Grenzprozeß nur die *eine* der beiden Variablen, nämlich ξ, in Anspruch genommen wird, während die andere dabei konstant bleibt) und in entsprechender Weise den Grenzwert

$$\lim_{\tau \to \pm 0} \frac{\varphi(\xi, \eta + \tau) - \varphi(\xi, \eta)}{\tau}$$

als *partiellen Differentialquotienten* von $\varphi(\xi, \eta)$ in bezug auf η.

Führt man nun die Bezeichnungen ein[1]):

$$(5)\begin{cases} \lim\limits_{\sigma \to \pm 0} \dfrac{\varphi(\xi+\sigma, \eta) - \varphi(\xi, \eta)}{\sigma} = \varphi_1(\xi, \eta), & \lim\limits_{\tau \to \pm 0} \dfrac{\varphi(\xi, \eta+\tau) - \varphi(\xi, \eta)}{\tau} = \varphi_2(\xi, \eta) \\ \lim\limits_{\sigma \to \pm 0} \dfrac{\psi(\xi+\sigma, \eta) - \psi(\xi, \eta)}{\sigma} = \psi_1(\xi, \eta) & \lim\limits_{\tau \to \pm 0} \dfrac{\psi(\xi, \eta+\tau) - \psi(\xi, \eta)}{\tau} = \psi_2(\xi, \eta), \end{cases}$$

so ergibt sich durch Gleichsetzen der beiden rechten Seiten der Gl. (4) die Beziehung:

$$(6) \qquad \varphi_1(\xi, \eta) + i \cdot \psi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{i} \varphi_2(\xi, \eta) + \psi_2(\xi, \eta),$$

welche, wenn man in analoger Weise mit $f_1(\xi + \eta i)$, $f_2(\xi + \eta i)$ die *partiellen* Differentialquotienten der *komplexen* Funktion $f(\xi + \eta i) \equiv \varphi(\xi, \eta) + i \cdot \psi(\xi, \eta)$ der *reellen* Veränderlichen ξ, η in bezug auf ξ bzw. η bezeichnet, die kürzere Form annimmt:

$$(7) \qquad f_2(\xi + \eta i) = i f_1(\xi + \eta i)\ ^{2)},$$

1) In der Differentialrechnung und deren Anwendungen findet man neben den hier gebrauchten Bezeichnungen (bei denen also der Index 1 bzw. 2 die Differentiation in bezug auf die erste bzw. zweite Veränderliche andeuten soll) die ausführlicheren:

$$\varphi_1(\xi, \eta) = \frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \quad \varphi_2(\xi, \eta) = \frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad \text{usf.}$$

2) Ausführlicher in der Schreibweise der vorigen Fußnote:

$$\frac{\partial f(\xi + \eta i)}{\partial \eta} = i \cdot \frac{\partial f(\xi + \eta i)}{\partial \xi}$$

oder aber durch Trennung des Reellen und Imaginären in die zwei Relationen („*die Cauchyschen Differentialgleichungen*") zerfällt:

$$(8)\qquad \begin{cases} \psi_1(\xi, \eta) = -\varphi_2(\xi, \eta) \\ \psi_2(\xi, \eta) = \quad \varphi_1(\xi, \eta). \end{cases}$$

Wir finden somit:

Besitzt die Funktion $f(x)$ für irgendeine Stelle $x = \xi + \eta i$ einen bestimmten Differentialquotienten $f'(x)$ (im komplexen Sinne) und wird der reelle Teil von $f(x)$ mit $\varphi(\xi, \eta)$, der imaginäre mit $i\psi(\xi, \eta)$ bezeichnet, so existieren die auf die reellen Veränderlichen sich beziehenden partiellen Differentialquotienten:

$$(9)\qquad \begin{cases} f_1(\xi + \eta i) = \varphi_1(\xi, \eta) + i \cdot \psi_1(\xi, \eta) \\ f_2(\xi + \eta i) = \varphi_2(\xi, \eta) + i \cdot \psi_2(\xi, \eta) \end{cases}$$

und genügen den Beziehungen (7) *bzw.* (8). *Zugleich folgt dann, daß die auf Grund der Definition von $f'(x)$ (Gl.* (1)*) bestehenden Relationen (s. Gl.* (4)*)* [1])

$$(10)\qquad f'(x) \begin{cases} = \varphi_1(\xi, \eta) + i \cdot \psi_1(\xi, \eta) \\ = \psi_2(\xi, \eta) - i \cdot \varphi_2(\xi, \eta) \end{cases}$$

mit Benutzung von (8) *sich auch in die Form setzen lassen:*

$$(11)\qquad f'(x) \begin{cases} = \varphi_1(\xi, \eta) - i\varphi_2(\xi, \eta) \\ = \psi_2(\xi, \eta) + i\psi_1(\xi, \eta) \end{cases}$$

d. h. der Differentialquotient $f'(x)$ läßt sich auch durch die partiellen Differentialquotienten des reellen Teils $\varphi(\xi, \eta)$ oder des imaginären Teils $\psi(\xi, \eta)$ allein ausdrücken

3. Um die oben angekündigte Zurückführung der *gleichmäßigen* Differenzierbarkeit auf die *Stetigkeit* des Differentialquotienten $f'(x)$ zu bewerkstelligen, beweisen wir noch den folgenden, der Differentialrechnung (mit reellen Veränderlichen) angehörenden *Hilfssatz* (sog. *Mittelwertsatz der Differentialrechnung*):

---

1) Anders geschrieben:

$$f'(x) \begin{cases} = f_1(\xi + \eta i) \\ = \frac{1}{i} f_2(\xi + \eta i) \end{cases}$$

oder auch:

$$f'(x) \begin{cases} = \frac{\partial f(x)}{\partial \xi} \\ = \frac{1}{i}\ \frac{\partial f(x)}{\partial \eta}. \end{cases}$$

oder kürzer:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \eta} = i\ \frac{\partial f(x)}{\partial \xi}.$$

Ist $\varphi(\xi)$ eine im Intervalle $\xi_0 \leqq \xi \leqq \xi_1$ eindeutig definierte und stetige Funktion der reellen Veränderlichen ξ, welche für jedes der Bedingung $\xi_0 < \xi < \xi_1$ genügende ξ einen bestimmten Differentialquotienten $\varphi_1(\xi)$ besitzt[1]*, so existiert im Innern des genannten Intervalls mindestens eine Stelle ξ' von der Beschaffenheit, daß:*

$$\frac{\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_0)}{\xi_1 - \xi_0} = \varphi_1(\xi').$$

Beweis. Es sei zunächst $\Phi(\xi)$ eine Funktion, welche denselben Bedingungen genügt wie $\varphi(\xi)$, außerdem aber noch der folgenden:

$$\Phi(\xi_0) = \Phi(\xi_1) = 0. \tag{12}$$

Dann soll gezeigt werden, es existiert im Innern des fraglichen Intervalls mindestens eine Stelle ξ', für welche der Differentialquotient der Beziehung genügt:

$$\Phi_1(\xi') = 0.$$ [2]

Das letztere findet offenbar für *jede* Stelle des Intervalls statt, wenn $\Phi(\xi)$ daselbst *konstant*, d. h. mit Rücksicht auf die vorausgesetzte Stetigkeit und die Bedingung (12) beständig *Null* ist. Sieht man von diesem (trivialen) Falle ab, so muß $\Phi(\xi)$ für $\xi_0 < \xi < \xi_1$ auch positive oder negative Werte bzw. Werte von beiderlei Art annehmen. Alsdann besitzt aber die *stetige* Funktion $\Phi(\xi)$ im Innern des Intervalls zum mindesten ein bzw. ein erstes reales (positives) *Maximum* oder (negatives) *Minimum*, eventuell sowohl das eine als das andere (s. § 7, Nr. 1, S. 52). Man hat sodann, wenn ξ' die (bei wachsendem ξ) *erste* Maximumsstelle bedeutet, bei hinlänglich kleinem $\sigma > 0$:

$$\Phi(\xi' + \sigma) - \Phi(\xi') \leqq 0\text{ }^{3)}, \quad \Phi(\xi' - \sigma) - \Phi(\xi') < 0,$$

und analog im Falle eines *Minimums:*

$$\Phi(\xi' + \sigma) - \Phi(\xi') \geqq 0\text{ }^{3)}, \quad \Phi(\xi' - \sigma) - \Phi(\xi') > 0.$$

In jedem dieser beiden Fälle haben also die Quotienten:

$$\frac{\Phi(\xi' + \sigma) - \Phi(\xi')}{\sigma}, \quad \frac{\Phi(\xi' - \sigma) - \Phi(\xi')}{-\sigma},$$

1) Ich vermeide absichtlich für jenen Differentialquotienten (sc. im ausschließlich *reellen* Sinne) die in der Differentialrechnung übliche Bezeichnung $\varphi'(\xi)$, da ich diese Art der Bezeichnung in dem vorliegenden Zusammenhange ausschließlich für die *komplexe* Differentiation vorbehalten will.

2) Dieser besondere Fall des fraglichen Mittelwertsatzes wird gewöhnlich als *Rolle*scher Satz bezeichnet.

3) Es könnte ja $\Phi(\xi)$ nach Erreichung jenes Maximums oder Minimums zunächst noch konstant bleiben, in welchem Falle dann das *Gleichheits*zeichen zu gelten hätte.

sofern der erste derselben nicht verschwindet, *entgegengesetztes* Vorzeichen. Da aber $\Phi(\xi)$ an der Stelle $\xi = \xi'$ einen bestimmten Differentialquotienten besitzt, also:

$$\lim_{\sigma=+0} \frac{\Phi(\xi'+\sigma)-\Phi(\xi')}{\sigma} = \lim_{\sigma=+0} \frac{\Phi(\xi'-\sigma)-\Phi(\xi')}{-\sigma},$$

sein muß, so können diese Grenzwerte nicht von Null verschieden ausfallen, d. h. man findet, wie behauptet:

$$\Phi_1(\xi') = 0. \tag{13}$$

Nun werde gesetzt:

$$\begin{aligned}\Phi(\xi) &= \varphi(\xi) - \varphi(\xi_0) - \frac{\varphi(\xi_1)-\varphi(\xi_0)}{\xi_1-\xi_0}(\xi-\xi_0) \\ &= \varphi(\xi) - \frac{\varphi(\xi_1)-\varphi(\xi_0)}{\xi_1-\xi_0}\cdot\xi - \left(\varphi(\xi_0) - \frac{\varphi(\xi_1)-\varphi(\xi_0)}{\xi_1-\xi_0}\cdot\xi_0\right),\end{aligned}$$

ein Ausdruck, der offenbar die für $\Phi(\xi)$ erforderlichen Bedingungen befriedigt. Denn man hat, übereinstimmend mit Gl. (12):

$$\Phi(\xi_0) = \Phi(\xi_1) = 0,$$

andererseits unterscheidet sich $\Phi(\xi)$ von $\varphi(\xi)$ nur um eine Linearfunktion und besitzt also in dem gleichen Umfange die Eigenschaften der Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Insbesondere ergibt sich:

$$\Phi_1(\xi) = \varphi_1(\xi) - \frac{\varphi(\xi_1)-\varphi(\xi_0)}{\xi_1-\xi_0},$$

so daß Gl. (13) die Beziehung liefert:

$$\varphi_1(\xi') = \frac{\varphi(\xi_1)-\varphi(\xi_0)}{\xi_1-\xi_0}, \tag{14}$$

womit die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist. Da es freisteht ξ_0 und ξ_1 zu vertauschen, ohne daß die Beziehung (14) eine Änderung erleidet, so gilt sie offenbar auch unter der Voraussetzung $\xi_0 > \xi_1$.

Setzt man $\xi_1 = \xi_0 + \sigma$ (wo jetzt $\sigma \gtrless 0$), also $\xi' = \xi_0 + \vartheta\sigma$, wo ϑ eine passend gewählte Zahl des Intervalls $0 < \vartheta < 1$ bedeutet, so nimmt Gl. (14) die Form an

$$\frac{\varphi(\xi_0+\sigma)-\varphi(\xi_0)}{\sigma} = \varphi_1(\xi_0+\vartheta\sigma) \qquad (0<\vartheta<1). \tag{15}$$

Man kann also unter den angegebenen Voraussetzungen einen *Differenzenquotienten* allemal ersetzen durch einen *Differentialquotienten*, dessen Argument aus einem gewissen *Mittelwert* zwischen dem Anfangs- und Endwert der unabhängigen Variablen besteht.

4. Es werde jetzt angenommen, die Funktion $f(x)$ der komplexen Veränderlichen $x = \xi + \eta i$ besitze im Innern eines gewissen Bereiches $\mathfrak{B}$ einen bestimmten, nicht nur endlichen, sondern auch *stetigen* Differential-

quotienten $f'(x)$. Man hat alsdann mit Beibehaltung der früher benutzten Bezeichnungen (s. Gl. (11)):

$$f'(x) \begin{cases} = \varphi_1(\xi, \eta) - i \cdot \varphi_2(\xi, \eta) \\ = \psi_2(\xi, \eta) + i \cdot \psi_1(\xi, \eta), \end{cases} \tag{11}$$

und zwar sind auf Grund der gemachten Stetigkeitsvoraussetzung $\varphi_1(\xi, \eta)$, $\varphi_2(\xi, \eta)$, $\psi_1(\xi, \eta)$, $\psi_2(\xi, \eta)$ im Innern und auf der Begrenzung eines jeden Bereiches $\mathfrak{B}'$ *gleichmäßig stetige* Funktionen der reellen Veränderlichen ξ und η.

Aus der für $h = \sigma + \tau i$ bestehenden Beziehung:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\varphi(\xi+\sigma, \eta+\tau) - \varphi(\xi, \eta)}{\sigma + \tau i} + i \cdot \frac{\psi(\xi+\sigma, \eta+\tau) - \psi(\xi, \eta)}{\sigma + \tau i} \tag{16a}$$

folgt zunächst durch identische Umformung:

$$\begin{aligned} &\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \left(\frac{\varphi(\xi+\sigma, \eta+\tau) - \varphi(\xi, \eta+\tau)}{\sigma} + i \frac{\psi(\xi+\sigma, \eta+\tau) - \psi(\xi, \eta+\tau)}{\sigma}\right) \cdot \frac{\sigma}{\sigma + \tau i} \\ &+ \left(\frac{\varphi(\xi, \eta+\tau) - \varphi(\xi, \eta)}{\tau} + i \frac{\psi(\xi, \eta+\tau) - \psi(\xi, \eta)}{\tau}\right) \cdot \frac{\tau}{\sigma + \tau i}. \end{aligned} \tag{16b}$$

Die einzelnen Differenzenquotienten sind jetzt so beschaffen, daß bei der Differenzenbildung nur die *eine* Variable eine Veränderung aufweist, die andere einen zwar beliebig innerhalb gewisser Grenzen anzunehmenden, aber nach erfolgter Annahme unveränderlichen Wert besitzt. Man kann daher auf jeden dieser Quotienten den zuvor bewiesenen Mittelwertsatz anwenden. Nimmt man ξ, η im Innern oder auf der Begrenzung eines innerhalb $\mathfrak{B}$ liegenden Bereiches $\mathfrak{B}'$ beliebig an und schränkt $|\sigma|$ und $|\tau|$ von vornherein so ein, daß das ganze Rechteck mit den Eckpunkten (ξ, η), $(\xi + \sigma, \eta)$, $(\xi + \sigma, \eta + \tau)$, $(\xi, \eta + \tau)$ noch in das Innere von $\mathfrak{B}'$ fällt, so findet man z. B. für den ersten der in Gl. (16b) auftretenden Differenzenquotienten:

$$\frac{\varphi(\xi+\sigma, \eta+\tau) - \varphi(\xi, \eta+\tau)}{\sigma} = \varphi_1(\xi + \vartheta\sigma, \eta + \tau), \quad \text{wo } 0 < \vartheta < 1. \tag{17a}$$

Bei veränderter Wahl von ξ, η, σ, τ innerhalb der angegebenen Grenzen wird sich ϑ zwar gleichfalls ändern, ohne jedoch jemals das Intervall (0,1) verlassen zu können.

Durch Anwendung der analogen Umformung auf die drei anderen Differenzenquotienten auf der rechten Seite der Gleichung (16b) nimmt diese folgende Form an:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= (\varphi_1(\xi + \vartheta\sigma, \eta + \tau) + i \cdot \psi_1(\xi + \vartheta'\sigma, \eta + \tau)) \cdot \frac{\sigma}{\sigma + \tau i} \\ &+ (\varphi_2(\xi, \eta + \zeta\tau) + i \cdot \psi_2(\xi, \eta + \zeta'\tau)) \cdot \frac{\tau}{\sigma + \tau i} \end{aligned} \tag{17b}$$

wo:

$$0 < \vartheta < 1, \qquad 0 < \vartheta' < 1, \qquad 0 < \zeta < 1, \qquad 0 < \zeta' < 1.$$

Führt man in dem letzten Summanden den Faktor $\frac{\tau i}{\sigma + \tau i}$ an Stelle von $\frac{\tau}{\sigma + \tau i}$ ein und drückt ψ_1, ψ_2 mit Hilfe der Gleichungen (8) durch φ_2, φ_1 aus, so ergibt sich weiter:

$$(18) \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = (\varphi_1(\xi + \vartheta\sigma, \eta + \tau) - i \cdot \varphi_2(\xi + \vartheta'\sigma, \eta + \tau)) \cdot \frac{\sigma}{\sigma + \tau i}$$
$$+ (\varphi_1(\xi, \eta + \zeta'\tau) - i \cdot \varphi_2(\xi, \eta + \zeta\tau)) \cdot \frac{\tau i}{\sigma + \tau i}$$

und wenn man von dieser Gleichung die folgende (s. Gl. (11))

$$f'(x) = (\varphi_1(\xi, \eta) - i \cdot \varphi_2(\xi, \eta)) \cdot \frac{\sigma + \tau i}{\sigma + \tau i}$$

subtrahiert:

$$(19) \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)$$
$$= \{(\varphi_1(\xi + \vartheta\sigma, \eta + \tau) - \varphi_1(\xi, \eta)) - i \cdot (\varphi_2(\xi + \vartheta'\sigma, \eta + \tau) - \varphi_2(\xi, \eta))\} \cdot \frac{\sigma}{\sigma + \tau i}$$
$$+ \{(\varphi_1(\xi_1, \eta + \zeta'\tau) - \varphi_1(\xi, \eta)) - i \cdot (\varphi_2(\xi, \eta + \xi\tau) - \varphi_2(\zeta, \eta))\} \cdot \frac{\tau i}{\sigma + \tau i} \cdot$$

Infolge der gleichmäßigen Stetigkeit von $\varphi_1(\xi, \eta)$, $\varphi_2(\xi, \eta)$ läßt sich $\delta > 0$ zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ so fixieren, daß für alle ξ, η des mit $\mathfrak{B}'$ bezeichneten Bereiches, wenn nur $|\sigma| \leqq \delta$, $|\tau| \leqq \delta$:

$$(20) \qquad |\varphi_\varkappa(\xi + \sigma, \eta + \tau) - \varphi_\varkappa(\xi, \eta)| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (\varkappa = 1, 2).$$

Nimmt man also $|h| \leqq \delta$, in welchem Falle *a fortiori* $|\sigma| \leqq \delta$, $|\tau| \leqq \delta$, und beachtet, daß:

$$\left|\frac{\sigma}{\sigma + \tau i}\right| \leqq 1, \qquad \left|\frac{\tau i}{\sigma + \tau i}\right| \leqq 1,$$

so folgt aus Gl. (19), daß für alle x des Bereiches $\mathfrak{B}'$ eine Beziehung von der Form besteht:

$$(21) \qquad \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right| < \varepsilon \qquad \text{für } |h| \leqq \delta,$$

d. h. aber in der Tat: $f(x)$ ist für jeden solchen Bereich $\mathfrak{B}'$ *gleichmäßig* differenzierbar.

Hiernach ergibt sich also die *Stetigkeit* des ersten Differentialquotienten, welche in Nr. 2 als eine *Folge* und somit als eine *notwendige* Bedingung der *gleichmäßigen* Differenzierbarkeit erkannt wurde, auch als *hinreichende* Bedingung. Und es läßt sich somit das in Nr. 1 dieses Paragraphen ausgesprochene Resultat jetzt auch so formulieren:

Jede im Innern eines zusammenhängenden Bereiches eindeutig definierte und „stetig differenzierbare", d. h. mit einem stetigen Differentialquotienten versehene Funktion einer komplexen Veränderlichen ist eine in dem betreffenden Bereiche[1]) *eindeutige analytische Funktion regulären Verhaltens.*

§ 54. Die Cauchyschen Differentialgleichungen als die charakteristischen Beziehungen für den reellen und imaginären Teil einer analytischen Funktion regulären Verhaltens. — Die Laplacesche Differentialgleichung. — Bestimmung einer regulären Funktion mit gegebenem reellen Teil.

1. An das Endresultat des vorigen Paragraphen knüpfen wir zunächst noch die folgenden Bemerkungen. Bei seiner Herleitung wurde ausdrücklich die *Existenz* und *Stetigkeit* von $f'(x)$ vorausgesetzt und auf dieser Grundlage die *gleichmäßige* Differenzierbarkeit von $f(x)$ erwiesen. Dabei ergab sich, wenn gesetzt wird:

$$(1) \qquad x = \xi + \eta i \qquad f(x) = \varphi(\xi, \eta) + i \cdot \psi(\xi, \eta),$$

als *Folgerung* die *Existenz* und *Stetigkeit* der partiellen Differentialquotienten $\varphi_1(\xi, \eta)$, $\varphi_2(\xi, \eta)$, $\psi_1(\xi, \eta)$, $\psi_2(\xi, \eta)$ und das Bestehen der Beziehungen (Nr. 2, Gl. (8)):

$$(2) \qquad \psi_1(\xi, \eta) = -\varphi_2(\xi, \eta) \qquad \psi_2(\xi, \eta) = \varphi_1(\xi, \eta).$$

Es läßt sich nun zeigen, daß dieses Resultat auch *umkehrbar* ist, zunächst in dem folgenden Sinne:

Es sei $f(x)$ für das Innere eines zusammenhängenden Bereiches $\mathfrak{B}$ eindeutig definiert und werde gemäß Gl. (1) auf die Form $\varphi(\xi, \eta) + i \cdot \psi(\xi, \eta)$ gebracht. Besitzen sodann $\varphi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$ partielle Differentialquotienten, welche im Innern von $\mathfrak{B}$ stetig sind und den Beziehungen (2) genügen[2]), *so ist $f(x)$ für*

1) Dieser Zusatz ist *wesentlich.* Denn, abgesehen davon, daß es sich nur um einen *eindeutigen Zweig* einer beliebig *vieldeutigen* Funktion zu handeln braucht, kann nach § 49, Nr. 3 (S. 374) ein und derselbe stetig differenzierbare arithmetische Ausdruck in verschiedenen Bereichen *verschiedene* analytische Funktionen vorstellen.

2) Man kann natürlich diese *zwei* Beziehungen auch in die *eine* zusammenfassen:

$$\varphi_1(\xi, \eta) + i \cdot \psi_1(\xi, \eta) = \psi_2(\xi, \eta) - i \cdot \varphi_2(\xi, \eta) = \frac{1}{i}(\varphi_2(\xi, \eta) + i \cdot \psi_2(\xi, \eta)),$$

anders geschrieben:

$$f_1(\xi + \eta i) = \frac{1}{i} f_2(\xi + \eta i)$$

oder auch:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \xi} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial \eta}.$$

jeden innerhalb $\mathfrak{B}$ liegenden Bereich $\mathfrak{B}'$ gleichmäßig differenzierbar (also regulären Verhaltens).

Beweis. Unter den gemachten Voraussetzungen ergibt sich *genau* so, wie in Nr. 4 des vorigen Paragraphen (s. Gl. (16), (17), (18)):

$$(3)\qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = (\varphi_1(\xi+\vartheta\sigma, \eta+\tau) - i\cdot\varphi_2(\xi+\vartheta'\sigma, \eta+\tau))\,\frac{\sigma}{\sigma+\tau i}$$
$$+ (\varphi_1(\xi, \eta+\zeta'\tau) - i\cdot\varphi_2(\xi, \eta+\zeta\tau))\cdot\frac{\tau i}{\sigma+\tau i},$$

gültig, bei passender Einschränkung von $|h| = |\sigma+\tau i|$, für alle ξ, η eines jeden Bereiches $\mathfrak{B}'$. Durch Subtraktion der Identität:

$$\varphi_1(\xi, \eta) - i\cdot\varphi_2(\xi, \eta) = (\varphi_1(\xi, \eta) - i\,\varphi_2(\xi, \eta))\,\frac{\sigma+\tau i}{\sigma+\tau i}$$

folgt dann weiter:

$$(4)\qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - (\varphi_1(\xi, \eta) - i\cdot\varphi_2(\xi, \eta))$$
$$= \{(\varphi_1(\xi+\vartheta\sigma, \eta+\tau) - \varphi_1(\xi, \eta)) - i(\varphi_2(\xi+\vartheta'\sigma, \eta+\tau) - \varphi_2(\xi, \eta))\}\cdot\frac{\sigma}{\sigma+\tau i}$$
$$+ \{(\varphi_1(\xi, \eta+\zeta'\tau) - \varphi_1(\xi, \eta)) - i(\varphi_2(\xi, \eta+\zeta\tau) - \varphi_2(\xi, \eta))\}\cdot\frac{\tau i}{\sigma+\tau i},$$

also infolge der gleichmäßigen Stetigkeit von $\varphi_1(\xi, \eta)$, $\varphi_2(\xi, \eta)$, nach Annahme eines hinlänglich kleinen $\delta > 0$ für $|h| = |\sigma+\tau i| \leqq \delta$ (vgl. Ungl. (20) des vorigen Paragraphen):

$$(5)\qquad \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - (\varphi_1(\xi, \eta) - i\cdot\varphi_2(\xi, \eta))\right| < \varepsilon.$$

Diese Ungleichung lehrt zunächst, daß der Differenzenquotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für alle einem Bereiche $\mathfrak{B}'$ angehörigen x bei beliebigem Grenzübergange $h \longrightarrow 0$ den festen Grenzwert $\varphi_1(\xi, \eta) - i\cdot\varphi_2(\xi, \eta)$ besitzt. Somit *existiert* in diesem Umfange $f'(x)$, und zwar hat man:

$$(6)\qquad f'(x) = \varphi_1(\xi, \eta) - i\cdot\varphi_2(\xi, \eta),$$

eine Beziehung, der man auf Grund der Voraussetzungen Gl. (2) auch die Form geben kann:

$$(7)\qquad f'(x)\begin{cases} = \varphi_1(\xi, \eta) + i\cdot\psi_1(\xi, \eta) = f_1(\xi+\eta i) \\ = \psi_2(\xi, \eta) - i\cdot\varphi_2(\xi, \eta) = \frac{1}{i}f_2(\xi+\eta i).\text{[1]} \end{cases}$$

---

1) Anders geschrieben:

$$f'(x) = \begin{cases} f_1(\xi+\eta i) = \dfrac{\partial f(\xi+\eta i)}{\partial \xi} \\ \dfrac{1}{i}f_2(\xi+\eta i) = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial f(\xi+\eta i)}{\partial \eta}. \end{cases}$$

Zugleich läßt sich dann Ungl. (5) durch die folgende ersetzen:

$$(8) \qquad \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon \qquad (\text{für alle } x \text{ in } \mathfrak{B}' \text{ und } |h|\leqq\delta),$$

welche in der Tat aussagt, daß $f(x)$ in dem behaupteten Umfange *gleichmäßig* differenzierbar, also schließlich im Innern von $\mathfrak{B}$ *regulär* ist.

2. Man kann dem Ergebnis der vorigen Nummer auch noch eine andere, gleichfalls bemerkenswerte Seite abgewinnen.

Bei der bisherigen Betrachtungsweise wurde $f(x)$ als *gegeben* angesehen, $\varphi(\xi, \eta)$, $i\psi(\xi, \eta)$ bestimmten sich dann als reeller und imaginärer Bestandteil von $f(\xi+\eta i)$. Wir wollen nun annehmen, daß umgekehrt $\varphi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$ *gegeben* seien als zwei im Innern eines zusammenhängenden, den reellen Veränderlichen ξ, η zugewiesenen Bereiches $\mathfrak{B}$ eindeutig definierte, stetige und mit stetigen partiellen (ersten) Differentialquotienten versehene Funktionen und daß jene Differentialquotienten den Beziehungen (2) genügen, also:

$$(2) \qquad \psi_1(\xi, \eta) = -\varphi_2(\xi, \eta) \qquad \psi_2(\xi, \eta) = \varphi_1(\xi, \eta).$$

Bildet man sodann $\varphi(\xi, \eta)+i\cdot\psi(\xi, \eta)$, so steht es offenbar frei, diesen Ausdruck als eine im Innern des (nunmehr als Inbegriff der entsprechenden Zahlen $\xi+\eta i$ aufzufassenden) Bereiches $\mathfrak{B}$ eindeutige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen $\xi+\eta i$ aufzufassen: denn zu jedem $x=\xi+\eta i$ gehört ja ein und nur ein reelles Wertepaar (ξ, η), also schließlich ein eindeutig bestimmter Funktionswert $\varphi(\xi, \eta)+i\cdot\psi(\xi, \eta)$, der sich überdies mit x stetig ändert. Wir können daher eine Funktion $f(x)$ *definieren* durch die Gleichung:

$$(9) \qquad f(x)=\varphi(\xi, \eta)+i\cdot\psi(\xi, \eta)$$

(unbekümmert darum, ob es wirklich möglich sein sollte, falls $\varphi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$ als arithmetische Ausdrücke vorgelegt sind, die Veränderlichen ξ und η allemal so zu gruppieren, daß sie schließlich nur in der Verbindung $\xi+\eta i$ vorkommen).

Setzt man sodann:

$$h=\sigma+\tau i, \qquad \text{also: } x+h=\xi+\sigma+(\eta+\tau)i,$$

so wird:

$$f(x+h)=\varphi(\xi+\sigma, \eta+\tau)+i\cdot\psi(\xi+\sigma, \eta+\tau)$$

und daher:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\varphi(\xi+\sigma, \eta+\tau)-\varphi(\xi, \eta)}{\sigma+\tau i}+i\cdot\frac{\psi(\xi+\sigma, \eta+\tau)-\psi(\xi, \eta)}{\sigma+\tau i}.$$

Hieraus schließt man wörtlich, wie in der vorigen Nummer, daß (bei beliebigem Grenzübergange $h\to 0$) der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (im

engeren Sinne) *existiert* und daß somit $f(x)$ im Innern des Bereiches $\mathfrak{B}$ einen eindeutig definierten und stetigen Differentialquotienten $f'(x)$ besitzt, nämlich (s. Gl. (6)):

$$f'(x) = \varphi_1(\xi, \eta) - i \cdot \varphi_2(\xi, \eta) \tag{10a}$$

oder auch, mit Benutzung von Gl. (2):

$$f'(x) = \psi_2(\xi, \eta) + i \cdot \psi_1(\xi, \eta). \tag{10b}$$

Daraus folgt aber, daß $f(x)$ im Innern von $\mathfrak{B}$ eine eindeutige analytische Funktion regulären Verhaltens, also in der Umgebung jedes Innenpunktes x_0 durch eine Reihe nach positiven ganzen Potenzen von $x - x_0$ darstellbar ist, somit ξ und η schließlich nicht mehr beliebig vereinzelt, sondern lediglich in der Verbindung $\xi + \eta i = x$ enthält.

3. Angenommen, es seien $\varphi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$ als *arithmetische Ausdrücke* vorgelegt, welche im Innern irgend eines einfach zusammenhängenden Bereiches $\mathfrak{B}$ stetige, den *Cauchy*schen Bedingungen genügende (erste) Differentialquotienten besitzen, so daß also durch die Beziehung (9), nämlich:

$$f(x) = \varphi(\xi, \eta) + i \cdot \psi(\xi, \eta) \tag{9}$$

eine in $\mathfrak{B}$ eindeutige und reguläre analytische Funktion von $x = \xi + \eta i$ definiert wird. Es entsteht dann die Frage, wie diese Funktion $f(x)$ als arithmetischer Ausdruck in x wirklich hergestellt werden kann.

Wir können ohne merkliche Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der Bereich $\mathfrak{B}$ ein Stück der *reellen* Achse im Innern enthält[1]). Ist dann ξ_0 eine beliebige Stelle dieses Stückes, so muß für eine (bis an die Grenze von $\mathfrak{B}$ reichende) Umgebung $|x - \xi_0| < \varrho_0$ eine (vorläufig unbekannte) Entwickelung von der Form bestehen:

$$f(x) = \sum_0^\infty (\alpha_\nu + \beta_\nu i)(x - \xi_0)^\nu \tag{11}$$

und daher für $\eta = 0$:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \sum_0^\infty (\alpha_\nu + \beta_\nu i)(\xi - \xi_0)^\nu \\ &= \Phi(\xi) + i \cdot \Psi(\xi), \end{aligned} \tag{11a}$$

wo:

$$\Phi(\xi) = \sum_0^\infty \alpha_\nu (\xi - \xi_0)^\nu, \qquad \Psi(\xi) = \sum_0^\infty \beta_\nu (\xi - \xi_0)^\nu. \tag{11b}$$

---

1) Sollte diese Annahme zufällig nicht erfüllt sein, so kann sie ja durch eine Substitution von der Form $\eta = \eta' + \alpha$ (Parallel-Verschiebung) sofort hergestellt werden.

Andererseits folgt aus Gl. (9):

$$f(\xi) = \varphi(\xi, 0) + i \cdot \psi(\xi, 0),$$

so daß also, wie die Vergleichung mit (11a), (11b) zeigt, die Beziehungen stattfinden:

$$\text{(11c)} \qquad \varphi(\xi, 0) = \sum_0^\infty {}^\nu \alpha_\nu (\xi - \xi_0)^\nu, \qquad \psi(\xi, 0) = \sum_0^\infty {}^\nu \beta_\nu (\xi - \xi_0)^\nu,$$

und somit diese beiden Reihen gleichzeitig mit $\varphi(\xi, 0)$, $\psi(\xi, 0)$ nunmehr als *gegeben* anzusehen sind.

Da aber diese Reihen auch konvergent bleiben, wenn man ξ durch ein der Bedingung $|x - \xi_0| < \varrho_0$ genügendes *komplexes* x ersetzt, so findet man schließlich:

$$\text{(12)} \qquad f(x) = \Phi(x) + i \cdot \Psi(x),$$

wenn im Anschluß an Gl. (11b) gesetzt wird[1]):

$$\text{(12a)} \qquad \Phi(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \alpha_\nu (x - \xi_0)^\nu, \quad \Psi(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \beta_\nu (x - \xi_0)^\nu \quad (|x - \xi_0| < \varrho_0).$$

Damit ist zunächst *ein* bestimmtes Funktionselement von $f(x)$ hergestellt, durch dessen in $\mathfrak{B}$ völlig eindeutig verlaufende analytische Fortsetzungen $f(x)$ im übrigen $\mathfrak{B}$ darstellbar ist (übrigens auch unmittelbar durch andere Funktionselemente, die man durch Variation von ξ_0 gewinnen kann).

Beispiel. Es sei:

$$\varphi(\xi, \eta) = \left(\sum_0^\infty {}^\nu \frac{\xi^\nu}{\nu!}\right)\left(\sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu \cdot \frac{\eta^{2\nu}}{(2\nu)!}\right),$$

$$\psi(\xi, \eta) = \left(\sum_0^\infty {}^\nu \frac{\xi^\nu}{\nu!}\right)\left(\sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu \cdot \frac{\eta^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\right).$$

Man findet zunächst:

$$\psi_1(\xi, \eta) = \left(\sum_0^\infty {}^\nu \frac{\xi^\nu}{\nu!}\right)\left(\sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu \cdot \frac{\eta^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\right) = -\varphi_2(\xi, \eta)$$

$$\psi_2(\xi, \eta) = \left(\sum_0^\infty {}^\nu \frac{\xi^\nu}{\nu!}\right)\left(\sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu \cdot \frac{\eta^{2\nu}}{(2\nu!)}\right) = \varphi_1(\xi, \eta).$$

---

1) Man darf nicht etwa die Reihen (12a) nach Analogie von Gl. (11c) mit $\varphi(x, 0)$, $\psi(x, 0)$ bezeichnen, da ja die nur für reelle Argumente gegebenen *arithmetischen Ausdrücke* $\varphi(x, 0)$, $\psi(x, 0)$ für *komplexes* x überhaupt keine Bedeutung zu besitzen brauchen, oder, wenn dies auch der Fall sein sollte, Werte liefern könnten, die von denjenigen der Reihensummen (12a) *verschieden* sind. *Nur*, wenn sie mit den letzteren *gleichwertig* sind (was z. B. der Fall wäre, wenn $\varphi(\xi, 0)$, $\psi(\xi, 0)$ *rationale* Funktionen von ξ oder [auch bei Vertauschung von ξ mit *komplexem* x] *gleichmäßig* konvergierende Reihen solcher Funktionen), dann darf man die Gl. (12) durch die folgende ersetzen:

$$f(x) = \varphi(x, 0) + i \cdot \psi(x, 0).$$

Die *Cauchy*schen Differentialgleichungen (einschließlich der erforderlichen Stetigkeitsbedingungen) sind also erfüllt. Da sodann:

$$\varphi(\xi, 0) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{\xi^\nu}{\nu!}, \qquad \psi(\xi, 0) = 0,$$

(wo übrigens, entsprechend dem Schlusse der Fußnote 1: $\varphi(x, 0) = \Phi(x)$, $\psi(x, 0) = \Psi(x)$) so findet man auf Grund der Formel (12):

$$f(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{x^\nu}{\nu!},$$

Mit anderen Worten, man beweist auf diesem Wege ohne Benutzung der *Cauchy*schen Multiplikationsregel die Richtigkeit der Beziehung:

$$\left(\sum_0^\infty{}_\nu \frac{\xi^\nu}{\nu!}\right) \cdot \left\{\sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu \cdot \frac{\eta^{2\nu}}{(2\nu)!} + i \cdot \sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu \cdot \frac{\eta^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\right\} = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{(\xi + \eta i)^\nu}{\nu!}.$$

4. Nachdem wir durch die vorhergehenden Betrachtungen erkannt haben, welche besonderen Beziehungen zwischen zwei Funktionen $\varphi(\xi, \eta)$ und $\psi(\xi, \eta)$ bestehen müssen, damit sie in der Verbindung

$$\varphi(\xi, \eta) + i \cdot \psi(\xi, \eta)$$

eine analytische Funktion von $\xi + \eta i$ liefern, bleibt des weiteren zu untersuchen, welche Beschränkungen hieraus für die Auswahl jedes einzelnen dieser beiden Bestandteile erwachsen

Zunächst bemerke man, daß vermöge der Gl. (10a) bzw. (10b) $f'(x)$ schon durch $\varphi(\xi, \eta)$ *allein* bzw. durch $\psi(\xi, \eta)$ *allein* vollständig bestimmt ist. Da aber $f'(x)$ als Derivierte einer regulären analytischen Funktion ebenfalls diesen Charakter besitzt, also in der Umgebung jeder in Betracht kommenden Stelle x_0 in der Form:

$$f'(x) = \sum_0^\infty{}_\nu a_\nu (x - x_0)^\nu$$

darstellbar ist, so folgt, daß in dem gleichen Umfange:

$$f(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{a_\nu}{\nu+1} (x - x_0)^{\nu+1} + C$$

sein muß, wo C eine vorläufig noch unbekannte Konstante bedeutet. Da andererseits die *Eindeutigkeit* von $f(x)$ auf Grund der Definitionsgleichung (9) bereits feststeht, so ist demnach $f(x)$ schon durch $\varphi(\xi, \eta)$ *allein* bzw. durch $\psi(\xi, \eta)$ *allein* bis auf jene additive Konstante eindeutig bestimmt. Wegen:

$$\varphi(\xi, \eta) = f(\xi + \eta i) - i \cdot \psi(\xi, \eta), \quad i \cdot \psi(\xi, \eta) = f(\xi + \eta i) - \varphi(\xi, \eta)$$

ergibt sich daraus weiter, daß jede der beiden Funktionen $\varphi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$ durch die andere bis auf eine additive Konstante bestimmt ist.[1]) Aber es steht keineswegs auch noch frei, nun eine dieser beiden Funktionen willkürlich zu wählen, vielmehr muß dieselbe noch einer ganz speziellen Bedingung genügen, wie aus der folgenden Erwägung hervorgeht. Da $f'(x)$, wie bereits bemerkt, innerhalb $\mathfrak{B}$ regulär ist, so besitzt $f'(x)$ daselbst einen bestimmten Differentialquotienten $f''(x)$, der insbesondere gefunden werden kann, indem man $f'(x)$, d. h. $f'(\xi + \eta i)$ partiell nach ξ oder $\frac{1}{i} f'(\xi + \eta i)$ partiell nach η differenziert. Da aber für $f'(x)$ die beiden Darstellungen (10a), (10b) vorliegen, so findet man auf die angegebene Weise *vier* verschiedene Darstellungen für $f''(x)$, und es ergibt sich zugleich die Berechtigung, infolge des analytischen Charakters von $f''(x)$ die Forderung einzuführen, daß auch $\varphi_1(\xi, \eta)$, $\varphi_2(\xi, \eta)$, $\psi_1(\xi, \eta)$, $\psi_2(\xi, \eta)$ stetige partielle Differentialquotienten nach ξ und η (anders ausgesprochen, daß $\varphi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$ auch stetige *zweite* Differentialquotienten nach ξ und η) besitzen. Bezeichnet man nun den partiellen Differentialquotienten von

$\varphi_1(\xi, \eta)$ in bezug auf ξ mit $\varphi_{11}(\xi, \eta)$,
„ „ „ „ η „ $\varphi_{12}(\xi, \eta)$,
$\varphi_2(\xi, \eta)$ „ „ „ ξ „ $\varphi_{21}(\xi, \eta)$,
„ „ „ „ η „ $\varphi_{22}(\xi, \eta)$[2]),

und führt analoge Bezeichnungen für die partiellen Differentialquotienten von $\psi_1(\xi, \eta)$, $\psi_2(\xi, \eta)$ ein, so ergeben sich für $f''(x)$ aus den Gl. (10a), (10b) durch nochmalige Differentiation die folgenden vier Formeln:

$$f''(x) \begin{cases} = \varphi_{11}(\xi, \eta) - i \cdot \varphi_{21}(\xi, \eta) = - i \cdot \varphi_{12}(\xi, \eta) - \varphi_{22}(\xi, \eta), \\ = \psi_{21}(\xi, \eta) + i \cdot \psi_{11}(\xi, \eta) = - i \cdot \psi_{22}(\xi, \eta) + \psi_{12}(\xi, \eta), \end{cases}$$

und hieraus durch Trennung des Reellen und Imaginären:

$$(13) \qquad \begin{cases} \varphi_{11}(\xi, \eta) = - \varphi_{22}(\xi, \eta) = \psi_{21}(\xi, \eta) = \psi_{12}(\xi, \eta) \\ - \varphi_{21}(\xi, \eta) = - \varphi_{12}(\xi, \eta) = \psi_{11}(\xi, \eta) = - \psi_{22}(\xi, \eta). \end{cases}$$

1) Die explizite Darstellung von $\psi(\xi, \eta)$ durch $\varphi(\xi, \eta)$ oder umgekehrt pflegt sonst nur mit Hilfe eines Integrals bewerkstelligt zu werden. Vgl. jedoch Fußn. 1, S. 412.

2) Anders geschrieben:

$$\varphi_{11}(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi^2},$$

$$\varphi_{12}(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi \, \partial \eta},$$

$$\varphi_{21}(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 \varphi(\xi, \eta)}{\partial \eta \, \partial \xi},$$

$$\varphi_{22}(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 \varphi(\xi, \eta)}{\partial \eta^2},$$

Wir heben aus diesen Gleichungen die folgenden, nur je *eine* der beiden Funktionen φ und ψ enthaltenden hervor:

$$\text{(14a)} \qquad \varphi_{12}(\xi,\eta) = \varphi_{21}(\xi,\eta) \qquad \psi_{12}(\xi,\eta) = \psi_{21}(\xi,\eta)\ ^{1)}$$

$$\text{(14b)} \qquad \varphi_{11}(\xi,\eta) + \varphi_{22}(\xi,\eta) = 0 \qquad \psi_{11}(\xi,\eta) + \psi_{22}(\xi,\eta) = 0.$$

Das *erste* dieser Gleichungspaare besagt lediglich, daß es gleichgültig ist, ob man $\varphi(\xi,\eta)$ bzw. $\psi(\xi,\eta)$ zuerst nach ξ und darauf nach η differenziert oder umgekehrt — eine Eigenschaft, deren Vorhandensein man auf Grund der hier gemachten *Stetigkeits*voraussetzungen auch leicht direkt mit Hilfe des oben bewiesenen Mittelwertsatzes der Differentialrechnung verifizieren kann.[2])

---

1) In der üblichen Schreibweise der Differentialrechnung:

$$\frac{\partial^2 \varphi(\xi,\eta)}{\partial\xi\,\partial\eta} = \frac{\partial^2 \varphi(\xi,\eta)}{\partial\eta\,\partial\xi}$$

oder noch deutlicher:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\varphi(\xi,\eta)}{\partial\xi}\right) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\varphi(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right)$$

und analog für $\psi(\xi,\eta)$.

2) Dies geschieht folgendermaßen. Man hat:

$$\begin{aligned}\varphi_{12}(\xi,\eta) &= \lim_{k\to 0}\frac{\varphi_1(\xi,\eta+k)-\varphi_1(\xi,\eta)}{k}\\ &= \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left\{\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(\xi+h,\eta+k)-\varphi(\xi,\eta+k)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(\xi+h,\eta)-\varphi(\xi,\eta)}{h}\right\}\\ &= \lim_{k\to 0}\left(\lim_{h\to 0}\Phi(h,k)\right),\end{aligned}$$

wo:

$$\Phi(h,k) = \frac{\varphi(\xi+h,\eta+k)-\varphi(\xi,\eta+k)-\varphi(\xi+h,\eta)+\varphi(\xi,\eta)}{hk}.$$

Alsdann ergibt sich analog:

$$\varphi_{21}(\xi,\eta) = \lim_{h\to 0}\left(\lim_{k\to 0}\Phi(h,k)\right),$$

so daß es sich lediglich um den Nachweis der Vertauschbarkeit der beiden mit $\Phi(h,k)$ sukzessive vorzunehmenden Grenzübergänge handelt. Setzt man zur Abkürzung:

$$\varphi(\xi,\eta+k)-\varphi(\xi,\eta) = \chi(\xi), \quad \text{also:} \quad \varphi(\xi+h,\eta+k)-\varphi(\xi+h,\eta) = \chi(\xi+h),$$

so wird:

$$\Phi(h,k) = \frac{\chi(\xi+h)-\chi(\xi)}{h}\cdot\frac{1}{k}.$$

Wird jetzt ξ,η auf irgendeinen, dem Innern von $\mathfrak{B}$ angehörigen abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}'$ eingeschränkt und h, k von vornherein klein genug angenommen, daß das Rechteck mit den sich diagonal gegenüberliegenden Eckpunkten (ξ,η), $(\xi+h,\eta+k)$ noch in das Innere von $\mathfrak{B}$ fällt, so findet man durch Anwendung des Mittelwertsatzes:

$$\Phi(h,k) = \frac{\chi_1(\xi+\vartheta h)}{k} = \frac{\varphi_1(\xi+\vartheta h,\eta+k)-\varphi_1(\xi+\vartheta h,\eta)}{k} \qquad (0<\vartheta<1),$$

Dagegen liefern die Gl. (14b) eine wesentlich neue Bedingung, und zwar vom gleichen Bildungsgesetz für $\varphi(\xi, \eta)$ und $\psi(\xi, \eta)$, die sogenannte *Laplacesche Differentialgleichung*[1]), der also $\varphi(\xi, \eta)$ und $\psi(\xi, \eta)$ jedenfalls genügen müssen, wenn überhaupt die Möglichkeit bestehen soll, daß die Verbindung $\varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta)$ eine im Innern von $\mathfrak{B}$ reguläre analytische Funktion von $x = \xi + \eta i$ liefert.

Es fragt sich nun, ob die durch die vorstehende Betrachtung als *notwendig* erkannten Bedingungen sich auch als *hinreichend* erweisen. Da sich hierbei schon ergeben hatte, daß jede der beiden Funktionen $\varphi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$ durch die andere bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, und da andererseits beide Funktionen in bezug auf die fraglichen Bedingungen einschließlich der Bedingung (14) sich völlig gleichartig verhalten, so handelt es sich schließlich lediglich um die Beantwortung der folgenden Frage:

Es sei $\varphi(\xi, \eta)$ eindeutig und stetig im Innern eines zusammenhängenden Bereiches $\mathfrak{B}$, besitze daselbst stetige erste und zweite partielle Differentialquotienten nach ξ und η, welche der Bedingung genügen:

(14b) $$\varphi_{11}(\xi, \eta) + \varphi_{22}(\xi, \eta) = 0.$$ [2])

Gibt es dann eine im Innern von $\mathfrak{B}$ bis auf eine additive imaginäre Konstante bestimmte eindeutige und durchweg reguläre analytische Funktion $F(x)$ mit dem reellen Teil $\varphi(\xi, \eta)$?

---

wo ϑ zwar mit η, $\eta + k$ veränderlich ist, aber das Intervall $(0, 1)$ niemals verlassen kann. Hieraus durch nochmalige Anwendung des Mittelwertsatzes:

$$\Phi(h, k) = \varphi_{12}(\xi + \vartheta h, \eta + \vartheta' k) \qquad (0 < \vartheta' < 1),$$

und somit infolge der Stetigkeit von $\varphi_{12}(\xi, \eta)$ für den Bereich $\mathfrak{B}'$, selbst bei beliebigem simultanen Grenzübergange (= Doppellimes):

$$\lim_{h, k \to 0} \Phi(h, k) = \varphi_{12}(\xi, \eta),$$

also (da die inneren einfachen Limites existieren) um so mehr:

$$\varphi_{21}(\xi, \eta) = \lim_{h \to 0} (\lim_{k \to 0} \Phi(h, k) = \lim_{k \to 0} (\lim_{h \to 0} \Phi(h, k)) = \varphi_{12}(\xi, \eta).$$

1) Danach ist also:

$$\frac{\partial^2 \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} = 0,$$

anders ausgesprochen, $\varphi(\xi, \eta)$ und $\psi(\xi, \eta)$ müssen, für u eingesetzt, die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

befriedigen. Jede ihrer Lösungen wird als eine *harmonische* Funktion bezeichnet.

2) Die andere, gleichfalls als notwendig erkannte Bedingung (14a) ist ja, wie in Fußn. 2 der vorigen Seite gezeigt wurde, infolge der gemachten Stetigkeitsvoraussetzungen schon von selbst erfüllt.

Wir werden zeigen, daß für einen *einfach* zusammenhängenden Bereich diese Frage schlechthin, für einen *mehrfach* zusammenhängenden in modifizierter Form zu *bejahen* ist.

5. Wir *definieren* zunächst eine *eindeutige* Funktion von $x = \xi + \eta i$, die wir mit Rücksicht auf das folgende von vornherein mit $F'(x)$ *bezeichnen*, durch die Gleichung (vgl. Gl. (10a)):

$$F'(x) = \varphi_1(\xi, \eta) - i \cdot \varphi_2(\xi, \eta). \tag{15}$$

Da die *Cauchy*schen Differentialgleichungen (2) (S. 401) hier die Form annehmen:

$$-\varphi_{21}(\xi, \eta) = -\varphi_{12}(\xi, \eta), \quad -\varphi_{22}(\xi, \eta) = \varphi_{11}(\xi, \eta),$$

so sind sie infolge der gemachten Voraussetzungen einschließlich der erforderlichen Stetigkeitsbedingungen erfüllt. Somit ist auf Grund des Ergebnisses von Nr. 2 $F'(x)$ eine im Innern von $\mathfrak{B}$ *eindeutige* analytische Funktion *regulären* Verhaltens[1]), kann also als Derivierte einer durch sie bis auf eine additive komplexe Konstante bestimmten, im Innern von $\mathfrak{B}$ gleichfalls *regulären* (aber nicht notwendig *eindeutigen*) Funktion $F(x)$ aufgefaßt werden. Dann läßt sich zeigen, daß diese Funktion $F(x)$ bei geeigneter Bestimmung des reellen Teiles der noch willkürlich gebliebenen Konstante den reellen Teil $\varphi(\xi, \eta)$ besitzt.

Sei etwa:

$$F(x) = \Phi(\xi, \eta) + i\Psi(\xi, \eta), \tag{16}$$

wo also $\Phi(\xi, \eta)$ eine zunächst noch willkürlich gebliebene reelle additive Konstante enthält. Da $F(x)$ im Innern von $\mathfrak{B}$ durchweg regulär, so findet man wiederum (s. Gl. (11), S. 396):

$$F'(x) = \Phi_1(\xi, \eta) - i \cdot \Phi_2(\xi, \eta), \tag{17}$$

und daher mit Rücksicht auf die *Eindeutigkeit* von $F'(x)$ durch Vergleichung mit Gl. (15):

$$\Phi_1(\xi, \eta) = \varphi_1(\xi, \eta), \quad \Phi_2(\xi, \eta) = \varphi_2(\xi, \eta), \tag{18}$$

oder auch, wenn

$$\Phi(\xi, \eta) - \varphi(\xi, \eta) = \chi(\xi, \eta) \tag{19}$$

gesetzt wird:

$$\chi_1(\xi, \eta) = 0, \quad \chi_2(\xi, \eta) = 0 \tag{20}$$

(sc. im Innern des Bereiches $\mathfrak{B}$). Es kommt dann schließlich nur noch darauf an, nachzuweisen, daß auf Grund dieser beiden Bedingungen $\chi(\xi, \eta)$

---

1) Da hiernach $F'(x)$ innerhalb $\mathfrak{B}$ stetige Derivierte jeder Ordnung besitzt, so folgt, daß in dem gleichen Umfange für die *harmonische* Funktion $\varphi(\xi, \eta)$ aus der vorausgesetzten Stetigkeit des ersten und zweiten Differentialquotienten die Existenz und Stetigkeit aller höheren resultiert.

eine *Konstante* sein muß, was wiederum mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung folgendermaßen erschlossen werden kann.

Hat man zunächst eine eindeutige Funktion $\chi(\xi)$ *einer* reellen Veränderlichen, die für $\xi_0 \leqq \xi \leqq \xi_1$ beständig einen Differentialquotienten $\chi_1(\xi) = 0$ besitzt, so ergibt sich für jedes ξ des Intervalls $\xi_0 < \xi \leqq \xi_1$ auf Grund des erwähnten Mittelwertsatzes (§ 53, Nr. 3, S. 397):

$$\frac{\chi(\xi) - \chi(\xi_0)}{\xi - \xi_0} = \chi_1(\xi') = 0 \qquad (\text{wo: } \xi_0 < \xi' < \xi),$$

also:

$$\chi(\xi) = \chi(\xi_0), \quad \text{d. h. } \textit{konstant} \text{ im ganzen Intervall.}$$

Es werde nun zunächst ein dem Innern des Bereiches $\mathfrak{B}$ angehöriges, den Koordinatenrichtungen parallel liegendes Rechteck: $\xi_0 \leqq \xi \leqq \xi_1$, $\eta_0 \leqq \eta \leqq \eta_1$ betrachtet. Gibt man η irgendeinen konstanten Wert, so genügt $\chi(\xi, \eta)$ als Funktion von ξ auf Grund der *ersten* der Gl. (20) den Bedingungen des vorigen Satzes, es ist somit $\chi(\xi, \eta)$ *konstant* für alle (ξ, η), welche den Punkten der durch die Ordinate η charakterisierten, durch die Abszissenwerte ξ_0, ξ_1 begrenzten *Horizontalen* entsprechen. Das gleiche gilt dann für jedes η des Intervalls $\eta_0 \leqq \eta \leqq \eta_1$, also auf jeder einzelnen, dem Rechteck angehörigen *Horizontalen*. Dabei könnte jedoch noch $\chi(\xi, \eta)$ auf jeder dieser Horizontalen einen *anderen* konstanten Wert besitzen. Nun gilt aber auf Grund der *zweiten* Bedingungsgleichung (20) die nämliche Schlußweise, wenn man $\chi(\xi, \eta)$ bei *konstantem* ξ als Funktion von η betrachtet. Daraus folgt, daß $\chi(\xi, \eta)$ auch auf jeder einzelnen dem Rechteck angehörigen *Vertikalen* konstant ist. Mithin muß $\chi(\xi, \eta)$ auf allen Horizontalen *denselben* Wert haben, ist also *im ganzen Rechteck* (einschließlich der Begrenzung) konstant.

Betrachtet man jetzt zwei solche, im Innern von $\mathfrak{B}$ liegende Rechtecke, die mindestens ein Stück einer Seite gemein haben, so folgt zunächst, daß $\chi(\xi, \eta)$ in jedem einzelnen Rechteck einen konstanten Wert besitzt. Da aber $\chi(\xi, \eta)$ für das beiden Recktecken *gemeinsame* Linienstück nicht zwei verschiedene Werte besitzen kann[1]), so muß schließlich $\chi(\xi, \eta)$ in beiden Rechtecken *denselben* konstanten Wert haben. Das gleiche gilt somit für jeden im Innern von $\mathfrak{B}$ liegenden zusammenhängenden, von einem oder mehreren *Treppenpolygonen* begrenzten Bereich $\mathfrak{B}'$, somit schließlich für alle inneren Punkte des Bereiches $\mathfrak{B}$ (vgl. § 10, Nr. 12, S. 94).

6. Es werde fürs erste angenommen, der Bereich $\mathfrak{B}$ sei ein *einfach* zusammenhängender. Dann folgt aus einem erst im übernächsten

1) Für die längs des *gemeinsamen* Seitenstücks vorhandenen *Verlängerungen* der Horizontalen bzw. Vertikalen des ersten Rechtecks muß ja der im ersten Rechteck bereits vorhandene konstante Wert erhalten bleiben.

Paragraphen zu beweisenden Satze (s. § 56, Nr. 6, S. 428) aus dem durchweg *regulären* Verhalten der Funktion $F(x)$ im Innern von $\mathfrak{B}$ zugleich deren *Eindeutigkeit* daselbst. Bedeutet also x_0 eine beliebige, im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegene Stelle, so folgt aus der auf Grund des Anfangsergebnisses von Nr. 5 bestehenden eindeutigen Beziehung von der Form:

$$F'(x) = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu (x - x_0)^\nu, \tag{21}$$

$$F(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{a_\nu}{\nu + 1} (x - x_0)^{\nu+1} + \varkappa + \lambda i \equiv \mathfrak{P}_0(x|x_0), \tag{22}$$

wo $\varkappa + \lambda i$ eine zunächst zwar *willkürliche*, aber *feste* Konstante bedeutet. D. h. wird $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ auf irgendeinem in $\mathfrak{B}$ verlaufenden geschlossenen Wege wieder in eine $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$ übergeführt, so ist diese letztere mit $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ identisch, insbesondere das *konstante* Glied wieder $= \varkappa + \lambda i$. Dabei steht es dann schließlich [wegen $\Re(F(x)) - \varphi(\xi, \eta) = \text{constans}$] frei, $\varkappa$ so zu fixieren, daß:

$$\Re\left(\sum_0^\infty {}^\nu \frac{a_\nu}{\nu + 1} (x - x_0)^{\nu+1}\right) + \varkappa = \varphi(\xi, \eta) \tag{23}$$

wird, während λ willkürlich bleibt. Es gibt also in der Tat eine und nur eine im Innern des *einfach zusammenhängenden* Bereiches $\mathfrak{B}$ *eindeutige* und *reguläre*, bis auf eine additive *imaginäre* Konstante vollständig bestimmte Funktion $F(x)$ mit dem reellen Teil $\varphi(\xi, \eta)$.[1])

7. Ist der Bereich $\mathfrak{B}$ *mehrfach* zusammenhängend, so *kann* natürlich die *Eindeutigkeit* der mit $F(x)$ bezeichneten Funktion erhalten bleiben. Doch liegt keinerlei Anhaltspunkt dafür vor, daß dies der Fall sein *müsse*, da die Gültigkeit des zuvor benützten Satzes über die Eindeutigkeit einer durchweg regulären Funktion sich durchaus nur auf *einfach* zusammenhängende Bereiche erstreckt. In der Tat kann, wie aus späteren Untersuchungen noch des näheren hervorgehen wird, zu den innerhalb des *mehrfach* zusammenhängenden Bereiches $\mathfrak{B}$ *eindeutigen* und *regulären Derivierten* $F'(x)$ eine ebendaselbst zwar durchweg *reguläre*, aber *mehrdeutige Funktion* $F(x)$ gehören. Dabei läßt sich aber schon an dieser Stelle über den Charakter der in Frage kommenden Mehrdeutigkeit eine definitive Aussage machen.

---

1) Auf diese Weise ist dann auch $\psi(\xi, \eta)$ mit Hilfe der Beziehung:

$$i\psi(\xi, \eta) = F(\xi + \eta i) - \varphi(\xi, \eta)$$

als eine bis auf die oben mit λi bezeichnete, willkürlich bleibende Konstante eindeutig definierte Funktion von ξ und η *darstellbar*.

Geht man etwa wieder von den (für eine gewisse Umgebung einer im Innern von $\mathfrak{B}$ liegenden Stelle x_0 gültigen) Beziehungen (21), (22) aus, so läßt sich zunächst $\varkappa$ so fixieren, daß der *reelle* Teil von $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ mit $\varphi(\xi, \eta)$ übereinstimmt, während für λ irgendeine feste Zahl willkürlich angenommen werden mag. Wird dann $F(x) = \mathfrak{P}_0(x|x_0)$ analytisch fortgesetzt und durch Ausdehnung dieser analytischen Fortsetzung über einen geschlossenen, nach x_0 zurückführenden Weg in $\mathfrak{P}_1(x|x_0)$ transformiert, so vollzieht sich ja gleichzeitig mit dieser analytischen Fortsetzung auch diejenige der Derivierten $F'(x) = \mathfrak{P}_0'(x|x_0)$, und da die Erhaltung der Einwertigkeit für diese feststeht, so muß wieder sein:

$$\mathfrak{P}_1'(x|x_0) = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu (x - x_0)^\nu,$$

woraus hervorgeht, daß $\mathfrak{P}_1(x|x_0)$ von $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ sich (höchstens) um eine additive *Konstante* unterscheiden kann. Mit anderen Worten, es kann sich bei dieser Operation in der ursprünglich für $F(x)$ gültigen Entwicklung (22) nur der Bestandteil $\varkappa + \lambda i$ geändert haben. Dabei muß $\varkappa$ infolge der vorausgesetzten ausnahmslosen *Stetigkeit* von $\varphi(\xi, \eta)$ bei diesen und allen möglichen in $\mathfrak{B}$ verlaufenden analytischen Fortsetzungen ungeändert bleiben. In diesem Falle ist also $F(x)$ eine *mehrdeutige* (übrigens, wie sich später noch zeigen wird, allemal *unendlich* vieldeutige) Funktion, deren *reeller* Teil *eindeutig* bleibt und mit $\varphi(\xi, \eta)$ übereinstimmt, während der *imaginäre* verschiedene Werte annimmt, die sich aber nur um additive Konstanten unterscheiden.

§ 55. Über den wahren Konvergenzbereich einer Potenzreihe.

1. Beim Beweise des Hauptsatzes über die Potenzreihe für eine in einem Kreisringe (bzw. Kreise) eindeutig definierte und reguläre Funktion $f(x)$ wurde über deren Verhalten auf der Grenze, also für $|x| = R_0$ und $|x| = R$ (bzw. für $|x| = R$ allein) keinerlei Voraussetzung gemacht: infolgedessen mußte auch jede Aussage über die etwaige Gültigkeit der betreffenden Reihenentwicklung für solche x von vornherein ausgeschlossen erscheinen. Aber selbst wenn man das reguläre Verhalten von $f(x)$ auch noch für $|x| = R_0$, $|x| = R$ ausdrücklich voraussetzte, so würde die a. a. O. benützte Beweismethode in der bezeichneten Richtung kein Resultat ergeben. Denn sie beruhte ja wesentlich auf der Konvergenz der geometrischen Progressionen $\sum \left(\frac{r_0}{x}\right)^\nu$, $\sum \left(\frac{x}{r}\right)^\nu$ für $|x| > r_0$ bzw. $|x| < r$ (s. § 52, S. 388, Gl. (8)—(11)), würde also selbst dann, wenn es auf Grund der gemachten Voraussetzung freistünde, r_0 durch R_0, r durch

R zu ersetzen, immer nur Aussagen für $|x| > R_0$ bzw. $|x| < R$ liefern. Andererseits repräsentiert eine Reihe von der Form $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu x^\nu$ im Innern ihres Konvergenzbereiches eine eindeutige und reguläre analytische Funktion (s. § 49, Nr. 4, S. 377), so daß also die Gültigkeit der Beziehung $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu x^\nu$ für das gesamte Konvergenzgebiet der Reihe ohne weiteres sich ergibt, sofern sie für $R_0 < |x| < R$ besteht. Es handelt sich somit in dem vorliegenden Zusammenhange schließlich nur um die Feststellung des *wahren Konvergenzbereiches* einer Reihe von der Form $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu x^\nu$.

2. Hierzu beweisen wir zunächst den folgenden Satz:

Ist die für $R_0 < |x| < R$ eindeutige und reguläre, also in diesem Bereiche in der Form $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu x^\nu$ darstellbare Funktion $f(x)$ noch regulär für alle Stellen X mit dem absoluten Betrage R, und konvergieren die betreffenden, zur Darstellung von $f(x)$ dienlichen $\mathfrak{P}(x-X)$ zum mindesten für $|x-X| < \varrho$ (wo $\varrho > 0$), so konvergiert die Reihe $\sum_{-\infty}^{-\infty} a_\nu x^\nu$ noch in dem Ringgebiete: $R \leqq |x| < R + \varrho$. Das analoge gilt für das Ringgebiet $R_0 - \varrho_0 < |x| \leqq R_0$, falls $f(x)$ noch für alle Stellen auf dem Kreise $|x| = R_0$ sich regulär verhält.[1])

Beweis. Auf Grund der gemachten Voraussetzung ist $f(x)$ für die Stellen $|x| = R$ noch eindeutig definiert und läßt sich über den Kreisring $R_0 < |x| \leqq R$ hinaus in das Ringgebiet $R < |x| < R + \varrho$ analytisch fortsetzen. Es erscheint jedoch zunächst fraglich, ob diese Fortsetzung ein *eindeutiges* Resultat liefert. Um dies nachzuweisen, definieren wir zunächst eine im Ringgebiete $R < |x| < R + \varrho$ *eindeutige* Funktion $\varphi(x)$ in folgender Weise. Es sei X_1 eine beliebige Stelle mit dem absoluten Betrage $|X_1| = R$, $\mathfrak{P}_1(x - X_1)$ diejenige Potenzreihe, welche in dem ursprünglichen Ringgebiete $R_0 < |x| \leqq R$ mit $f(x)$ übereinstimmt. Denkt man sich sodann den Nullpunkt mit dem Punkte X_1 geradlinig verbunden und diese Verbindungslinie bis an den Kreis $(0, R + \varrho)$ weitergeführt, so soll $\varphi(x)$ *lediglich für die auf dieser Verlängerung von* $\overline{0X_1}$ liegenden Stellen x *definiert* sein durch die entsprechenden Werte von $\mathfrak{P}_1(x|X_1)$.

1) Dabei ist natürlich $\varrho_0 \leqq R_0$ vorausgesetzt.

Das analoge gilt dann für die Punkte auf jedem anderen Radius des Kreises (0), $R+\varrho$, so daß also $\varphi(x)$ auf diese Weise für alle Stellen des Ringgebietes $R<|x|<R+\varrho$ *eindeutig* definiert ist. Wir zeigen nun, daß die so definierte Funktion $\varphi(x)$ durchweg *regulär* ist. Es sei x_1 eine beliebige, auf der Verlängerung des Radius $\overline{0X_1}$ gelegene, dem fraglichen Ringgebiete angehörige Stelle. Dann läßt sich aus $\mathfrak{P}_1(x-X_1)$ eine Reihe $\mathfrak{P}_1(x|X_1, x_1)$ ableiten, die zum mindesten in einem, den Kreis $(X_1)\varrho$ von innen berührenden Kreise konvergiert. Ist dann x_2 eine *beliebige* Stelle im Innern dieses Kreises, so hat man zunächst laut Definition:

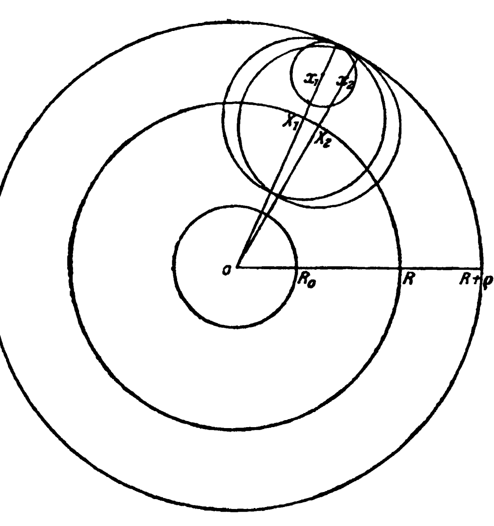


Fig 21.

$$\varphi(x_2)=\mathfrak{P}_2(x_2-X_2), \tag{1}$$

wenn X_2 diejenige Stelle bedeutet, an welcher die Verbindungslinie $\overline{0x_2}$ den Kreis $(0)R$ schneidet, und wenn die zu dieser Stelle gehörige Potenzreihe mit $\mathfrak{P}_2(x-X_2)$ bezeichnet wird Das Konvergenzgebiet dieser letzteren fällt teilweise mit demjenigen von $\mathfrak{P}_1(x-X_1)$ zusammen, und da ein Teil dieses gemeinsamen Konvergenzbereiches dem Innern des ursprünglichen Ringgebietes angehört, wo beide Reihen mit $f(x)$ übereinstimmen, so gilt die Beziehung

$$\mathfrak{P}_2(x-X_2)=\mathfrak{P}_1(x-X_1) \tag{2}$$

für das gesamte gemeinsame Konvergenzgebiet, insbesondere also für $x=x_2$. Infolgedessen ergibt sich aber aus (1) und (2):

$$\varphi(x_2)=\mathfrak{P}_1(x_2-X_1)=\mathfrak{P}_1(x_2|X_1, x_1),$$

eine Beziehung, welche aussagt, daß $\varphi(x)$ in der Umgebung der Stelle x_1 *regulär* ist und überdies durch analytische Fortsetzung aus $f(x)$ hervorgeht. Da aber x_1 *jede* Stelle des Ringgebietes $R<|x|<R+\varrho$ vorstellen kann, so folgt, daß $\varphi(x)$ für diesen ganzen Bereich *eindeutig* und *regulär* ist und daß somit die zunächst nur für den Kreisring $R_0<|x|\leqq R$ als *eindeutig* definiert und *regulär* vorausgesetzte Funktion $f(x)$ für das Ringgebiet $R<|x|<R+\varrho$ die *eindeutige analytische Fortsetzung* $\varphi(x)$ besitzt, die infolgedessen nunmehr auch mit $f(x)$ bezeichnet werden möge.

Alsdann gelten aber für $f(x)$ in dem *erweiterten* Bereich $R_0 < |x| < R + \varrho$ die Voraussetzungen des („*Laurent*schen") Satzes § 52, Nr. 1 (S. 386), und es besteht somit für *diesen* Bereich die Entwicklung (a. a. O. Gl. (1)):

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu x^\nu,$$

wo $a_\nu = \mathfrak{M}((\mathfrak{e}r)^{-\nu} \cdot f(\mathfrak{e}r))$ und r jetzt eine beliebige Zahl des Intervalls $R_0 < r < R + \varrho$ bedeutet.

Damit ist die erste der ausgesprochenen Behauptungen bewiesen. Der Beweis für die zweite (auf den Bereich $R_0 - \varrho_0 < |x| \leqq R_0$ bezügliche) läßt sich offenbar genau in derselben Weise führen.

3. Es werde nun angenommen, daß die in der vorigen Nummer mit ϱ bezeichnete positive Zahl geradezu die *untere Grenze* für die Konvergenzradien der zur analytischen Fortsetzung von $f(x)$ dienlichen Potenzreihen von der Form $\mathfrak{P}(x - X)$ (wo wiederum $|X| = R$) bedeutet, mit anderen Worten: daß zwar alle diese Reihen für $|x - X| < \varrho$ *konvergieren*, aber, wie klein man auch $\varepsilon > 0$ annehmen möge, sicher eine vorhanden ist, die für $\varrho < |x - X| < \varrho + \varepsilon$ *divergiert*. Alsdann läßt sich zunächst zeigen, daß jene *untere Grenze* ϱ allemal ein reales *Minimum* sein muß, d. h. daß unter den Stellen X mindestens eine, etwa X_1, vorhanden ist, für welche die zugehörige Reihe $\mathfrak{P}_1(x - X_1)$ geradezu den Konvergenzradius ϱ besitzt. Bezeichnet man nämlich den zu irgendeiner Stelle X gehörigen Konvergenzradius mit $\varrho(X)$, so läßt sich *entweder* (ganz analog wie dies in § 48, Nr. 2 (S. 364) für den sog. Geltungsradius geschah) zeigen, daß $\varrho(X)$ eine (sc. reelle, positive) *stetige* Funktion von X, also schließlich, wenn $X = \xi + \eta i$, der beiden *reellen* Veränderlichen ξ, η ist und somit (nach § 12, Nr. 11, S. 117) ein reales *Minimum* besitzen muß. *Oder* man kann etwas direkter in folgender Weise schließen. Wegen $|X| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = R$ hat man: $\eta = \pm \left|\sqrt{R^2 - \xi^2}\right|$, so daß also $\varrho(X) \equiv \varrho\left(\xi \pm \left|\sqrt{R^2 - \xi^2}\right| i\right)$ schließlich als eine positive Funktion der *einen* reellen Veränderlichen ξ erscheint, die überdies in zwei *eindeutige* Funktionen $\varrho\left(\xi + \left|\sqrt{R^2 - \xi^2}\right| i\right)$ und $\varrho\left(\xi - \left|\sqrt{R^2 - \xi^2}\right| i\right)$ zerfällt, deren eine den Stellen X der *oberen*, deren andere denjenigen der *unteren* Peripheriehälfte des Kreises $(0)R$ entspricht. Für mindestens einen dieser beiden Halbkreise muß dann die untere Grenze von $\varrho(X)$ den Wert ϱ haben, und es gibt somit nach dem Satze von § 4, Nr. 6 (S. 31) mindestens eine Stelle X_1 derart, daß in beliebiger Nähe gleichfalls die untere Grenze ϱ herrscht, daß also daselbst Stellen liegen, für welche $\varrho(X)$ der Zahl ϱ *beliebig* nahe kommt. Dann muß aber $\varrho(X_1) = \varrho$ sein. Denn infolge der Voraussetzung kann ja keinesfalls $\varrho(X_1) < \varrho$ sein; wäre aber $\varrho(X_1) > \varrho$, etwa $= \varrho + \delta$ (wo $\delta > 0$), so hätte man für *alle* Stellen X im Abstande

$|X - X_1| < \frac{\delta}{2}$ offenbar: $\varrho(X) > \varrho + \frac{\delta}{2}$, so daß also *kein* $\varrho(X)$ in der Nähe von X_1 dem ϱ beliebig nahe käme. Damit ist aber die ausgesprochene Behauptung bewiesen.

Hat nun aber ϱ die eben besprochene Bedeutung, so läßt sich der Satz der vorigen Nummer dahin ergänzen, daß die Reihe $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu x^\nu$ für $|x| < R + \varrho$ nicht nur *konvergiert, sondern daß $R + \varrho$ geradezu der (äußere) wahre*[1]) *Konvergenzradius dieser Reihe sein muß.* Denn konvergierte dieselbe in einem größeren Umfange, etwa für $|x| < R + \varrho + \delta$ (wo $\delta > 0$), so würde ja hieraus unmittelbar folgen, daß jede der mit $\mathfrak{P}(x - X)$ bezeichneten Reihen zum mindesten für $|X - x| < \varrho + \delta$ konvergieren müßte. Und umgekehrt: Ist $R + \varrho$ der (äußere) wahre Konvergenzradius der Reihe $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu x^\nu$, so müssen die Konvergenzradien der mit $\mathfrak{P}(x - X)$ bezeichneten Reihen das *Minimum* ϱ besitzen.

Diese Betrachtung läßt sich offenbar wörtlich auch auf den *inneren* Konvergenzradius der Reihe $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu x^\nu$ übertragen.

4. Wir wollen dem Resultate der vorigen Nummer noch eine etwas andere Form geben. Zunächst bemerke man, daß bei einer Reihe mit positiven und negativen Potenzen: $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu x^\nu$, die zunächst etwa wieder für $R_0 < |x| < R$ konvergieren mag, die Glieder mit *negativen* Potenzen keinerlei Einfluß auf den *äußeren*, die mit *positiven* Potenzen keinerlei Einfluß auf den *inneren* wahren Konvergenzradius ausüben, da ja von vornherein $\sum_{1}^{\infty} a_{-\nu} x^{-\nu}$ für *alle* $|x| > R_0$, $\sum_{0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ für *alle* $|x| < R$ konvergiert. Es genügt daher, für die weitere Erörterung des vorliegenden Gegenstandes Reihen mit nur *einer* Art von Gliedern in Betracht zu ziehen, wobei man sich schließlich wegen der vollkommenen Analogie beider Kategorien von Reihen auf solche mit positiven Potenzen beschränken kann.

Es sei nun $\mathfrak{P}(x) \equiv \sum_{0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ zunächst konvergent für $|x| < R$, außerdem aber stehe fest, daß für jede Stelle X mit dem absoluten Betrage $|X| = R$ eine Reihe nach positiven Potenzen von $(x - X)$ existiert, deren

1) Über diese Bezeichnung vgl. § 45, Nr. 5, Fußn. 1, S. 345.

Summe im Innern des Kreises $(0)R$ mit $\mathfrak{P}(x)$ übereinstimmt, und zwar sei ϱ das *Minimum* für die Konvergenzradien aller dieser Potenzreihen, so daß also nach dem Ergebnis der vorigen Nummer $R + \varrho$ *den wahren Konvergenzradius* von $\mathfrak{P}(x)$ darstellt. Alsdann läßt sich zunächst die Zahl ϱ noch in etwas anderer Weise definieren. Bedeutet nämlich x_1 irgendeine Stelle im Innern des Kreises $(0)R$ und setzt man $|x_1| = R - \varepsilon$, so hat offenbar die für die Stelle x_1 aus $\mathfrak{P}(x)$ ableitbare Reihe $\mathfrak{P}(x|x_1)$ *mindestens* den Konvergenzradius $\varrho + \varepsilon$. Und da ε die untere Grenze 0 hat, so folgt, daß die *untere Grenze* für die Konvergenzradien aller möglichen $\mathfrak{P}(x|x_1)$ *mindestens* den Wert ϱ haben muß. Bezeichnet man nun wieder mit X_1 eine Stelle mit dem absoluten Betrage R, für welche die zur analytischen Fortsetzung von $\mathfrak{P}(x)$ vorhandene Reihe $\mathfrak{P}_1(x - X_1)$ den *wahren* Konvergenzradius ϱ besitzt, und nimmt man x_1 mit dem absoluten Betrage $R - \varepsilon$ auf dem Strahle $\overline{0X_1}$ an, so hat offenbar jetzt $\mathfrak{P}(x|x_1)$ den *wahren* Konvergenzradius $\varrho + \varepsilon$. Denn wäre dieser letztere größer als $\varrho + \varepsilon$, etwa gleich $\varrho + \varepsilon + \delta$, so würde ja der Konvergenzkreis $(X_1)\varrho$ der Reihe $\mathfrak{P}_1(x - X_1)$ ganz in das Innere des Kreises (x_1), $\varrho + \varepsilon + \delta$ fallen und wäre somit einer Vergrößerung fähig, was der gemachten Annahme widerspricht. Daraus folgt aber weiter, daß für die Stellen x_1 auf dem Strahle $\overline{0X_1}$ *die untere Grenze* für die Konvergenzradien aller möglichen $\mathfrak{P}(x|x_1)$ *wirklich* den Wert ϱ hat. Hiernach läßt sich das Hauptresultat der vorigen Nummer jetzt auch folgendermaßen formulieren:

Konvergiert die Reihe $\mathfrak{P}(x)$ für $|x| < R$ und ist ϱ die untere Grenze für die wahren Konvergenzradien der aus $\mathfrak{P}(x)$ in bezug auf alle möglichen Stellen innerhalb des Kreises $(0, R)$ *ableitbaren Reihen, so besitzt $\mathfrak{P}(x)$ den wahren Konvergenzradius $R + \varrho$.*

Daraus folgt aber weiter der bereits früher (§ 45, Nr. 5, S. 345/6) angekündigte Satz:

Konvergiert die Reihe $\mathfrak{P}(x)$ für $|x| < R$, so ist R dann und nur dann der wahre Konvergenzradius, wenn die untere Grenze für die wahren Konvergenzradien $\varrho(x')$ der aus $\mathfrak{P}(x)$ in bezug auf alle möglichen Stellen x' innerhalb des Kreises $(0)R$ *ableitbaren Reihen gleich Null ist.*

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so muß, da ja $\varrho(x') \equiv \varrho(\xi' + \eta' i)$ eine (positive) reelle Funktion der beiden reellen Veränderlichen ξ, η ist, mindestens ein Wertepaar (ξ', η'), also eine bestimmte Stelle X_1 existieren, in deren unmittelbaren Umgebung $\varrho(x')$ wiederum die untere Grenze *Null* besitzt. Diese Stelle X_1 kann aber keinesfalls *im Innern* des Kreises $(0)R$ liegen, da ja für alle Stellen x' in hinlänglicher Nähe eines im Innern von $(0)R$ gelegenen Punktes $\varrho(x')$ stets oberhalb einer gewissen positiven Schranke bleibt. Somit liegt X_1 auf der *Peripherie* des Kreises

$(0)R$, und da offenbar keine konvergente Reihe $\mathfrak{P}_1(x - X_1)$ existieren kann, deren Summe im Innern von $(0)R$ mit derjenigen von $\mathfrak{P}(x)$ übereinstimmt, so ist X_1 eine *singuläre* Stelle. Hiernach ergibt sich:

Ist $(0)R$ der (wahre) Konvergenzkreis der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu a_\nu x^\nu$, so liegt auf der Peripherie mindestens eine singuläre Stelle.

Oder auch:

Der (wahre) Konvergenzkreis einer Potenzreihe $\sum_0^\infty{}_\nu a_\nu x^\nu$ erstreckt sich bis zu der dem Nullpunkte nächstgelegenen singulären Stelle (bzw. bis zu *den* dem Nullpunkte nächstgelegenen singulären Stellen) [1])

Die vorstehenden Sätze lassen sich ohne weiteres auch auf Reihen der Form $\mathfrak{P}(x - x_0)$ [2]), $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x - x_0}\right)$, $P(x - x_0)$ übertragen.

§ 56. Eindeutigkeit einer in einem einfach zusammenhängenden Bereiche durchweg regulären Funktion.

1. Nach dem „Hauptsatz" von § 48, Nr. 4 (S. 366) ist eine für jede einzelne Stelle im Inneren eines beliebigen (d. h. auch *mehrfach*) zusammenhängenden Bereiches *eindeutig definierte* Funktion *regulären* Verhaltens ein ebendaselbst eindeutiger Zweig einer *monogenen analytischen* Funktion. Als *wesentlich* erscheint hierbei die Voraussetzung, daß die *Eindeutigkeit* der Funktion auf Grund ihrer Definition (z. B durch einen arithmetischen Ausdruck) von vornherein feststeht. Wir gehen jetzt darauf aus, zu zeigen, daß bei Beschränkung auf *einfach* zusammenhängende Bereiche diese Voraussetzung entbehrlich erscheint, sofern nur — und zwar in einem sogleich noch genauer zu präzisierenden Sinne *ausnahmslos* — *Regularität* besteht. Als Grundlage beweisen wir den fraglichen Satz zunächst für den Fall, daß der betreffende Bereich sich auf ein Rechteck reduziert, nämlich:

Es sei x_0 ein beliebiger Punkt im Innern eines zu den Koordinatenachsen parallel gestellten Rechtecks $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}_0(x \mid x_0)$ eine für eine gewisse Umgebung von x_0 konvergierende Potenzreihe. Läßt sich dieses Funktionselement auf jedem im Inneren von $\mathfrak{R}$ verlaufenden Streckenzuge [3]) *analytisch fortsetzen, so definiert dasselbe*

1) Einfaches Beispiel: Der binomische Satz für negative ganze Exponenten (s. § 46, Nr. 1, S 347).

2) Einfaches Beispiel: Entwicklung einer rationalen Funktion in eine $\mathfrak{P}(x - x_0)$ (s. § 41, Nr. 5, S. 314/5).

3) Es würde, wie vermittels Approximation leicht ersichtlich gemacht werden kann, übrigens auch aus dem Beweisgang direkt hervorgeht, schon ausreichen, die

eine im Innern von $\mathfrak{R}$ eindeutige analytische Funktion regulären Verhaltens.

Beweis. Nach Annahme eines beliebig kleinen $\varepsilon > 0$, werde im Inneren von $\mathfrak{R}$ ein Rechteck $\mathfrak{R}'$ konstruiert, dessen Seiten im Abstande ε parallel zu den Seiten von $\mathfrak{R}$ verlaufen. Hierauf teile man eine Seite von $\mathfrak{R}'$ (etwa, wie in der Figur, die untere horizontale) in n gleiche Teile, deren Länge δ der Beziehung genügt:

$$(1) \qquad \delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}-1} = (1+\sqrt{2})\varepsilon,$$

und trage die Strecke δ (von unten anfangend) auch auf einer der vertikalen Seiten ab, so oft es angeht. Zieht man sodann durch sämtliche Teilpunkte Parallelen zu den Koordinatenachsen, so zerfällt das Rechteck $\mathfrak{R}'$ in eine Anzahl (horizontal gelagerter) Parallelstreifen, deren jeder aus n-Quadraten von der Seitenlänge δ besteht, dazu kommt eventuell ein letzter Parallelstreifen aus Rechtecken mit der Grundlinie δ und einer Höhe $\delta' < \delta$. Die Eckpunkte jener Quadrate mögen (von links unten beginnend) mit

$$\begin{matrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

bezeichnet werden.

Man leite nun zunächst aus $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ auf irgend einem in $\mathfrak{R}'$ verlaufenden Wege eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x|a_{11})$ ab, deren Konvergenzkreis sich mindestens bis an die Begrenzung des (äußeren) Rechtecks $\mathfrak{R}$ erstrecken muß, da andernfalls eine *singuläre* Stelle von $\mathfrak{P}(x|a_{11})$ in das Innere von $\mathfrak{R}$ fallen würde, wie aus dem letzten Satze des vorigen Paragraphen hervorgeht. Der Konvergenzradius von $\mathfrak{P}(x|a_{11})$ hat also mindestens die Länge

Möglichkeit der analytischen Fortsetzung für jeden innerhalb $\mathfrak{R}$ verlaufenden *Treppenweg* vorauszusetzen. Dagegen würde es *nicht* genügen, die Voraussetzung betreffs der Fortsetzbarkeit von $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ über das Innere von $\mathfrak{R}$ etwa folgendermaßen zu fassen: Es solle *für jeden Innenpunkt x'* von $\mathfrak{R}$ ein Funktionselement $\mathfrak{P}_0(x|x_0, \ldots, x')$ auf *bestimmten* innerhalb $\mathfrak{R}$ verlaufenden Wegen aus $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ ableitbar sein. Es lassen sich nämlich ohne Schwierigkeit Beispiele angeben, welche zeigen, daß bestimmte Innenpunkte von $\mathfrak{R}$, die bei Fortsetzung von $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ auf *gewissen Wegen* sich als solche *regulären* Verhaltens erweisen, bei der Wahl *anderer* (immer nur im Innern von $\mathfrak{R}$ verlaufender) *Wege* aber als *singuläre* Punkte erscheinen können, deren Existenz dann die *Mehrdeutigkeit* der resultierenden analytischen Funktion auch bei Beschränkung auf den Bereich $\mathfrak{R}$ zur Folge hat. Für die Diskussion derartiger Beispiele stehen indessen die genügenden Hilfsmittel an dieser Stelle noch nicht zur Verfügung.

$\delta + \varepsilon$, und da nach Ungl. (1):

$$\delta + \varepsilon > \sqrt{2} \cdot \delta$$

so ist er *größer* als die *Diagonale* der Teilquadrate, so daß also ein um den Punkt a_{11} mit dieser Diagonalenlänge $\sqrt{2} \cdot \delta$ beschriebener Kreis einschließlich seiner Peripherie aus lauter *Innenpunkten* des Konvergenzbereiches von $\mathfrak{P}(x|a_{11})$ besteht und daher die zwei ersten Quadrate des untersten und die beiden unmittelbar darüber liegenden des folgenden Parallelstreifens ganz *in das Innere* jenes Konvergenzbereiches fallen. Leitet man sodann aus $\mathfrak{P}(x|a_{11})$ sukzessive die Potenzreihen ab:

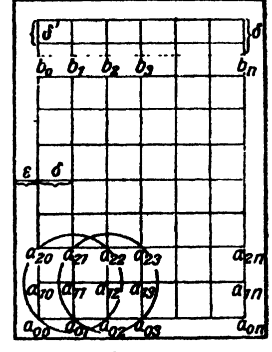


Fig 22.

(I) $\quad \mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{12}), \quad \mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{12}, a_{13}), \quad \ldots,$

$$\mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1,n-1}),$$

so wird der Konvergenzbereich einer jeden dieser Potenzreihen immer je ein Quadrat des unteren und des oberen Parallelstreifens mit dem Konvergenzbereiche der unmittelbar vorhergehenden Potenzreihe gemein haben, und es definiert somit die obige Folge von Potenzreihen zunächst für *die beiden untersten* Parallelstreifen eine daselbst eindeutige analytische Funktion regulären Verhaltens.

Nun läßt sich aber aus $\mathfrak{P}(x|a_{11})$ auch eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{21})$ und aus dieser letzteren wieder eine Folge von Potenzreihen:

(II) $\mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{21}, a_{22}),\ \mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{23}), \ldots, \mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2,n-1})$

ableiten, deren Konvergenzbereiche einschließlich desjenigen von $\mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{21})$ *den zweiten und dritten* Parallelstreifen im Innern enthalten. Dabei hat der Konvergenzbereich von $\mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{21})$ das *erste und zweite* Quadrat des *zweiten* Parallelstreifens mit dem Konvergenzbereiche von $\mathfrak{P}(x|a_{11})$ gemein, derjenige von $\mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{21}, a_{22})$ noch das *zweite* jener Quadrate mit dem Konvergenzbereiche der genannten Reihen und mit demjenigen von $\mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{12})$. Daraus folgt aber die Gültigkeit der Beziehung: $\mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{21}) = \mathfrak{P}(x|a_{11})$ für *die beiden ersten* Quadrate des *zweiten* Parallstreifens, diejenige der Beziehung: $\mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{21}, a_{22}) = \mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{12})$ für das *zweite* und folglich auch für das (den beiden Konvergenzbereichen dieser beiden Reihen gleichfalls gemeinsame) *dritte* Quadrat des *zweiten* Parallelstreifens. So fortschließend findet man, daß die Serie (II) von Potenzreihen für den *zweiten* und *dritten* Parallelstreifen eine daselbst eindeutige und reguläre analytische Funktion definiert, welche überdies im *zweiten* Parallelstreifen mit der bereits durch die Serie (I) definierten übereinstimmt. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens läßt sich schließlich das ganze Rechteck $\mathfrak{R}'$

mit einem System ineinandergreifender Potenzreihen belegen. Dabei hat man nur bei der Ausdehnung der fraglichen Entwickelungen auf den *obersten* Parallelstreifen, falls nicht zufällig $\delta' = \delta$ sein sollte, vielmehr der (allgemeine) Fall $\delta' < \delta$ eintritt, das Verfahren in der Weise zu modifizieren, daß man als Mittelpunkte der betreffenden Konvergenzkreise nicht die auf der letzten Teilungshorizontalen liegenden Gitterpunkte, sondern diejenigen benützt, die auf einer im Abstande δ zur oberen Seite des Rechtecks $\mathfrak{R}'$ gezogenen Parallelen liegen (in der Figur die Punkte $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$).

Das System der auf diese Weise hergestellten Potenzreihen definiert eine im Innern und auf der Begrenzung von $\mathfrak{R}'$ eindeutige und reguläre analytische Funktion $f(x)$. Zu jeder Stelle von $\mathfrak{R}'$ gehört ein und nur ein bestimmtes Funktionselement und auf Grund des oben näher beschriebenen Ineinandergreifens der verschiedenen Potenzreihen ist jedes andere auf *jedem beliebigen* dem Bereiche $\mathfrak{R}'$ angehörigen Wege daraus ableitbar. Insbesondere kann das nunmehr der Stelle x_0 zugehörige Funktionselement kein anderes sein, als die ursprünglich vorgelegte Potenzreihe $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$. Denn auf dem *speziellen* Wege, welcher zuerst dazu diente, $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ in $\mathfrak{P}(x|a_{11})$ überzuführen, ließe sich ja auch (eventuell mit Einschaltung geeigneter Zwischenpunkte) die Rückbildung von $\mathfrak{P}(x|a_{11})$ in $\mathfrak{P}_0(x|x_0)$ bewerkstelligen. Da es ferner freisteht, den mit δ bezeichneten Abstand von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ unbegrenzt zu verkleinern, so gilt schließlich das gewonnene Ergebnis *für das Innere des Rechtecks* $\mathfrak{R}$, womit also der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist

2. Es hat keine Schwierigkeit, das zur Definition von $f(x)$ angewendete Verfahren auf den Fall auszudehnen, daß der Bereich, in dessen Innern die gemachten Voraussetzungen gelten sollen, durch Ansetzen eines weiteren Rechtecks hergestellt wird, welches mit dem ursprünglich mit $\mathfrak{R}$ bezeichneten eine Seite ganz oder teilweise gemein hat. Man hat dann nur, nachdem $f(x)$ in dem einen, als Anfangsbereich gewählten (in den Figuren mit 1 bezeichneten) Rechteck definiert ist, einen gewissen Parallelstreifen dem benachbarten Rechteck, soweit es an die eine Seite des ursprünglichen anstößt, hinzuzufügen und die daselbst bereits bestehende Definition von $f(x)$ auf das *Rechteck* 2 (s. Fig. I) bzw. das an 1 unmittelbar anstoßende *Teilrechteck* 2 (s. Fig. 23 II, III) auszudehnen und eventuell das analoge Verfahren zur weiteren Fortsetzung von $f(x)$ über das Teilrechteck 3 bzw. 4 anzuwenden.

Es ist ersichtlich, daß dieses Verfahren und die damit verbundene Definition einer eindeutigen regulären Funktion durch sukzessives Ansetzen weiterer Rechtecke, deren jedes mit dem unmittelbar vorhergehenden und *nur* mit diesem längs einer Seite ganz oder teilweise zusammen-

hängt, auf das Innere eines so entstehenden *Treppenpolygons* ausgedehnt werden kann. Daraus folgt aber noch keineswegs die Möglichkeit der Übertragung auf ein *beliebiges* Treppenpolygon. Denkt man sich nämlich ein

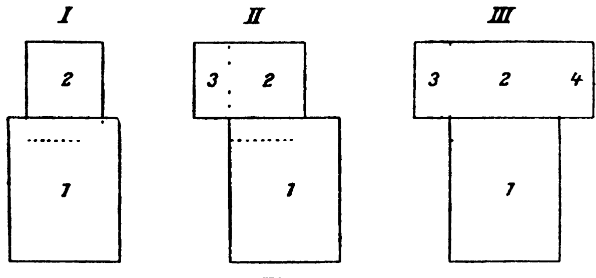


Fig. 23.

solches durch geeignete Parallelen zu den Seiten in eine Anzahl Rechtecke zerlegt, so kann bei Anwendung des oben beschriebenen Fortsetzungsverfahrens der ungünstige, das gewünschte Resultat in Frage stellende Fall eintreten, daß man von irgend einem bestimmten Rechteck ausgehend an eins der noch nicht erledigten Rechtecke von *zwei* (oder *mehr*) Seiten herankommt, so daß bei weiterer Durchführung der nunmehr vorhandenen *verschiedenen* Fortsetzungsmöglichkeiten die *Eindeutigkeit* des Endresultats nicht mehr gesichert erscheint. Es soll nun gezeigt werden, daß bei passender Wahl des Ausgangspunktes und zweckmäßiger Anordnung des Fortsetzungsverfahrens der geschilderte Übelstand stets vermieden werden kann. Hierzu dient der in Nr. 5 dieses Paragraphen mitgeteilte „Hauptsatz" über eine besondere Zusammensetzung jedes beliebigen Treppenpolygons aus Rechtecken, zu dessen Beweise wir zunächst zwei Hilfssätze voranschicken.

3. Definition. Zwei parallele Polygonseiten, die sich durch eine, abgesehen von den Endpunkten, aus lauter *Innenpunkten* des Treppenpolygons bestehende Horizontale oder Vertikale verbinden lassen, sollen *gegenüberliegend* heißen.

Hilfsatz I. *Verbindet man zwei gegenüberliegende Seiten eines Treppenpolygons $\mathfrak{T}$ durch eine senkrechte Gerade, so zerlegt dieselbe, als Schnitt aufgefaßt, das Treppenpolygon (d. h. sowohl die Begrenzung, wie die Innenfläche) in zwei Treppenpolygone.*

Beweis. Es seien zunächst $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ zwei *beliebige parallele* (d. h. nicht notwendig in dem obigen spezielleren Sinne „gegenüberliegende"[1]) Seiten mit senkrechten Verbindungslinien, die von keiner anderen Seite geschnitten

1) Mit anderen Worten: die senkrechten Verbindungslinien von AB und CD könnten auch, abgesehen von den Endpunkten, aus lauter *Außenpunkten* von $\mathfrak{T}$ bestehen.

werden, so läßt sich zeigen, daß bei Durchlaufung von $\mathfrak{T}$ in einem bestimmten Richtungssinne jene beiden stets in *entgegengesetzter* Richtung durchlaufen werden müssen.

Angenommen, dies wäre *nicht* der Fall, so daß also $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ in *derselben* Richtung, etwa, um eine Festsetzung zu treffen, in der Richtung der wachsenden Variablen: $A \longrightarrow B$, $C \longrightarrow D$ durchlaufen würden. Alsdann müßte bei einer in A beginnenden Umlaufung von $\mathfrak{T}$ die Fortsetzung von $\overline{AB}$ auf irgend einem Treppenwege einmal in C, sodann nach Durchlaufung von $\overline{CD}$ die weitere Fortsetzung schließlich wieder in A einmünden (wie das in der Figur I mit Hilfe der punktierten Linien schematisch angedeutet ist). Wird nun irgend ein Punkt E der Strecke $\overline{AB}$ mit dem senkrecht gegenüberliegenden Punkte F der Strecke $\overline{CD}$ geradlinig verbunden, so ließe sich ein bei A beginnender Umlauf über $AEFD$ und den dort anschließenden (durch die punktierten Linien angedeuteten) Weg wieder nach A zurückführen, ebenso nach C ein bei C beginnender über $CFEB$ und den dort anschließenden (punktierten) Weg. Das Treppenpolygon $\mathfrak{T}$ würde also auf diese Weise in zwei gesonderte Treppenpolygone $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ zerfallen. Nach § 9, Nr. 10 (S. 80) müßte deren jedes einen Überschuß von vier *gleichartigen* Ecken haben, und es müßte daher, je nachdem diese zweimal vier Ecken auch untereinander gleichartig sind oder nicht, ein Gesamtüberschuß von acht gleichartigen Ecken oder *gar keiner* vorhanden sein. Beide Annahmen erweisen sich aber als *unmöglich*, da der ursprüngliche Eckenvorrat von $\mathfrak{T}$ einen Überschuß von vier gleichartigen (nämlich konvexen) Ecken enthält, während andererseits die bei E und F neu hinzutretenden Ecken sich auf $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ so

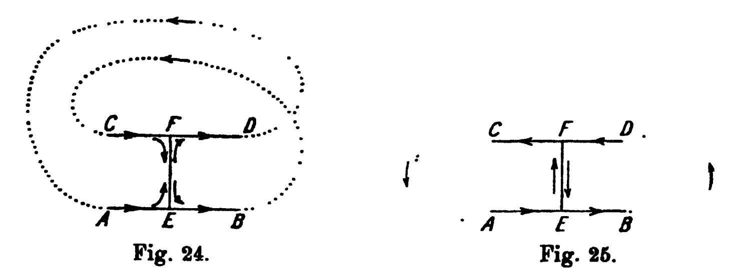


Fig. 24. Fig. 25.

verteilen würden, daß jedem dieser Polygone ein Paar *ungleichartiger* Ecken zufällt. — Damit ist also die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen.

Dies vorausgeschickt seien jetzt $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ zwei *gegenüberliegende* Seiten bzw. Stücke von Seiten des Polygons $\mathfrak{T}$, so wird eine Durchlaufung $\overline{AB}$ in der Richtung $A \longrightarrow B$ bei weiterer Fortsetzung des Umlaufs eine solche von $\overline{CD}$ in der entgegengesetzten Richtung $D \longrightarrow C$ zur Folge haben und von C aus schließlich nach A zurückführen (wie wieder

durch die punktierten Linien in Fig. II angedeutet wird). Zieht man jetzt wie zuvor die senkrechte Verbindungsgerade $\overline{EF}$, so läßt sich ein bei A beginnender Umlauf über $AEFC$ und den bei C anschließenden (durch Punkte angedeuteten) Treppenweg nach A zurückführen, ebenso ein bei D beginnender über $DFEB$ usw. zurück nach D. Das Treppenpolygon $\mathfrak{T}$ zerfällt also durch den Schnitt $\overline{EF}$ in *zwei* Treppenpolygone $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, und zwar werden die *Innenpunkte* von $\mathfrak{T}$, abgesehen von den nunmehr der Begrenzung angehörenden Punkten des Schnittes $\overline{EF}$, auch zu *Innenpunkten* von $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, da ja das *Außengebiet* von $\mathfrak{T}$ bei dem fraglichen Prozeß als solches völlig unberührt bleibt[1]) und daher auch wieder vollständig dem *Außengebiet* von $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ angehören muß. Es zerfällt also gleichzeitig mit der Begrenzung auch der *innere* Bereich von $\mathfrak{T}$ durch den Schnitt $\overline{EF}$ in zwei getrennte Stücke.

Dieses Resultat erleidet keinerlei Änderung, wenn einer der beiden Endpunkte des Schnittes $\overline{EF}$ oder auch jeder von beiden ein *Eckpunkt* sein sollte (der dann offenbar nur einer *nach außen konkaven* Ecke angehören kann). Man erkennt dies am einfachsten, wenn man dem betreffenden Schnitt zunächst eine minimale Verschiebung zuteil werden läßt.

4. Definition Unter einem *Querschnitt* verstehen wir eine Horizontale oder Vertikale, die zwei *Polygonpunkte* verbindet und, abgesehen von diesen, aus lauter *Innenpunkten* des Treppenpolygons besteht.

Hilfsatz II. *Von jedem Treppenpolygon $\mathfrak{T}$, das nicht schon durch einen einzigen Querschnitt in zwei Rechtecke zerfällt*[2]) *lassen sich sowohl durch horizontale, wie durch vertikale Querschnitte mindestens zwei freie Endstücke*[3]) *abschneiden.*[4])

Beweis. Ein Treppenpolygon mit $2m$ Seiten hat, wie jedes Treppenpolygon, einen Überschuß von vier *konvexen* Ecken und besitzt infolgedessen stets $m - 2$ *konkave* Ecken. Von jeder dieser letzteren läßt sich je ein Querschnitt sowohl in horizontaler, wie in vertikaler Richtung ziehen.

---

1) Anders, wie bei der zuerst in Betracht gezogenen Annahme, bei welcher ja ausdrücklich zugelassen wurde, daß der Zwischenraum zwischen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ dem *Außengebiet* angehören könnte (s die Fußnote auf S. 423).

2) Das tritt beim rechtwinkligen *Sechseck* ein, da dieses ja eine einzige *konkave* Ecke besitzt und daher nur einen *einzigen* horizontalen oder auch vertikalen Querschnitt zuläßt; ferner, wenigstens in bezug auf die eine Querschnittsrichtung bei denjenigen rechtwinkligen Achtecken, deren zwei (einzigen) *konkaven* Ecken in einer horizontalen oder vertikalen Geraden liegen.

3) Über die Bedeutung dieses Ausdruckes vgl. § 9, Nr. 5 (S. 72).

4) Dies ist nicht so zu verstehen, daß sich stets zwei freie Endstücke durch *horizontale* und zugleich zwei andere durch *vertikale* Querschnitte abtrennen lassen müßten. Vielmehr könnten diese beiden Arten von Endstücken teilweise zusammenfallen, so daß lediglich die *Wahl* zwischen beiden Schnittarten freistünde (vgl. § 9, Nr. 6, S. 73 insbesondere das dort zu Fig. 5, V und 5, VI Gesagte).

Man gehe nun von einer beliebig gewählten konkaven Ecke aus, etwa, um eine Festsetzung zu treffen, derjenigen konkaven Ecke C_1, welche als die *erste* auftritt, wenn man das Treppenpolygon von dem *tiefsten linken* Eckpunkt anfangend in *positiver* Richtung umläuft, und ziehe von C_1 aus zunächst einen *horizontalen* Querschnitt $\overline{C_1 D} = q_1$, durch den also das Treppenpolygon $\mathfrak{T}$ in *zwei* solche zerlegt wird: ein *„unteres"*, d. h. an die untere Seite des Querschnittes sich anschließendes $\mathfrak{T}_1$ und ein *„oberes"* $\overline{\mathfrak{T}}_1$. Möglicherweise ist $\mathfrak{T}_1$ schon ein *Rechteck*, also ein durch q_1 abgeschnittenes *freies Endstück.* Wenn *nicht*, so muß $\mathfrak{T}_1$ bei weiterer Fortsetzung des Umlaufs um diesen Bestandteil von $\mathfrak{T}$ in der Richtung $C_1 \rightarrow D$ noch mindestens eine *konkave* Ecke aufweisen. Es sei C_2 die *erste* konkave Ecke, welche hierbei zum Vorschein kommt, so ziehe man von C_2 aus einen weiteren horizontalen Querschnitt q_2, durch welchen $\mathfrak{T}_1$ in die beiden Teilpolygone $\mathfrak{T}'_1$ und $\mathfrak{T}_2$ zerfallen mag. Dabei soll $\mathfrak{T}'_1$ dasjenige Treppenpolygon bedeuten, dessen Begrenzung *beide* Querschnitte q_1 und q_2 enthält, während dann diejenige von $\mathfrak{T}_2$ nur aus dem *einen* Querschnitt q_2, im übrigen aus Seiten des ursprünglichen Polygons $\mathfrak{T}$ besteht. Da die *konkave* Ecke C_2 bei dieser Operation *vollständig verloren geht*[1]), so besitzt $\mathfrak{T}_2$ mindestens *eine konkave Ecke* weniger und infolgedessen mindestens sogar ein *Eckenpaar* weniger als $\mathfrak{T}_1$ (da ja der Unterschied zwischen der Anzahl der vorhandenen konvexen und konkaven Ecken immer konstant, nämlich $= 4$ bleiben muß). Ist trotzdem $\mathfrak{T}_2$ noch kein Rechteck, so läßt sich in analoger Weise ein Treppenpolygon $\mathfrak{T}_3$ davon abtrennen, dessen Begrenzung wiederum nur *einen* horizontalen Querschnitt q_3 enthält, im übrigen aus Seiten des ursprünglichen Treppenpolygons besteht und mindestens ein Eckenpaar weniger besitzt als $\mathfrak{T}_2$. Da die Anzahl der anfänglich vorhanden gewesenen Ecken eine *endliche* ist, andererseits jedes der von $\mathfrak{T}$ sukzessive abgetrennten Polygone $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3, \ldots$ einen Überschuß von vier *konvexen* Ecken behält, so muß nach einer begrenzten Anzahl der angedeuteten Operationen ein Treppenpolygon *mit überhaupt nur* vier und dann *eo ipso konvexen* Ecken, also ein (nur Innenpunkte von $\mathfrak{T}$ umschließendes) *Rechteck* zum Vorschein kommen, dessen Begrenzung *einen* und *nur* einen (horizontalen) Querschnitt enthält, d. h. schließlich ein durch diesen letzteren abgeschnittenes *freies Endstück.*

Die gleiche Schlußweise, auf das *„obere"* Treppenpolygon $\overline{\mathfrak{T}}_1$ angewendet, ergibt dann die Existenz eines *zweiten*, gleichfalls durch einen *horizontalen* Querschnitt abzutrennenden freien Endstücks.

Ersetzt man in der vorstehenden Betrachtung die *horizontalen* Quer-

---

1) Die durch einen Querschnitt erzeugten *neuen* Ecken können stets nur *konvexe* sein.

schnitte durch *vertikale* und vertauscht die Angaben „*unten*" und „*oben*" mit „*links*" und „*rechts*", so ergibt sich ein ganz gleichartiges Resultat.

5. Als unmittelbare Folgerung aus dem eben bewiesenen Satze resultiert nun der am Schlusse von Nr. 2 bereits angekündigte *Hauptsatz:*

Jedes Treppenpolygon $\mathfrak{T}$, *das nicht schon durch einen einzigen Querschnitt in zwei Rechtecke zerfällt*[1]), *läßt sich (auf mehrfache Art) in der Weise aus Rechtecken zusammensetzen, daß um einen rechteckigen Kern sukzessive weitere Rechtecke angesetzt werden, und zwar so, daß jedes neu hinzukommende Rechteck nur längs einer Seite ganz oder teilweise mit einem einzigen der bereits vorhandenen Rechtecke zusammenhängt.*

Beweis. Zunächst lassen sich von $\mathfrak{T}$ etwa durch zwei *horizontale* Querschnitte mindestens *zwei*, eventuell (d. h. bei besonderer Lage der Eckpunkte) auch *mehr* als zwei freie Endstücke abschneiden, die durchweg mit der Nummer 1 bezeichnet werden mögen. Jedes dieser Rechtecke stößt nur längs des Querschnitts, welcher eine Seite oder auch nur einen Teil einer Seite bildet (vgl. Fig. 5, I—VI, § 9, S. 73), an das übrigbleibende Treppenpolygon. Das letztere hat mindestens vier Ecken weniger als das ursprüngliche und gestattet, falls es nicht bereits ein Rechteck ist oder schon durch *einen* weiteren Horizontalschnitt in zwei Rechtecke zerfällt, ein weiteres Abschneiden von mindestens *zwei* freien (genauer gesagt, durch die erste Operation *frei gewordenen*) Endstücken, die dann die Nummer 2 erhalten sollen. Fährt man in dieser Weise fort, so wird schließlich nach einer bestimmten Anzahl — etwa $k-1$ — solcher Operationen ein *einziges Rechteck* übrig bleiben, dem also die Nummer k zukommt.[2]) Nach alledem läßt sich dann das ursprüngliche Treppenpolygon in der Weise wieder herstellen, daß man an das mit der Nummer k bezeichnete Rechteck als *Kern* zunächst dasjenige oder diejenigen mit der Nummer $k-1$, an das so entstandene diejenigen mit der Nummer $k-2$ ansetzt usf. Dabei hängt jedes neu hinzukommende Rechteck auf Grund seiner Entstehungsweise nur längs des Querschnittes, durch welchen es

1) Vgl. Fußn. 2, S. 425.

2) Man kann leicht eine obere Grenze für die Zahl k angeben. Bei jeder der ersten $k-2$ Operationen (NB. nach Ausschluß des bei der Formulierung des obigen Satzes schon erledigten einfachsten Falles $k=2$ muß ja $k \geq 3$ sein) gehen mindestens vier Ecken verloren, bei der $(k-1)^{\text{ten}}$ möglicherweise nur zwei. Dann bleiben schließlich nur noch die vier Ecken des mit k numerierten Kernrechtecks übrig. Wird also die Eckenzahl von $\mathfrak{T}$ mit $2m$ bezeichnet, so hat man: $4(k-2)+2+4 \leq 2m$ und somit:

$$k \leq \frac{m+1}{2}.$$

früher abgeschnitten wurde, mit einem *einzigen* Rechteck des bereits vorhandenen Komplexes zusammen.

In ganz analoger Weise kann man auch mit lauter *vertikalen* Querschnitten operieren. Das in diesem Falle resultierende Kernrechteck muß offenbar ein anderes sein wie zuvor, da das frühere *nur* längs seiner *horizontalen*, das jetzige *nur* längs seiner *vertikalen* Seiten mit dem übrigen Treppenpolygon zusammenhängt.

Schließlich kann man auch *horizontale* und *vertikale* Querschnitte beliebig *kombinieren*, insbesondere zu möglichster Abkürzung des Verfahrens in der Weise, daß man bei jeder einzelnen Operation *alle* überhaupt vorhandenen freien Endstücke abschneidet, soweit sich das durch Anwendung *beider* Arten von Querschnitten bewerkstelligen läßt.

6. Um jetzt den in Nr. 1 für ein *Rechteck* bewiesenen Satz über die Eindeutigkeit einer durch ein auf allen Wegen fortsetzbares Funktionselement $\mathfrak{P}(x|x_0)$ definierten analytischen Funktion auf ein beliebiges (zu den Koordinatenachsen parallel gestelltes) *Treppenpolygon* $\mathfrak{T}$ zu übertragen, denke man sich dasselbe auf Grund des zuvor bewiesenen Satzes in ein Kernrechteck und eine Anzahl sukzessive daran anzusetzender freier Endstücke zerlegt. Ist dann in einem beliebigen Teilrechteck das Funktionselement $\mathfrak{P}(x|x_0)$ vorgelegt, so beginne man damit, dasselbe auf irgendeinem, jenes Teilrechteck mit dem Kernrechteck verbindenden, im Innern von $\mathfrak{T}$ verlaufenden Wege bis in das Kernrechteck fortzusetzen. Hierauf läßt sich zunächst nach der Vorschrift von Nr. 1 $f(x)$ für das Kernrechteck eindeutig definieren, und diese Definition kann nach dem in Nr. 2 gelehrten Verfahren sukzessive über sämtliche Teilrechtecke von $\mathfrak{T}$ in vollkommen *eindeutiger* Weise fortgesetzt werden, da der Fortschritt von jedem einzelnen Teilrechteck zu dem nächstfolgenden stets nur auf *eine* Weise möglich ist. Daß schließlich die so definierte, im Innern von $\mathfrak{T}$ durchweg eindeutige und reguläre analytische Funktion $f(x)$ in der Umgebung der Stelle x_0 mit dem ursprünglich gegebenen Funktionselement $\mathfrak{P}(x|x_0)$ übereinstimmt, folgt dann genau so wie oben für den Fall des Rechtecks (s. den Schluß von Nr. 1).

Damit gilt dann schließlich der fragliche Satz mit Rücksicht auf § 10, Nr. 12 (S. 94) für das Innere jedes einfach zusammenhängenden Bereiches.

§ 57. Die singulären Stellen und Nullstellen eindeutiger analytischer Funktionen und eindeutiger Zweige mehrdeutiger analytischer Funktionen. — Verhalten einer Funktion in der Umgebung einer wesentlich singulären Stelle.

1. Es sei $f(x)$ eindeutig und regulär für jede Stelle x_0 einer gewissen Umgebung der Stelle $x = a$, etwa: $0 < |x_0 - a| < R$. Das Verhalten für $x = a$ selbst sei unbekannt.

Nach dem *Laurent*schen Satze muß alsdann für $0 < |x - a| < R$ eine Entwicklung von der Form:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{\nu} c_\nu (x - a)^\nu \tag{1}$$

existieren, wobei die c_ν eindeutig bestimmte Werte besitzen. Die Beschaffenheit von $f(x)$ für $x = a$ hängt dann wesentlich von derjenigen der Koeffizienten c_ν für *negative* Werte von ν ab, und zwar kommen dabei folgende drei Möglichkeiten in Betracht:

1. Es ist $c_{-\nu} = 0$ für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$
2. Es ist $|c_{-n}| > 0$ für irgendein bestimmtes $n \geqq 1$, dagegen $c_{-\nu} = 0$ für $\nu > n$.
3. Es gibt *unbegrenzt* viele positive ganze Zahlen ν, für welche $|c_{-\nu}| > 0$ ist.

Diese drei Fälle sollen jetzt einzeln genauer untersucht werden.

Erster Fall. Aus $c_{-\nu} = 0$ für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ folgt, daß die Entwicklung (1) sich auf die folgende reduziert:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} {}^{\nu} c_\nu (x - a)^\nu. \tag{2}$$

Dehnt man den Geltungsbereich dieser zunächst nur für $|x - a| > 0$ bestehenden Gleichung auf den Wert $x = a$ aus, setzt also:

$$f(a) = c_0 = \lim_{x \to a} f(x) \tag{3}$$

so erweist sich $f(x)$ für $x = a$ als *regulär*. Für das Eintreten dieses Falles ist offenbar *notwendig*, daß $|f(x)|$ in beliebiger Nähe der Stelle $x = a$ stets *unter einer endlichen Grenze* bleibt. Diese Bedingung ist aber auch *hinreichend*, da das wirkliche Vorhandensein von *negativen* Potenzen in der Entwicklung (1) stets zur Folge haben würde, daß $|f(x)|$ in der Nähe von $x = a$ *beliebig große* Werte annimmt (vgl. Fall II und III).

2. Zweiter Fall. Ist c_{-n} *von Null verschieden*, dagegen $c_{-\nu} = 0$ für $\nu > n$ [1]), so nimmt die Entwicklung (1) die Form an:

$$(4)\qquad f(x) = \sum_{-n}^{\infty} c_\nu (x-a)^\nu = \sum_{0}^{\infty} c_{\nu-n} (x-a)^{\nu-n},$$

und daher wird:

$$(4a)\qquad (x-a)^n \cdot f(x) = \sum_{0}^{\infty} c_{\nu-n} (x-a)^\nu,$$

d. h. $(x-a)^n \cdot f(x)$ ist für $x = a$ *regulär*, wenn nach Analogie von Fall I gesetzt wird:

$$(5)\qquad [(x-a)^n \cdot f(x)]_{x=a} = \lim_{x \to a} (x-a)^n \cdot f(x) = c_{-n},$$

d. h. im vorliegenden Falle *endlich und von Null verschieden.*

Die Stelle $x = a$ heißt in diesem Falle — d. h. allemal wenn $(x-a)^n \cdot f(x)$ für $x = a$ *von Null verschieden und regulär* ist — eine *außerwesentlich singuläre Stelle* oder auch *ein rationaler Pol*, und zwar ein *Pol* n^{ter} *Ordnung* der Funktion $f(x)$. Man sagt auch, $f(x)$ habe in der Umgebung der Stelle $x = a$ den *Charakter einer (gebrochenen) rationalen Funktion* [2]), da die Entwicklung (3), auf die Form gebracht:

$$(6)\qquad f(x) = R(x) + \sum_{0}^{\infty} c_\nu (x-a)^\nu, \quad \text{wo: } R(x) = \frac{c_{-1}}{x-a} + \cdots + \frac{c_{-n}}{(x-a)^n}$$

zeigt, daß $f(x)$ sich von der *rationalen Funktion* $R(x)$ für eine gewisse Umgebung der Stelle $x = a$ nur um eine eindeutige Funktion *regulären* Verhaltens unterscheidet, so daß also $f(x) - R(x)$ daselbst *regulär* ist.

Um das Verhalten von $f(x)$ für $x = a$ noch in anderer Weise zu charakterisieren, bemerke man, daß infolge der Gleichungen (4) und (5) nach § 38, Nr. 3 (S. 240) eine bestimmte Umgebung $|x-a| < \varrho$ existieren muß, für welche $(x-a)^n \cdot f(x)$ gleichfalls *von Null verschieden* und somit $\frac{1}{(x-a)^n \cdot f(x)} = \frac{1}{c_{-n} + c_{-(n-1)}(x-a) + \cdots}$ für $x = a$ gleichfalls *regulär* (übrigens auch von Null verschieden) ist. Hiernach ergibt sich

$$(7)\qquad \frac{1}{f(x)} = (x-a)^n \left\{ b_0 + \sum_{1}^{\infty} b_\nu (x-a)^\nu \right\} \quad \left(\text{wo offenbar: } b_0 = \frac{1}{c_{-n}}\right),$$

---

1) Die Beschaffenheit der Koeffizienten $c_{-1}, c_{-2}, \ldots, c_{-(n-1)}$ ist hierbei gleichgültig. Dasselbe gilt auch für die c_ν bei $\nu \geq 0$

2) Diejenigen Mathematiker, welche mit dem Ausdrucke *holomorph* jenes Verhalten bezeichnen, das wir *regulär* nennen, sagen von einer Funktion, die an irgendeiner Stelle einen (rationalen) *Pol* hat, sie sei daselbst *meromorph*.

d. h. *der Pol n^{ter} Ordnung* der Funktion $f(x)$ ist eine *Nullstelle n^{ter} Ordnung* für $\frac{1}{f(x)}$.

Dieses Ergebnis ist offenbar *umkehrbar*, d h. *jede Nullstelle n^{ter} Ordnung von $\frac{1}{f(x)}$ ist ein Pol n^{ter} Ordnung für $f(x)$*. Denn aus einer Entwicklung von der Form (7) — wo b_0 *von Null verschieden* — ergibt sich allemal für $(x-a)^n \cdot f(x)$ eine solche von der Form (4) $\left(\text{wo: } c_{-n} = \frac{1}{b_0}\right)$.

Da $\frac{1}{f(x)}$ mit $(x-a)$ eindeutig und stetig *der Null* zustrebt, so hat man:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \tag{8}$$

unabhängig davon, in welcher Weise die Veränderliche x der Stelle a zustrebt. Wir sagen hiernach: $f(x)$ werde für die außerwesentliche Stelle $x = a$ *unendlich groß*, und zwar *von der n^{ten} Ordnung*, wenn $\frac{1}{f(x)}$ für $x = a$ von der *n^{ten} Ordnung Null* wird.[1]) Oder auch: *der Pol n^{ter} Ordnung* ist für $f(x)$ allemal eine *n-fache Unendlichkeitsstelle*.

Wie wir die Gesamtheit der Zahlen $x = \xi + \eta i$, deren absoluter Betrag *jede noch so große* positive Zahl übersteigt, als eine einzige „*uneigentliche*" *Zahl* oder *Stelle* $x = \infty$ auffassen, so betrachten wir eine analytische Funktion $f(x)$ für jeden *Pol n^{ter} Ordnung* $x = a$ noch als „*uneigentlich*" *definiert*, immerhin also als „*definiert*", nämlich mit dem „*uneigentlichen*" Werte ∞ behaftet und rechnen demgemäß solche Stellen noch zum *Existenzbereiche* von $f(x)$. Der „*analytische*" Charakter von $f(x)$ zeigt sich alsdann darin, daß $(x-a)^n \cdot f(x)$ und $\frac{1}{f(x)}$ für $x = a$ nicht nur *eigentlich definiert*, sondern geradezu *regulären Verhaltens* sind.

3. Jeder *Pol n^{ter} Ordnung* von $f(x)$ ist ein solcher *$(n+1)^{ter}$ Ordnung* für die *Derivierte* $f'(x)$ [und daher allgemein ein solcher $(n+\nu)^{ter}$ Ordnung für $f^{(\nu)}(x)$]. Denn schreibt man Gl (4) folgendermaßen:

$$(x-a)^n \cdot f(x) = \mathfrak{P}(x-a) \qquad (\text{wo also: } \mathfrak{P}(0) = c_{-n} \neq 0), \tag{9}$$

so folgt:

$$(x-a)^n \cdot f'(x) + n(x-a)^{n-1} \cdot f(x) = \mathfrak{P}'(x-a)$$

und daher:

$$(x-a)^{n+1} \cdot f'(x) = -n \cdot (x-a)^n \cdot f(x) + (x-a) \cdot \mathfrak{P}'(x-a) \tag{10}$$

(d. h. *regulär*),

$$\lim_{x \to a} (x-a)^{n+1} \cdot f'(x) = -n \cdot \lim_{x \to a} (x-a)^n \cdot f(x) = -n \cdot \mathfrak{P}(0) \tag{11}$$

(d. h. *nicht* Null).

---

1) Vgl. § 38, Nr. 5 (S. 288).

Dividiert man Gl. (10) durch $(x-a)^{n+1} \cdot f(x) = (x-a) \cdot \mathfrak{P}(x-a)$, so ergibt sich noch die wichtige Beziehung:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-n}{x-a} + \frac{\mathfrak{P}'(x-a)}{\mathfrak{P}(x-a)}, \tag{12}$$

die auch in die Form gesetzt werden kann:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-n}{x-a} + \mathfrak{P}_1(x-a), \tag{13}$$

da $\mathfrak{P}(x-a)$ für $x=a$ *nicht* verschwindet. Jeder *rationale Pol* n^{ter}, d. h. *beliebiger Ordnung* von $f(x)$ ist also allemal ein *Pol erster Ordnung* für die Funktion $\frac{f'(x)}{f(x)}$, und zwar erscheint die Ordnungszahl n mit negativem Vorzeichen als Koeffizient von $\frac{1}{x-a}$.

Betrachten wir der Analogie halber auch den Fall, daß $x=a$ eine *n-fache Nullstelle* von $f(x)$ sei, also:

$$f(x) = (x-a)^n \cdot \mathfrak{P}(x-a) \quad \text{(wo wiederum } \mathfrak{P}(0) \textit{ nicht} \text{ Null)}, \tag{14}$$

so wird:

$$f'(x) = n \cdot (x-a)^{n-1} \cdot \mathfrak{P}(x-a) + (x-a)^n \cdot \mathfrak{P}'(x-a), \tag{15}$$

d. h. jede *n-fache Nullstelle* von $f(x)$ ist, falls $n \geqq 2$, eine $(n-1)$*fache Nullstelle* von $f'(x)$ und daher, falls $n > \nu$, eine $(n-\nu)$*fache Nullstelle* von $f^{(\nu)}(x)$, während dann $f^{(n)}(x) \neq 0$. Umgekehrt ist jede Nullstelle a von $f(x)$ eine *n-fache*, wenn $f^{(\nu)}(a) = 0$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, dagegen $f^{(n)}(a) \neq 0$ (wie sich unmittelbar aus der *Taylor*schen Entwicklung von $f(x)$ nach Potenzen von $x=a$ ergibt).

Ferner ergibt sich durch Division von Gl. (15) durch Gl. (14) die Beziehung:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{x-a} + \frac{\mathfrak{P}'(x-a)}{\mathfrak{P}(x-a)} = \frac{n}{x-a} + \mathfrak{P}_1(x-a), \tag{16}$$

deren vollkommene Analogie mit Gl. (12), (13) evident ist. Jede *Nullstelle* von $f(x)$ ist also gleichfalls ein *Pol erster Ordnung* für $\frac{f'(x)}{f(x)}$. Hieraus folgt, daß eine Stelle *regulären Verhaltens für* $\frac{f'(x)}{f(x)}$ *niemals eine Nullstelle oder ein rationaler Pol* für $f(x)$ sein kann.

4. Jede *auf der Grenze des Regularitätsbereiches* von $f(x)$ gelegene *nicht außerwesentlich singuläre* Stelle a, in deren Umgebung[1]) $f(x)$ *eindeutig* ist, soll eine *wesentlich singuläre Stelle* heißen. Aus dieser rein negativen Definition ergeben sich zunächst mit Rücksicht auf die unmittelbar vorangehenden Betrachtungen die folgenden Konsequenzen:

1) Dabei kommt als „*Umgebung*" der Stelle a nur derjenige Teil der Gesamtumgebung in Betracht, für welchen $f(x)$ überhaupt definiert ist.

1) *Jede wesentlich singuläre Stelle a von $f(x)$ ist auch eine ebensolche für* $\frac{1}{f(x)}$. Denn jedenfalls liegt zunächst a, geradeso wie für $f(x)$ auch für $\frac{1}{f(x)}$ *auf der Grenze des Regularitätsbereiches*, d. h. $\frac{1}{f(x)}$ muß in beliebiger Nähe von a auch Stellen *regulären* Verhaltens besitzen. Es folgt dies daraus, daß für jede *reguläre* Stelle von $f(x)$, die *keine Nullstelle* ist, $\frac{1}{f(x)}$ sich *regulär* verhält und daß andererseits solche Stellen wirklich vorhanden sein müssen, da eine *Nullstelle* niemals *Häufungsstelle von Nullstellen* sein kann (vgl. § 38, Nr. 6, S. 289). Wäre nun $\frac{1}{f(x)}$ für $x = a$ *regulär* und *von Null verschieden*, so müßte das gleiche für $f(x)$ gelten; wäre dagegen $x = a$ für $\frac{1}{f(x)}$ eine *Nullstelle* bzw. ein *rationaler Pol*, so müßte a ein *rationaler Pol* bzw. *eine Nullstelle* für $f(x)$ sein. Somit ist a eine *wesentlich singuläre* Stelle von $\frac{1}{f(x)}$.

2) Jede *Häufungsstelle* a von (unendlich vielen) *rationalen Polen* oder *wesentlich singulären Stellen* a_ν ist für eine in der Umgebung von a eindeutige Funktion $f(x)$ stets eine *wesentlich singuläre Stelle*. Denn wäre $f(x)$ für $x = a$ *regulär*, so könnten innerhalb einer gewissen Umgebung der Stelle a überhaupt *keine singulären Stellen* a_ν liegen. Und hätte $f(x)$ in $x = a$ einen *Pol* n^{ter} *Ordnung*, so wäre $(x-a)^n \cdot f(x)$ daselbst *regulär*, etwa:

$$(x-a)^n \cdot f(x) = \mathfrak{P}(x|a),$$

und daher, wenn a_ν innerhalb des Konvergenzkreises dieser Reihe liegt, auch:

$$(x-a)^n \cdot f(x) = \mathfrak{P}(x|a, a_\nu),$$

also schließlich:

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^n} \cdot \mathfrak{P}(x|a, a_\nu) = \mathfrak{P}_1(x - a_\nu),$$

(da ja $\frac{1}{(x-a)^n}$ in der Umgebung jeder von a *verschiedenen* Stelle a_ν nach positiven Potenzen von $(x-a_\nu)$ entwickelt werden kann). Es könnten also keinesfalls in beliebiger Nähe der Stelle $x = a$ *singuläre Stellen* a_ν liegen: die Stelle a muß daher unter der gemachten Voraussetzung jedenfalls eine *wesentlich singuläre* sein.

Das gleiche gilt offenbar, falls die Stelle a eine *Häufungsstelle* von unendlich vielen *Nullstellen* einer in der Umgebung von a eindeutigen Funktion $f(x)$ ist (sofern nicht etwa $f(x)$ *identisch Null ist*): denn nach dem unmittelbar zuvor Gesagten ist a als *Häufungsstelle* von *rationalen Polen* eine *wesentlich singuläre Stelle* für die Funktion $\frac{1}{f(x)}$ und somit auch für $f(x)$ selbst.

5. Nach diesen Vorbemerkungen betrachten wir noch den im Anschluß an die Entwicklung (1) zu erledigenden

Dritten Fall. Hier wird also angenommen, daß die Reihe der *negativen* Potenzen in der Entwicklung:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' c_\nu (x-a)^\nu$$

wirklich *unbegrenzt* ist (die Reihe der *positiven* Potenzen unterliegt keiner Beschränkung, sie kann eventuell auch bei einem bestimmten Exponenten abbrechen oder gänzlich fehlen). Auf Grund der gegebenen Definitionen muß dann die Stelle $x = a$ unter allen Umständen eine *wesentlich singuläre* sein. Wir bezeichnen eine solche *wesentlich singuläre* Stelle a, in deren *vollständiger* Umgebung (d. h. für *alle* x, die einer Beziehung von der Form $|x-a| < \varrho$ genügen) nur Stellen regulären Verhaltens liegen, als eine *isolierte* oder auch als einen *transzendenten Pol.*[1])

Aus dem § 38, Nr. 1 (S. 283) im Anschluß an Gl. (4) gesagten folgt nun zunächst, daß $|f(x)|$ in hinlänglicher Nähe der Stelle $x = a$ unter anderen Werten jedenfalls *beliebig große* annimmt, so daß also:

$$\overline{\lim_{x \to a}}\, |f(x)| = +\infty. \tag{17}$$

Sei sodann A eine ganz beliebige komplexe Zahl einschließlich der Null: dann ist die Stelle $x = a$ offenbar auch eine *isolierte wesentlich singuläre* für die Funktion $f(x) - A$. Besitzt nun $f(x) - A$ in *jeder* Nähe von $x = a$ *Nullstellen*, so *nimmt* $f(x)$ *den Wert* A *in jeder Nähe von* $x = a$ *wirklich (unendlich oft) an.*

Besitzt dagegen $f(x) - A$ innerhalb einer gewissen Umgebung von a *keine Nullstellen*, so ist $\frac{1}{f(x)-A}$ für alle Stellen dieser Umgebung (abgesehen von der Stelle a selbst) *eindeutig* und *regulär* mit der *wesentlich singulären* Stelle a, folglich hat man nach Gl. (17):

$$\overline{\lim_{x \to a}} \left| \frac{1}{f(x)-A} \right| = +\infty. \tag{18}$$

Alsdann muß aber $\left|\frac{1}{f(x)-A}\right|$ in hinlänglicher Nähe von a unter anderen Werten *beliebig große*, also $|f(x) - A|$ *beliebig kleine* Werte annehmen: in diesem Falle *kommt* also $f(x)$ dem Werte A in der Nähe der Stelle $x = a$ *beliebig nahe.* Somit ergibt sich:

In der Nähe jedes transzendenten Pols a nimmt $f(x)$ jeden beliebigen Wert A entweder unendlich oft an oder kommt

---

1) Wenn wir gelegentlich von *Polen* schlechthin sprechen, so sind damit immer nur *rationale* Pole gemeint.

ihm zum mindesten beliebig nahe. Für $x = a$ selbst ist $f(x)$ überhaupt nicht definiert.

6. Der eben bewiesene Satz bleibt aber auch bestehen, wenn die wesentlich singuläre Stelle a *keine isolierte*, sondern eine *Häufungsstelle* von *ausschließlich rationalen Polen* ist: damit ist *implizite* schon gesagt, daß diese rationalen Pole innerhalb einer gewissen Umgebung von a *keine weitere Häufungsstelle* besitzen sollen (jede solche Häufungsstelle würde ja eine weitere *wesentlich* singuläre Stelle von $f(x)$ darstellen). Denn *entweder* besitzt dann die Funktion $\frac{1}{f(x) - A}$ (für welche ja jene *rationalen Pole* von $f(x)$ als *rationale Pole* von $f(x) - A$ nur *gewöhnliche Nullstellen*, also Stellen *regulären Verhaltens* bilden) in der Nähe der wesentlich singulären Stelle a *keine rationalen Pole*, so daß also diese selbst in bezug auf $\frac{1}{f(x) - A}$ als *isoliert* auftritt. Dann muß aber nach dem obigen Satze $\frac{1}{f(x) - A}$ in der Nähe von a *beliebig große* Werte annehmen, also $f(x)$ dem Werte A *beliebig nahe* kommen. *Oder* $\frac{1}{f(x) - A}$ besitzt in jeder Nähe von a *rationale Pole*, also $f(x) - A$ ebensoviele *Nullstellen*, d. h. $f(x)$ *nimmt* dann wieder den Wert A geradezu *unendlich oft an.*

Dagegen *kann* der fragliche Satz seine Gültigkeit verlieren, wenn a eine *Häufungsstelle* von *wesentlich singulären* Stellen, z. B. ein Punkt einer *singulären Linie* ist, d. h. einer Linie, die aus *lauter* (dann *eo ipso wesentlich*) *singulären* Stellen besteht. Man beachte z. B. die in § 47, Nr. 5 (S. 362) angeführte Funktion:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} \nu \frac{1}{2^\nu} \cdot x^{2^\nu}, \tag{19}$$

welche über den Einheitskreis nicht analytisch fortgesetzt werden kann, so daß also *jede* Stelle $x = a$ mit dem absoluten Betrage $|a| = 1$ als eine *wesentlich singuläre* erscheint. Nichtsdestoweniger bleibt $f(x)$ für jede solche Stelle a und deren „Umgebung" (soweit von einer solchen hier noch die Rede sein kann) *endlich* und *stetig*, also $|f(x)|$ durchweg unter einer endlichen Schranke, nämlich $\leq \sum_{0}^{\infty} \nu \frac{1}{2^\nu} = 2$.

7. Die vorstehenden Betrachtungen sind leicht auf den Fall zu übertragen, daß statt einer im Endlichen gelegenen Stelle $x = a$ die Stelle $x = \infty$ in Betracht gezogen werden soll. Die Stelle $x = \infty$ wurde für $f(x)$ als eine solche *regulären Verhaltens* bezeichnet, falls $f\left(\frac{1}{y}\right)$ für $y = 0$

regulär ist. In analoger Weise hat die Stelle $x = \infty$ als *außerwesentlich* oder *wesentlich singuläre* für $f(x)$ zu gelten, je nachdem das entsprechende für $f\left(\frac{1}{y}\right)$ bezüglich der Stelle $y = 0$ stattfindet. Es wird also insbesondere die Stelle $x = \infty$ einen *rationalen Pol* n^{ter} *Ordnung* von $f(x)$ dann und nur dann vorstellen, wenn die Entwicklung von $f(x)$ für alle x, deren absoluter Betrag eine gewisse Zahl R überschreitet, als höchste positive Potenz die Potenz x^n und eventuell noch *positive* Potenzen mit *niedrigeren* Exponenten enthält, oder anders ausgesprochen, wenn $\frac{1}{x^n} \cdot f(x) = \sum_0^\infty c_\nu x^{-\nu}$, wo c_0 von Null verschieden. Treten dagegen *positive* Potenzen in *unbegrenzter* Anzahl auf, so ist $x = \infty$ eine *isolierte wesentlich singuläre* Stelle (ein *transzendenter Pol*). Das gleiche ist allemal der Fall, wenn die Stelle $x = \infty$ als eine *Häufungsstelle* von unendlich vielen *Nullstellen* erscheint. Dagegen ist die Stelle $x = \infty$ eine *nicht isolierte, wesentlich singuläre*, wenn sie eine *Häufungsstelle* von (außerwesentlich oder wesentlich) *singulären* Stellen ist. Insbesondere ergibt sich noch, daß die Stelle $x = \infty$ für jede *ganze rationale* Funktion ein *rationaler*, für jede *ganze transzendente* Funktion ein *transzendenter Pol* sein muß. Und umgekehrt ist eine *für jedes endliche x eindeutige* und *reguläre* analytische Funktion $f(x)$ eine *ganze*, und zwar *ganze rationale* oder *ganze transzendente* Funktion, je nachdem sie an der Stelle $x = \infty$ einen *rationalen*[1]) oder *transzendenten Pol* besitzt. Im *ersten* Falle hat man (vgl. § 20, Nr. 3, Fußn. 2, S. 182):

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \tag{20}$$

im *zweiten* dagegen nur:

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \, |f(x)| = +\infty, \tag{21a}$$

während im übrigen $f(x)$ in der Nähe der Stelle $x = \infty$, d. h. für solche x, deren Absolutwert eine *beliebig groß* anzunehmende Zahl $R > 0$ überschreitet, noch *jeden beliebigen* Wert *annimmt* oder ihm wenigstens *beliebig nahe kommt*, so daß insbesondere:

$$\underline{\lim_{x \to \infty}} \, |f(x)| = 0. \tag{21b}$$

Eine eindeutige analytische Funktion $f(x)$ *ohne wesentlich singuläre Stelle* kann immer nur eine *rationale* sein. Denn ist sie im Endlichen durchweg *regulär*, so ist sie nach dem zuvor Gesagten eine *ganze* rationale. Besitzt sie dagegen im Endlichen einen *Pol* a etwa von der Ordnung n, so

1) Die *Ordnungszahl* des Pols bestimmt zugleich *Grad* der ganzen Funktion (vgl. § 20, Nr. 3, S. 182).

besteht für eine gewisse Umgebung von a eine Entwicklung von der Form:

$$f(x) = \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \frac{c_\nu}{(x-a)^\nu} + \mathfrak{P}(x-a),$$

so daß also $f(x) - \sum_{0}^{n}{}_{\nu} \frac{c_\nu}{(x-a)^\nu}$ in der Umgebung von $x = a$ *regulär* ist Da $f(x)$ jedenfalls nur eine *endliche* Anzahl von Polen besitzen kann (denn andernfalls müßten diese ja eine *Häufungsstelle*, folglich $f(x)$ eine *wesentlich* singuläre Stelle haben), so läßt sich durch Subtraktion einer endlichen Anzahl analoger Partialbruchsummen, d. h. schließlich einer gewissen *rationalen* Funktion $R(x)$ die Differenz $f(x) - R(x)$ in jedem endlichen Bereiche *regulär* machen. Dann kann aber $f(x) - R(x)$ nur eine *ganze rationale* Funktion $g(x)$ sein (die sich auf eine *Konstante* reduzieren muß, falls die Stelle $x = \infty$ *keine* singuläre für $f(x)$ ist), so daß sich ergibt:

$$f(x) = R(x) + g(x),$$

womit die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

Kapitel VI.

Die elementaren ganzen und gebrochenen transzendenten Funktionen.

§ 58. Neuer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. — Ganze transzendente Funktionen ohne Nullstelle.

1. In § 52, Nr. 3 (S. 392) wurde gezeigt, daß eine in jedem endlichen Bereiche *eindeutige* und *reguläre* (bzw. *gleichmäßig* oder auch, was nach § 53, Nr. 2 und 4 auf dasselbe hinausläuft, *stetig differenzierbare*) Funktion, deren absoluter Betrag stets unter einer endlichen Schranke bleibt, sich auf eine *Konstante* reduziert. Dieses Resultat kann jetzt auch in der Form ausgesprochen werden, daß für jede *nicht konstante* eindeutige analytische Funktion mindestens eine *singuläre* Stelle (sei es eine im Endlichen gelegene oder die Stelle $x = \infty$) existieren muß. Wenden wir dasselbe auf den reziproken Wert einer *ganzen rationalen* Funktion $g(x)$ an, so folgt, daß $\frac{1}{g(x)}$ mindestens eine im *Endlichen* gelegene *singuläre* Stelle a besitzen muß, da ja die Stelle $x = \infty$ als *rationaler Pol* von $g(x)$ eine *Nullstelle* und somit eine Stelle *regulären* Verhaltens von $\frac{1}{g(x)}$ darstellt. Andererseits kann aber die Stelle a keinesfalls eine *wesentlich singuläre* für $\frac{1}{g(x)}$ sein, da sie in diesem Falle auch für $g(x)$ die gleiche Eigenschaft

besitzen müßte. Sie ist somit eine *außerwesentlich singuläre* für $\frac{1}{g(x)}$, also eine *Nullstelle* für $g(x)$. Durch diese einfache Schlußweise ergibt sich also von neuem der Fundamentalsatz der Algebra:

Jede (nicht konstante) ganze rationale Funktion hat mindestens eine im Endlichen gelegene Nullstelle.

2. Die eben angewendete Schlußweise beruhte *prinzipiell* auf dem Umstande, daß eine ganze *rationale* Funktion und folglich auch ihr reziproker Wert *keine wesentlich singuläre* Stelle besitzt. Sie ist daher auf eine ganze *transzendente* Funktion $G(x)$ nicht übertragbar In der Tat läßt sich hier nur soviel nachweisen, daß $G(x)$ sicher auch *beliebig kleine* Werte annimmt, mit anderen Worten, daß die *untere Grenze* aller möglichen Werte von $|G(x)|$ den Wert *Null* hat. Dagegen läßt sich *nicht* erschließen, daß wirklich eine bestimmte Stelle x (einschließlich $x = \infty$) vorhanden sein müßte, für welche die Beziehung: $G(x) = 0$ besteht. Da nämlich für $G(x)$ die Stelle $x = \infty$ als eine isolierte *wesentlich singuläre* erscheint, so wird zwar $G(x)$ in der Nähe der Stelle $x = \infty$ unter anderen Werten auch *beliebig kleine* annehmen. Nun ist aber *a priori* sehr wohl denkbar, daß solche „beliebig kleine" Werte *ausschließlich* in der Nähe von $x = \infty$ angenommen werden, und es könnte in diesem Falle die *stetige* Funktion $G(x)$ im *Endlichen* sicher keine *Nullstelle* besitzen, während sie in der Nähe von $x = \infty$ (d. h. für unbegrenzt wachsende Werte von $|x|$) nur der *Null* beliebig *nahe* zu kommen braucht, andererseits für $x = \infty$ *überhaupt nicht definiert* ist.

Um darüber volle Klarheit zu gewinnen, ob der eben gedachte Fall wirklich eintreten kann, wollen wir jetzt darauf ausgehen, zunächst *irgendeine* und daran anknüpfend die *allgemeinste* ganze transzendente Funktion *ohne Nullstelle* herzustellen.

3. Ist $G(x)$ eine ganze transzendente Funktion, also durch eine beständig konvergierende Potenzreihe definiert, so gilt das gleiche von ihrer Derivierten $G'(x)$. Soll dann $G(x)$ keine einzige im Endlichen gelegene Nullstelle besitzen, so ist dafür offenbar *notwendig*, daß $\frac{1}{G(x)}$, also auch $\frac{G'(x)}{G(x)}$ für jedes endliche x sich *regulär* verhält, d. h. selbst eine *ganze* (rationale oder transzendente) *Funktion* (eventuell auch eine *Konstante*) ist, also etwa:

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = g_1(x) \quad \text{(wo } g_1(x) \text{ eine } \textit{ganze} \text{ Funktion).} \tag{4}$$

Diese Bedingung ist dann aber auch *hinreichend*, da das durchwegs *reguläre* Verhalten von $\frac{G'(x)}{G(x)}$ nach der am Schlusse von Nr. 3 des vorigen

Paragraphen gemachten Bemerkung das *Verschwinden* von $G(x)$ definitiv *ausschließt*.

Die Gleichung (4) definiert somit die *allgemeinste* ganze transzendente Funktion *ohne Nullstellen*, und es fragt sich nur, ob derselben *bei beliebiger Annahme* von $g_1(x)$ stets durch eine andere ganze Funktion $G(x)$ genügt werden kann.

Zur Beantwortung dieser Frage lösen wir die Gl. (4) zunächst für die spezielle Wahl $g_1(x) = 1$ und setzen für diesen Fall $G(x) = E(x)$[1], so daß also $E(x)$ definiert ist durch die Gleichung:

$$\frac{E'(x)}{E(x)} = 1. \tag{5}$$

Da hiernach:

$$E'(x) = E(x) \tag{6}$$

und allgemein:

$$E^{(\nu)}(x) = E^{(\nu-1)}(x) = \cdots = E'(x) = E(x), \tag{7}$$

so muß $E(x)$ in der Umgebung der Stelle $x = 0$ die Form haben:

$$E(x) = \sum_0^\infty \frac{1}{\nu!} E^{(\nu)}(0) \cdot x^\nu = E(0) \cdot \sum_0^\infty \frac{x^\nu}{\nu!},$$

oder, wenn man noch dem hierbei willkürlich bleibenden konstanten Faktor $E(0)$ den Wert 1 beilegt:

$$E(x) = \sum_0^\infty \frac{x^\nu}{\nu!}. \tag{8}$$

Da aber diese Potenzreihe *beständig* konvergiert, so definiert sie in der Tat eine *ganze transzendente Funktion* von der verlangten Beschaffenheit.

4. Es sei nun $\mathfrak{P}(x - x_0)$ irgendeine für $|x - x_0| < r$ konvergierende Potenzreihe, so läßt sich $E(\mathfrak{P}(x - x_0))$ gleichfalls als Potenzreihe in $(x - x_0)$ darstellen, welche *zum mindesten* für $|x - x_0| < r$ konvergiert. Setzt man sodann:

$$F(x) = E(\mathfrak{P}(x - x_0)), \tag{9}$$

so ergibt sich als Derivierte von $F(x)$ auf Grund einer früher abgeleiteten Regel (§ 43, Gl. 26, S. 328) und mit Berücksichtigung von Gl. (6):

$$\begin{aligned} F'(x) &= \{D_y E(y)\}_{y = \mathfrak{P}(x - x_0)} \cdot \mathfrak{P}'(x - x_0) \\ &= E(\mathfrak{P}(x - x_0)) \cdot \mathfrak{P}'(x - x_0) \end{aligned}$$

---

1) In der Zahlentheorie pflegt man unter $E(x)$ bei reellem positiven x die größte in x enthaltene ganze Zahl zu verstehen (die wir bisher mit $[x]$ bezeichnet haben). Da die hier vorliegende Benutzung der Bezeichnung $E(x)$ in gänzlich anderer Bedeutung sich auf diesen und den nächstfolgenden Paragraphen beschränkt, so erscheint die Gefahr einer Verwechslung ausgeschlossen.

und daher:

$$(10)\qquad \frac{F'(x)}{F(x)} = \mathfrak{P}'(x - x_0) \qquad (|x - x_0| < r).$$

Die durch Gl. (9) zunächst für $|x - x_0| < r$ definierte analytische Funktion $F(x)$ genügt also allemal der („Differential"-)Gleichung (10). Es läßt sich nun andererseits zeigen, daß *jede* für eine gewisse Umgebung der Stelle x_0, etwa $|x - x_0| < \varrho$, eindeutige und reguläre Funktion, welche der Gl. (10) genügt, sich von $F(x)$ höchstens um einen *konstanten Faktor* unterscheiden kann. Denn hat man etwa:

$$(11)\qquad \frac{F_1'(x)}{F_1(x)} = \frac{F'(x)}{F(x)} = \mathfrak{P}'(x - x_0) \qquad (|x - x_0| < \varrho \leqq r),$$

so folgt:

$$\frac{F_1'(x)}{F_1(x)} - \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{F(x)}{F_1(x)} \cdot \frac{F(x) \cdot F_1'(x) - F_1(x) \cdot F'(x)}{F(x)^2} = 0$$

oder anders geschrieben:

$$\frac{F(x)}{F_1(x)} \cdot D_x\left(\frac{F_1(x)}{F(x)}\right) = 0, \quad \text{also:} \quad D_x\left(\frac{F_1(x)}{F(x)}\right) = 0,$$

(da aus Gl. (11) hervorgeht, daß $F(x) \neq 0$ für $|x - x_0| < r$) und somit:

$$(12)\qquad \frac{F_1(x)}{F_2(x)} = C, \qquad F_1(x) = C \cdot F(x),$$

wo C eine *Konstante* bedeutet.

Betrachtet man jetzt also die Gl. (10) als die ursprüngliche, zur Definition von $F(x)$ vorgelegte, wobei etwa:

$$(13)\qquad \mathfrak{P}'(x - x_0) = \sum_1^\infty {}^\nu c_\nu (x - x_0)^{\nu - 1}$$

gegeben sein mag, und bezeichnet man hierauf mit $\mathfrak{P}(x - x_0)$ diejenige Potenzreihe, welche $\mathfrak{P}'(x - x_0)$ zur Derivierten hat und *kein konstantes Glied* enthält, d. h. setzt man:

$$(14)\qquad \mathfrak{P}(x - x_0) = \sum_1^\infty {}^\nu \frac{c_\nu}{\nu} (x - x_0)^\nu,$$

so wird $E(\mathfrak{P}(x - x_0))$ *eine bestimmte* und:

$$(15)\qquad F(x) = C \cdot E(\mathfrak{P}(x - x_0))$$

die *allgemeinste*, in der Umgebung von $x = x_0$ reguläre Lösung der Gl. (10) darstellen. Dabei ist die willkürliche Konstante C offenbar mit $F(x_0)$ identisch, da ja für $x = x_0$: $E(\mathfrak{P}(0)) = E(0) = 1$ wird, also schließlich:

$$(16)\qquad F(x) = F(x_0) \cdot E(\mathfrak{P}(x - x_0)).$$

5. Wendet man dieses Resultat auf unsere Gl. (4) an — wobei lediglich $x_0 = 0$ zu setzen ist und für r, ϱ jede *beliebig große* positive Zahl

genommen werden kann, so ergibt sich nach Gl. (15):

$$(17) \qquad G(x) = C \cdot E(g(x)),$$

wo $g(x)$ diejenige ganze Funktion *ohne konstantes Glied* bezeichnet, deren Derivierte $= g_1(x)$ ist. Da aber $E(g(x))$ in eine beständig konvergierende Potenzreihe entwickelt werden kann, also auch wirklich eine *ganze* Funktion darstellt, so findet man:

Die allgemeinste ganze transzendente Funktion ohne Nullstelle ist von der Form:

$$G(x) = C \cdot E(g(x)) = C \cdot \sum_0^\infty \frac{1}{\nu!} \cdot (g(x))^\nu,$$

wo $g(x)$ eine beliebige (rationale oder transzendente) ganze Funktion ohne konstantes Glied bedeutet.

Da $c_0 + g(x)$ gleichfalls die Derivierte $g_1(x)$ besitzt, so hat man nach dem Satze der vorigen Nummer:

$$E(c_0 + g(x)) = C \cdot E(g(x))$$

und, indem man die Konstante C durch Substitution von $x = 0$ bestimmt:

$$(18) \qquad E(c_0 + g(x)) = E(c_0) \cdot E(g(x)).$$

§ 59. Die Exponentialfunktion $E(x) = e^x$ und die Funktionen $C(x)$, $S(x)$. — Additionstheoreme. — Der Absolutwert von e^x.

1. Wir wenden uns jetzt zur genaueren Untersuchung der im vorigen Paragraphen Gl. (8) definierten ganzen transzendenten Funktion:

$$(1) \qquad E(x) = \sum_0^\infty \frac{x^\nu}{\nu!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Da dieselbe der Beziehung genügt:

$$(2) \qquad D^\nu E(x) = E^{(\nu)}(x) = E(x) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so findet man mit Hilfe der *Taylor*schen Reihenentwicklung:

$$(3) \qquad E(x_0 + h) = \sum_0^\infty \frac{1}{\nu!} E(x_0) \cdot h^\nu = E(x_0) \cdot E(h)$$

oder, wenn man x und y für x_0 und h schreibt:

$$(4) \qquad E(x + y) = E(x) \cdot E(y).^{1)}$$

---

1) Diese Gleichung läßt unmittelbar erkennen, daß $E(x)$ wirklich keine Nullstelle x' besitzen kann. Denn aus

$$E(x') = 0$$

Diese Gleichung (welche sich auch unmittelbar aus Gl. (18) des vorigen Paragraphen durch die Substitution $c_0 = x$, $g(x) = y$ ergeben hätte[1]) lehrt also, daß die E-Funktion für eine *Summe* zweier Variabeln sich in sehr einfacher Weise rational durch E-Funktionen mit den *einzelnen* Variabeln ausdrücken läßt. Sie wird als das *Additionstheorem* der E-Funktion bezeichnet und ist für dieselbe geradezu *charakteristisch*, d. h.: Stellt man sich die Aufgabe, eine (nicht identisch verschwindende) eindeutige analytische Funktion $f(x)$ zu bestimmen, welche ein Additionstheorem von der Form:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \tag{5}$$

besitzt, so ergibt sich als deren *allgemeinste* Lösung:

$$f(x) = E(cx),$$

wo c eine beliebige Konstante bedeutet. Benützt man nämlich die unmittelbar einleuchtende Beziehung (vgl. § 43, Nr. 1, S. 324 vor Gl. (4)):

$$D_{x+y} f(x+y) = D_x f(x+y) = D_y f(x+y),$$

so folgt aus (5):

$$D_{x+y} f(x+y) \begin{cases} = f'(x) \cdot f(y) \\ = f(x) \cdot f'(y), \end{cases} \tag{6}$$

so daß also für *beliebige* Werte von x und y die Gleichung bestehen muß[2]):

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(y)}{f(y)},$$

---

würde *für jedes beliebige* x auf Grund von Gl. (4) folgen:

$$\begin{aligned} E(x) &\equiv E(x' + (x - x')) \\ &= E(x') \cdot E(x - x') = 0, \end{aligned}$$

was der Definitionsgleichung (1) widerspricht.

1) Die Gl. (4) in umgekehrter Schreibweise:

$$\left(\sum_0^\infty{}_\nu \frac{x^\nu}{\nu!}\right)\left(\sum_0^\infty{}_\nu \frac{y^\nu}{\nu!}\right) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{(x+y)^\nu}{\nu!}$$

läßt sich übrigens auch leicht durch Anwendung der *Cauchy*schen Multiplikationsregel für unendliche Reihen verifizieren.

2) Oder auch folgendermaßen: Aus den Gleichungen:

$$f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$$
$$f(y+h) = f(y) \cdot f(h)$$

folgt:

$$\frac{f(x+h)}{h \cdot f(x)} = \frac{f(y+h)}{h \cdot f(y)}$$

und, wenn man auf beiden Seiten $\frac{1}{h}$ subtrahiert:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h \cdot f(x)} = \frac{f(y+h) - f(y)}{h \cdot f(y)},$$

also für $h \to 0$:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(y)}{f(y)}.$$

d. h. man hat beständig:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = c, \tag{7}$$

wo c eine Konstante bedeutet. Durch Anwendung des in Gl (4) und (17) des vorigen Paragraphen enthaltenen Resultates (wobei jetzt $g_1(x) = c$, also $g(x) = cx$ zu setzen ist) folgt hieraus:

$$f(x) = C \cdot E(cx), \tag{8}$$

wo C eine von Null verschiedene Konstante, für die durch Substitution von $x = 0$ sich zunächst ergibt:

$$C = f(0) \neq 0. \tag{9}$$

Da aber aus der Bestimmungsgleichung (5) für $x = y = 0$ hervorgeht, daß:

$$f(0) = (f(0))^2, \text{ also: } f(0) = 1, \tag{10}$$

so findet man schließlich, wie behauptet:

$$f(x) = E(cx). \tag{11}$$

2. In I_1, § 33, Gl. (26) (S. 204) wurde gezeigt, daß die ursprünglich durch den Grenzwert: $\lim\limits_{\nu \to \infty}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$ definierte Zahl e auch in die Form gesetzt werden kann:

$$e = \lim_{\nu \to \infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{\nu!}\right), \quad \text{d. h.} \quad = \sum_0^\infty \frac{1}{\nu!}.$$

Es ist somit, wie aus Gl. (1) für $x = 1$ resultiert:

$$E(1) = e. \tag{12}$$

Ferner ergab sich a. a. O. S. 202, Gl. (18), daß bei beliebigem *reellen* α der (einzige positive) Wert der *Potenz* e^α darstellbar ist in der Form:

$$e^\alpha = \lim_{\nu \to \infty}\left(1 + \frac{\alpha}{\nu}\right)^\nu.$$

Dieser Grenzwert läßt sich aber, zunächst unter der Voraussetzung $\alpha > 0$, genau in derselben Weise in eine unendliche Reihe umformen, wie dies a. a. O. für den zur Definition von e benützten Grenzwert von $\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$ ausgeführt wurde. Man findet nämlich mit Hilfe des binomischen Satzes zunächst:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\alpha}{\nu}\right)^\nu &= 1 + \frac{\nu}{1} \cdot \frac{\alpha}{\nu} + \frac{\nu(\nu-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\alpha^2}{\nu^2} + \cdots + \frac{\nu(\nu-1)\ldots 1}{1 \cdot 2 \cdots \nu} \cdot \frac{\alpha^\nu}{\nu^\nu} \\ &= 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!}\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) + \frac{\alpha^3}{3!}\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\left(1 - \frac{2}{\nu}\right) + \cdots \\ &\qquad + \frac{\alpha^\nu}{\nu!}\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\left(1 - \frac{2}{\nu}\right)\cdots\left(1 - \frac{\nu-1}{\nu}\right) \\ &< 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \cdots + \frac{\alpha^\nu}{\nu!} \end{aligned} \tag{13}$$

und daher für $\nu \to \infty$:

$$(14\text{a}) \qquad e^\alpha \leqq \sum_0^\infty {}_\nu \frac{\alpha^\nu}{\nu!}.$$

Andererseits folgt aus (13) für jedes $n < \nu$:

$$\left(1+\frac{\alpha}{\nu}\right)^\nu > 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!}\left(1-\frac{1}{\nu}\right) + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{\nu}\right),$$

also für $\nu \to \infty$:

$$e^\alpha \geqq 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!}$$

und sodann für $n \to \infty$:

$$(14\text{b}) \qquad e^\alpha \geqq \sum_0^\infty {}_\nu \frac{\alpha^\nu}{\nu!},$$

so daß sich durch Vergleichung von (14a) und (14b) ergibt:

$$e^\alpha = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{\alpha^\nu}{\nu!},$$

anders geschrieben, mit Benutzung von Gl. (1):

$$E(\alpha) = e^\alpha \quad (\text{zunächst für } \alpha > 0).$$

Nun folgt aber aus Gl. (4), daß:

$$E(\alpha)\cdot E(-\alpha) = E(0) = 1,$$

andererseits hat man:

$$e^\alpha \cdot e^{-\alpha} = e^0 = 1 \quad (\text{also: } E(0) = e^0),$$

und somit auch:

$$E(-\alpha) = e^{-\alpha},$$

d. h. *die Beziehung:*

$$(15) \qquad E(x) = e^x \quad \left(\text{wo: } E(x) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{x^\nu}{\nu!}\right)$$

gilt für jedes reelle x.

Da hiernach der Wert von $E(x)$ für *jedes reelle* x mit demjenigen der *Potenz* e^x, genauer gesagt mit einem *bestimmten* (nämlich dem *einzigen positiven*) Werte der *Potenz* e^x zusammenfällt, so wollen wir einen ganz *bestimmten* Wert einer Potenz von e mit beliebigem *komplexen* Exponenten x *definieren* durch die Gleichung:

$$(16) \qquad e^x = E(x), \quad \text{d. h.} \quad e^x = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{x^\nu}{\nu!}.\,^{1)}$$

Die so definierte *eindeutige* (ganze transzendente) Funktion e^x der komplexen Veränderlichen x wird dann *Exponentialfunktion* genannt. Die für

1) Hiernach nimmt jetzt die allgemeinste ganze transzendente Funktion ohne Nullstellen (vgl. Gl. (17) des vorigen Paragraphen) die Form $C\cdot e^{g(x)}$ an.

diese Funktion zuvor bereits motivierte *Bezeichnungsweise* e^x bewährt sich des weiteren auch insofern, als für dieses Zeichen e^x gewisse fundamen tale Rechnungsregeln geradeso gelten wie für den positiven Wert einer Potenz mit positiver Basis und reellem ganzzahligen Exponenten (vgl, I_1, § 13, Gl. (2), (8), (10), (4)). So ergibt sich zunächst aus Gl. (4):

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \tag{17}$$

und, wenn man hier x durch $x - y$ ersetzt:

$$e^{x-y} \cdot e^y = e^x,$$

also:

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \tag{18}$$

und hieraus speziell für $x = 0$:

$$e^{-y} = \frac{1}{e^y}. \tag{18a}$$

Da ferner durch wiederholte Anwendung von Gl. (17) sich ergibt:

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} \cdots e^{x_n} = e^{x_1 + x_2 + \cdots + x_n},$$

so folgt für $x_\nu = x$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$:

$$(e^x)^n = e^{nx}, \text{ [1]} \tag{19}$$

wenn n eine *positive* oder, (mit Benutzung von (18a)) auch *negative ganze* Zahl bedeutet.

Anders liegen die Verhältnisse für Potenzen von e^x mit *gebrochenem* Exponenten. Substituiert man in Gl. (19) $\frac{x}{n}$ für x, so ergibt sich zunächst:

$$\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n = e^x,$$

und hieraus durch Vertauschung der beiden Gleichungsseiten und Übergang zu deren n^{ten} Wurzeln:

$$\sqrt[n]{e^x} = e^{\frac{x}{n}}. \tag{20}$$

Es fällt sofort auf, daß bei der angewendeten Schreibweise die beiden Seiten dieser Gleichung keineswegs völlig äquivalent sein können. Denn die *rechte* Seite stellt für jedes einzelne x eine *einzige*, nämlich die durch die Reihe $\sum_0^\infty {}_\nu \frac{1}{\nu!}\left(\frac{x}{n}\right)^\nu$ definierte Zahl vor, die *linke* dagegen ist *n-wertig*, sie kann auf Grund der üblichen Bedeutung des *Wurzelzeichens* (vgl. § 18, Nr. 4, S. 169; auch I_1, § 21, Nr. 1, S. 121) *jede* der n Lösungen y der

---

1) Ausführlicher geschrieben:

$$\left(\sum_0^\infty {}_\nu \frac{x^\nu}{\nu!}\right)^n = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{(nx)^\nu}{\nu!}.$$

Gleichung: $y^n = e^x$ vorstellen. Der Sinn der Gl. (20) ist also lediglich der, daß ein *bestimmter* der in der Bezeichnung $\sqrt[n]{e^x}$ zusammengefaßten n Wurzelwerte durch deren *rechte* Seite dargestellt wird.

Ist x *reell*, etwa: $x = \xi$, so steht es nach dem oben (im Anschluß an Gl. (15)) Gesagten frei, e^ξ und $e^{\frac{\xi}{n}}$ als positiv-reelle *Potenzen* aufzufassen. Alsdann besteht aber (nach I_1, § 31, Gl. (18), S. 190) die Beziehung:

$$(21\text{a}) \qquad (e^\xi)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\xi}{n}},$$

wo $(e^\xi)^{\frac{1}{n}}$ den (einzigen) positiv-reellen Wert von $\sqrt[n]{e^\xi}$ bedeutet. Es entsteht also sicher kein Widerspruch mit der vorstehenden Gleichung, wenn wir in analoger Weise auch für *komplexe* Werte von x mit $(e^x)^{\frac{1}{n}}$ den besonderen Wert von $\sqrt[n]{e^x}$ *bezeichnen*, welcher *definiert* wird durch die Gleichung:

$$(21\text{b}) \qquad (e^x)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{x}{n}}.$$

Doch wird es sich späterhin zur Vermeidung anderweitiger Kollisionen als zweckmäßig erweisen, den Geltungsbereich dieser Definitionsgleichung auf den Fall einzuschränken, daß der *imaginäre* Teil von x innerhalb gewisser Grenzen liegt bzw. sie noch in gewisser Weise zu modifizieren, falls diese Bedingung nicht erfüllt ist. Die hiermit zusammenhängenden Betrachtungen gehören einem Gedankenkreise an, der sich mit der Erweiterung des Potenzbegriffes beschäftigt und von dem in § 72 ausführlich die Rede sein wird.

3. Bringt man e^x auf die Form:

$$e^x = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} + \sum_0^\infty{}_\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$$

und ersetzt x durch xi, so wird:

$$(22) \qquad e^{xi} = C(x) + i \cdot S(x),$$

wo:

$$(23) \qquad C(x) = \sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu \cdot \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}, \quad S(x) = \sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu \cdot \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!},$$

so daß also $C(x)$, $S(x)$ *zwei neue ganze transzendente* Funktionen sind, deren Eigenschaften wir jetzt untersuchen wollen.

Unmittelbar aus den Definitionsgleichungen (23) folgt zunächst durch Deriviertenbildung:

$$(24) \qquad C'(x) = -S(x), \quad S'(x) = C(x),$$

und durch Substitution von $-x$ an Stelle von x:

$$C(-x) = C(x), \quad S(-x) = -S(x), \tag{25}$$

in Worten: $C(x)$ ist eine *gerade*, $S(x)$ eine *ungerade* Funktion (indem man allgemein eine Funktion von x, die bei Vertauschung von x mit $(-x)$ *ungeändert* bleibt bzw. den *entgegengesetzten* Wert annimmt, als *gerade* bzw. *ungerade* bezeichnet). Da sodann:

$$e^{-xi} = C(x) - iS(x), \tag{26}$$

so kann man vermittelst Addition bzw. Subtraktion der Gl. (22) und (26) den Definitionsgleichungen (23) auch die Form geben:

$$\begin{cases} C(x) = \dfrac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \\[2ex] S(x) = \dfrac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}, \end{cases} \tag{27}$$

während durch Multiplikation von (22) und (26) resultiert:

$$C^2(x) + S^2(x) = 1. \tag{28}$$

Ferner hat man:

$$e^{\pm(x+y)i} = e^{\pm xi} \cdot e^{\pm yi},$$

also:

$$\begin{aligned} C(x+y) + i\cdot S(x+y) &= \{C(x) + iS(x)\}\,\{C(y) + i\cdot S(y)\} \\ &= C(x)\cdot C(y) - S(x)\cdot S(y) + i\cdot\{S(x)\cdot C(y) + C(x)\cdot S(y)\}, \\ C(x+y) - i\cdot S(x+y) &= \{C(x) - iS(x)\}\,\{C(y) - i\cdot S(y)\} \\ &= C(x)\cdot C(y) - S(x)\cdot S(y) - i\cdot\{S(x)\cdot C(y) + C(x)\cdot S(y)\}, \end{aligned}$$

und hieraus findet man durch Addition und Subtraktion[1]) die folgenden *Additionstheoreme* für die C- und S-Funktion:

$$\begin{cases} C(x+y) = C(x)\cdot C(y) - S(x)\cdot S(y), \\ S(x+y) = S(x)\cdot C(y) + C(x)\cdot S(y), \end{cases} \tag{29}$$

und sodann durch Substitution von $-y$ für y, mit Benutzung von Gl. (25):

$$\begin{cases} C(x-y) = C(x)\cdot C(y) + S(x)\cdot S(y), \\ S(x-y) = S(x)\cdot C(y) - C(x)\cdot S(y). \end{cases} \tag{30}$$

Durch Anwendung der Beziehungen (24) kann man diese Gleichungen auch so umformen, daß sie immer nur *eine* der Funktionen C bzw. S und

1) NB. x, y sind ja beliebig *komplex*. Bei *reellen* x, y würde man die Additionstheoreme natürlich etwas einfacher aus *einer* der vorstehenden Gleichungen durch Trennung des Reellen und Imaginären erhalten.

erste *Derivierte* enthalten, nämlich:

$$(31)\qquad \begin{cases} C(x \pm y) = C(x)\cdot C(y) \mp C'(x)\cdot C'(y), \\ S(x \pm y) = S(x)\cdot S'(y) \pm S'(x)\cdot S(y). \end{cases}$$

Setzt man in den Gl. (29) $y = x$, so gehen dieselben in die folgenden über:

$$(32)\qquad \begin{cases} C(2x) = C^2(x) - S^2(x), \\ S(2x) = 2S(x)\cdot C(x). \end{cases}$$

Schreibt man in der ersten dieser Gleichungen $\frac{x}{2}$ statt x, also:

$$C(x) = C^2\left(\frac{x}{2}\right) - S^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

so ergeben sich durch additive bzw. subtraktive Verbindung mit der Gleichung:

$$1 = C^2\left(\frac{x}{2}\right) + S^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

die folgenden Beziehungen:

$$(33)\qquad \begin{cases} C^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + C(x)), \\ S^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - C(x)). \end{cases}$$

Substituiert man schließlich noch in Gl. (29) und (30):

$$x + y = u, \qquad x - y = v,$$

also:

$$x = \frac{u+v}{2}, \qquad y = \frac{u-v}{2},$$

so folgt durch Addition und Subtraktion:

$$(34)\qquad \begin{cases} C(u) + C(v) = 2C\left(\frac{u+v}{2}\right)\cdot C\left(\frac{u-v}{2}\right), \\ C(u) - C(v) = -2S\left(\frac{u+v}{2}\right)\cdot S\left(\frac{u-v}{2}\right). \end{cases}$$

$$(35)\qquad \begin{cases} S(u) + S(v) = 2S\left(\frac{u+v}{2}\right)\cdot C\left(\frac{u-v}{2}\right), \\ S(u) - S(v) = 2C\left(\frac{u+v}{2}\right)\cdot S\left(\frac{u-v}{2}\right). \end{cases}$$

Ersetzt man in Gl. (19) x durch $\pm xi$, die Exponentialfunktionen durch ihre Ausdrücke in C und S, so folgt zunächst:

$$(36)\qquad (C(\pm x) + iS(\pm x))^n = C(\pm nx) + iS(\pm nx),$$

anders geschrieben:

$$(37)\qquad C(nx) \pm i\cdot S(nx) = (C(x) \pm i\cdot S(x))^n,$$

und hieraus ergeben sich durch Entwicklung der rechten Seite nach dem binomischen Satze und durch Addition bzw. Subtraktion der beiden aus (37) hervorgehenden Gleichungen die Formeln:

$$(38)\begin{cases} C(nx) = C^n(x) - (n)_2 C^{n-2}(x)\cdot S^2(x) + (n)_4\cdot C^{n-4}(x)\cdot S^4(x) - \cdots \\ S(nx) = (n)_1 C^{n-1}(x)\cdot S(x) - (n)_3\cdot C^{n-3}(x)\cdot S^3(x) + (n)_5 C^{n-5}(x) S^5(x) - \cdots \end{cases}$$

4. Bedeutet η irgendeinen *reellen* Wert (einschließlich der *Null*), so sind $C(\eta)$, $S(\eta)$ als konvergierende Reihen mit reellen Termen gleichfalls *reell*. Infolgedessen ergibt sich aus der Beziehung:

$$e^{\pm\eta i} = C(\eta) \pm i\cdot S(\eta),$$

daß:

$$(39)\qquad |e^{\pm\eta i}| = \sqrt{C^2(\eta) + S^2(\eta)} = 1,$$

d. h. die e-Funktion nimmt für *rein-imaginäre* Werte der Veränderlichen nur Werte mit dem *absoluten Betrage* 1 an.

Da andererseits $e^{\pm\xi}$ für reelle positive Werte von ξ stets *positiv* reell, $\left(\text{und zwar: } e^{\xi} = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{1}{\nu!}\xi^{\nu} > 1,\ e^{-\xi} = \frac{1}{e^{\xi}} < 1\right)$, so folgt weiter, daß:

$$(40)\qquad |e^{\pm\xi\pm\eta i}| = |e^{\pm\xi}|\cdot|e^{\pm\eta i}| = e^{\pm\xi},$$

anders geschrieben:

$$(40\text{a})\qquad |e^x| = e^{\Re(x)}.$$

§ 60. Die Nullstellen von $C(x)$ und $S(x)$. — Die Bezeichnung $\frac{\pi}{2}$ für die kleinste positive Nullstelle von $C(x)$. — Periodizität von $C(x)$, $S(x)$, e^x.

1. Für die weiteren Betrachtungen erscheint es zunächst wichtig, die etwaigen *Nullstellen* von $C(x)$ und $S(x)$ festzustellen.

Da die Reihe für $S(x)$ kein konstantes Glied enthält, so ergibt sich zunächst, daß

$$(1)\qquad S(0) = 0,$$

wogegen:

$$(2)\qquad C(0) = 1$$

wird. Setzt man nun die Reihe für $C(x)$ in die Form:

$$C(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^4}{4!}\left(1 - \frac{x^2}{5\cdot 6}\right) + \frac{x^8}{8!}\left(1 - \frac{x^2}{9\cdot 10}\right) + \cdots,$$

so erkennt man, daß $C(x)$ sicher *positiv* bleibt für solche reelle x, welche dem Intervalle:

$$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$$

angehören. Schreibt man dagegen die obige Reihe folgendermaßen:

$$C(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{x^2}{3\cdot 4}\right) - \frac{x^6}{6!}\left(1 - \frac{x^2}{7\cdot 8}\right) - \cdots,$$

so wird:

$$C(2) < 1 - 2(1 - \tfrac{1}{3}) = -\tfrac{1}{3},$$

also *negativ*. Wegen der Stetigkeit von $C(x)$ muß es also (nach § 7, Nr. 4, S. 56) zwischen $\sqrt{2}$ und 2 *mindestens einen* Wert α geben, für den $C(x)$ *verschwindet*, also:

$$C(\alpha) = 0 \qquad (\sqrt{2} < \alpha < 2). \tag{3}$$

Es läßt sich aber zeigen, daß es wirklich nur *eine* solche Stelle α geben kann. Zunächst folgt nämlich aus $C^2(\alpha) + S^2(\alpha) = 1$, daß:

$$S(\alpha) = \pm 1$$

sein muß. Da aber:

$$S(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) + \cdots,$$

so erkennt man, daß bei positiven Werten von x sicher $S(x) > 0$, solange die *erste* Klammergröße (und *a fortiori* jede folgende) wesentlich *positiv* ausfällt, also für $0 < x < \sqrt{6}$, so daß insbesondere:

$$S(\alpha) = +1 \tag{4}$$

sein muß.

Gäbe es nun im Intervalle $[\sqrt{2}, 2]$ *zwei* Nullstellen für $C(x)$, etwa α und α', wo $\alpha < \alpha'$, so hätte man (Gl. (30) des vorigen Paragraphen):

$$S(\alpha' - \alpha) = S(\alpha') \cdot C(\alpha) - C(\alpha') \cdot S(\alpha) = 0,$$

was unmöglich ist, da $S(\alpha' - \alpha)$ wegen $0 < \alpha' - \alpha < \alpha' < 2$ *wesentlich positiv* sein müßte. Wir finden also:

Es gibt eine einzige positive Zahl $\alpha < 2$, für welche $C(\alpha) = 0$ (und sodann $S(\alpha) = +1$) wird.

Wir wollen für diese Zahl α, um den weiteren an dieselbe anknüpfenden Beziehungen gleich die allgemein übliche Form geben zu können, die Bezeichnung $\frac{\pi}{2}$ einführen. Die Zahl $\frac{\pi}{2}$ ist also zunächst ausschließlich *definiert* als die *kleinste positive Wurzel* der Gleichung:

$$C(x) = 0$$

(oder auch, was nach dem Gesagten auf dasselbe hinausläuft, der Gleichung: $S(x) - 1 = 0$). Diese Definition hat einen Sinn, da wir die *Existenz* einer solchen Wurzel ausdrücklich nachgewiesen haben. Im übrigen wissen wir von der so definierten Zahl π zunächst nur soviel, daß sie zwischen $2 \cdot \sqrt{2}$ und 4 liegt. Wir werden später Methoden zur wirklichen *Berechnung* dieser Zahl π angeben; vorläufig aber dürfen wir bei unseren weiteren Entwicklungen uns des Zeichens π als desjenigen einer *eindeutig definierten, im Gebiete der reellen positiven Zahlen sicher vorhandenen Zahl* bedienen.

2. Nach dem Gesagten ist:

$$(5)\qquad C\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad C(x)>0\quad\text{für:}\quad 0\leqq x<\frac{\pi}{2},$$

$$(6)\qquad S\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad S(x)>0\quad\text{für:}\quad 0<x\leqq\frac{\pi}{2}\cdot$$

Hieraus folgt durch Anwendung der Formel (32) des vorigen Paragraphen:

$$(7)\qquad C(\pi)\;=-1,\quad S(\pi)\;=0,$$

$$(8)\qquad C(2\pi)=+1,\quad S(2\pi)=0,$$

und da aus dem Additionstheorem (29) mit Benutzung von Gl (7) folgt:

$$C(n\pi)=C((n-1)\pi+\pi)=-C((n-1)\pi),$$
$$S(n\pi)=S((n-1)\pi+\pi)=-S((n-1)\cdot\pi),$$

so ergibt sich allgemein:

$$(9)\qquad C(n\pi)=(-1)^n,\quad S(n\pi)=0,$$

zunächst für jede *positive* und sodann, wegen: $C(-x)=C(x), S(-x)=-S(x)$, auch für jede *negative ganze Zahl* n.

Die weitere Anwendung des Additionstheorems liefert sodann mit Benutzung von Gl. (9) die Beziehungen:

$$(10)\qquad C(x\pm n\pi)=(-1)^n\cdot C(x),\quad S(x\pm n\pi)=(-1)^n\cdot S(x),$$

und hieraus folgt weiter:

$$(11)\qquad C(n\pi-x)=(-1)^n\cdot C(x),\quad S(n\pi-x)=(-1)^{n+1}\cdot S(x),$$

also speziell:

$$(12)\qquad C(2\pi-x)=C(x),\quad S(\pi-x)=S(x).$$

Schließlich wollen wir noch die mit Benutzung von Gl. (5) und (6) aus dem Additionstheorem resultierenden Beziehungen anmerken:

$$(13)\qquad C\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\mp S(x),\quad S\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=C(x).$$

3. Die Gl. (10) nehmen, wenn man für n eine gerade Zahl $2m$ setzt die Form an:

$$(14)\qquad C(x\pm 2m\pi)=C(x),\quad S(x\pm 2m\pi)=S(x),$$

d. h. die Funktionen $C(x)$ und $S(x)$ bleiben *ungeändert*, wenn man das Argument x um ein (positives oder negatives) *ganzes Vielfaches* von 2π vermehrt.

Man bezeichnet nun allgemein eine eindeutige Funktion $f(x)$, welche für jeden Wert x einer Beziehung von der Form genügt:

$$f(x+a)=f(x)\quad\text{(wo } a \text{ eine Konstante)}$$

als *periodisch;* die Konstante a heißt dann *eine Periode* von $f(x)$. Da

alsdann
$$f(x+na) = f(x+(n-1)a) = \cdots = f(x),$$
$$f(x-na) = f((x-na)+na) = f(x),$$

so folgt, daß jedes positive oder negative ganzzahlige Multiplum von a *ebenfalls eine Periode* von $f(x)$ darstellt Besitzt nun $f(x)$ *keine* weitere Periode als a und ganzzahlige *Multipla* von a, so heißt die Funktion $f(x)$ *einfach periodisch* und $\pm a$ die *wahre Periode* (primitive Periode, Elementarperiode) von $f(x)$ oder *die* Periode von $f(x)$ schlechthin. (Das *Vorzeichen* von a bleibt hierbei beliebig: *wesentlich* ist nur, daß jede andere Periode sich als *ganzzahliges Multiplum* von a darstellt, und hierfür ist es ganz gleichgültig, ob man $+a$ oder $-a$ als die *wahre* Periode betrachtet).

Hiernach können wir den Inhalt von Gl. (14) auch so aussprechen, daß die Zahl 2π *eine Periode* von $C(x)$ und $S(x)$ sind. Es soll nun weiter gezeigt werden, daß $C(x)$ und $S(x)$ *einfach periodisch* mit *der (wahren) Periode* 2π sind.

Zunächst bemerke man, daß jede Periode von $C(x)$ infolge der Relation (13):
$$S\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = C(x),$$
eine solche von $S\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, also auch von $S(x)$ ist — und umgekehrt.

Angenommen nun, es hätte $C(x)$ eine numerisch kleinere *reelle* Periode 2ω, die wir offenbar ohne Einschränkung der Allgemeinheit als *positiv* ansehen dürfen, also:
$$0 < 2\omega < 2\pi,$$
so hätte man zunächst:
$$C(2\omega) = C(0) = 1,$$
also nach Gl. (33) des vorigen Paragraphen:
$$S(\omega) = 0 \quad (\text{wo: } 0 < \omega < \pi),$$
was *unmöglich* ist, da nach (5):

$$S(x) > 0 \quad \text{für:} \quad 0 < x \leqq \frac{\pi}{2}, \tag{15}$$

und vermöge der Relation (12): $S(\pi - x) = S(x)$ auch:

$$S(x) > 0 \quad \text{für:} \quad 0 < \pi - x \leqq \frac{\pi}{2}, \text{ d. h. für: } \frac{\pi}{2} \leqq x < \pi. \tag{16}$$

Somit haben $C(x)$, $S(x)$ *keine kleinere reelle Periode als* 2π. Jede *größere reelle* Periode 2ω muß dann aber auch ein *Multiplum* von 2π, also $\omega = n\pi$ sein. Denn andernfalls könnte man setzen:
$$\omega = n\pi + \varrho \quad (\text{wo } 0 < \varrho < \pi)$$

und daher:

$$2\varrho = 2\omega - 2n\pi,$$

d. h. 2ϱ (wo $\varrho < \pi$) müßte dann gleichfalls eine Periode sein.

4. Um nun ferner zu erkennen, daß $C(x)$, $S(x)$ auch *keine komplexe* (eventuell *rein imaginäre*) *Periode* haben können, bemerke man zunächst, daß jede Periode 2ω von $C(x)$, $S(x)$ eine Periode $2\omega i$ für die Funktion e^x definiert. Setzt man nämlich $x = \xi + \eta i$, so wird:

$$e^x = e^{\xi + \eta i} = e^{\xi}\{C(\eta) + i \cdot S(\eta)\}$$
$$e^{x + 2\omega i} = e^{\xi + (\eta + 2\omega) i} = e^{\xi}\{C(\eta + 2\omega) + iS(\eta + 2\omega)\},$$

so daß also die beiden Gleichungen:

$$C(\eta + 2\omega) = C(\eta), \quad S(\eta + 2\omega) = S(\eta)$$

stets die folgende:

$$e^{x + 2\omega i} = e^x$$

nach sich ziehen.

Dieses Resultat ist für *reelle* ω ohne weiteres umkehrbar, so daß also insbesondere jeder *rein imaginären* Periode $2\omega i$ für e^x die *reelle Periode* 2ω für $C(x)$, $S(x)$ entspricht.

Es kann aber e^x *überhaupt keine andere* Periode besitzen als eine *rein imaginäre.* Denn ist $\alpha + \beta i$ eine Periode von e^x, so folgt:

$$e^{\alpha + \beta i} = e^0 = 1,$$

also auch:

$$|e^{\alpha + \beta i}| = e^{\alpha} = 1, \quad \text{d. h. } \alpha = 0,$$

womit die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

Daraus folgt dann schließlich, daß für e^x keine andere Periode als $2\pi i$, für $C(x)$ und $S(x)$ keine andere Periode als 2π existiert. Wir finden somit:

*Die ganzen Funktionen e^x, $C(x)$, $S(x)$ sind **einfach periodisch**, und zwar hat e^x die rein imaginäre Periode $2\pi i$ und $C(x)$, $S(x)$ die reelle Periode 2π.*

5. Aus Gl. (9):

$$S(n\pi) = 0 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

folgt zunächst, daß $S(x)$ die *reellen Nullstellen:*

$$(17) \qquad x = n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

besitzt. Es sind dies aber auch *alle möglichen reellen* Nullstellen von $S(x)$. Denn nach Ungl. (15), (16) besitzt $S(x)$ im Intervalle $0 \leqq x < \pi$ die *einzige* Nullstelle $x = 0$ und daher auf Grund der Gl. (10): $S(x \pm n\pi) = (-1)^n \cdot S(x)$ im Intervalle $\pm n\pi \leqq x < (\pm n + 1)\pi$ die *einzige* Nullstelle $x = \pm n\pi$.

Da sodann infolge der Gl. (13): $C\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -S(x)$ jeder Nullstelle α von $S(x)$ stets *eine* und *nur* eine Nullstelle von $C(x)$, nämlich $\alpha + \frac{\pi}{2}$, entspricht, so folgt, daß die *sämtlichen reellen* Nullstellen von $C(x)$ in der Form enthalten sind:

$$(18) \qquad x = \frac{2n+1}{2}\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Diese Nullstellen von $S(x)$ und $C(x)$ sind durchweg *einfache* Nullstellen, da $S(x)$ bzw. $C(x)$ und deren *erste Derivierte*, d. h. $C(x)$ bzw. $-S(x)$ *niemals gleichzeitig verschwinden.*

Es können aber $S(x)$, $C(x)$ überhaupt *keine weiteren* (also *keine komplexen*) Nullstellen besitzen. Denn hätte *eine* dieser beiden Funktionen eine solche Nullstelle, so müßte dies auf Grund der Beziehungen (13) auch für die *andere* zutreffen. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß etwa:

$$S(\alpha) = 0.$$

Daraus würde dann folgen, daß:

$$C(\alpha) = \pm 1, \quad C(2\alpha) = +1, \quad S(2\alpha) = 0,$$

und daher:

$$S(x+2\alpha) = S(x)\cdot C(2\alpha) + C(x)\cdot S(2\alpha) = S(x),$$

d. h. jede *weitere Nullstelle* würde die Existenz einer *neuen Periode* für $S(x)$ (also auch für $C(x)$) nach sich ziehen.

Somit sind die durch Gl. (17) bzw. (18) definierten Stellen die *sämtlichen* Nullstellen von $S(x)$ bzw. $C(x)$.

§ 61. Über den Verlauf von e^x, $C(x)$, $S(x)$. — Darstellung jeder komplexen Zahl in Exponentialform. — Die wesentlich singuläre Stelle $x = \infty$. — Periodenstreifen.

1. Setzt man $x = \xi + \eta i$, also:

$$(1) \qquad e^x = e^{\xi+\eta i} = e^{\xi}\cdot\{C(\eta) + i\cdot S(\eta)\},$$

so folgt, daß der Verlauf von e^x für beliebige *komplexe* Werte von x, durch denjenigen von e^{ξ}, $C(\eta)$, $S(\eta)$ für *reelle* Werte von ξ und η vollständig bestimmt ist. Dabei wird der *absolute Betrag* von e^x nach § 59, Gl. (40) (S. 449) durch e^{ξ}, also der *Einheitsfaktor* durch $e^{\eta i} = C(\eta) + i\cdot S(\eta)$ dargestellt.

Da nun $e^{\xi} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\xi^{\nu}$ und daher e^{ξ}, für $\xi = 0$ mit dem Werte 1 anfangend, bei *positiv wachsenden* Werten von ξ *stetig* und *monoton,* schließlich *unbegrenzt zunimmt* und andererseits infolge der Beziehung

$e^\xi = \frac{1}{e^{-\xi}}$, bei *negativ abnehmenden* Werten von ξ *stetig* und *monoton abnehmend*, schließlich *beliebig klein* wird, so erkennt man auf Grund des „Zwischenwertsatzes" (§ 7, Nr. 5, S. 57), daß e^ξ *jeden bestimmten positiven* Wert *einmal* und *nur* einmal annimmt, während die Werte ∞ bzw. 0 nur als $\lim\limits_{\xi \to +\infty} e^\xi$ bzw. $\lim\limits_{\xi \to -\infty} e^\xi$ zum Vorschein kommen.

Um das Verhalten von $e^{\eta i}$ zu beurteilen, bemerke man zunächst, daß $C(\eta)$ im Intervalle $0 \leqq \eta \leqq \pi$ *keinen* Wert mehr als *einmal* annehmen kann. Denn wäre etwa:

$$C(\eta') = C(\eta), \quad \text{wo:} \quad 0 \leqq \eta < \eta' \leqq \pi,$$

so hätte man nach Gl. (34) des § 59 (S. 438):

$$C(\eta') - C(\eta) = -2S\left(\frac{\eta' + \eta}{2}\right) \cdot S\left(\frac{\eta' - \eta}{2}\right),$$

d. h.

$$\textit{entweder:}\ S\left(\frac{\eta' + \eta}{2}\right) = 0, \quad \textit{oder:}\ S\left(\frac{\eta' - \eta}{2}\right) = 0,$$

was *beides* unmöglich ist, da:

$$0 < \frac{\eta' \pm \eta}{2} < \pi$$

Da nun speziell: $C(0) = 1$, $C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $C(\pi) = -1$, so folgt, daß $C(\eta)$ im Intervalle $\left(0 \cdot \cdot \frac{\pi}{2} \cdots \pi\right)$ *monoton abnehmend* die Wertereihe $(1 \ldots 0 \ldots -1)$ durchläuft; und infolge der Beziehung: $C(-x) = C(x)$ findet genau das nämliche für das Intervall $\left(0 \cdot\cdot -\frac{\pi}{2} \cdots -\pi\right)$ statt. Vermöge der Periodizität von $C(x)$ wiederholt sich dann der im Intervalle $[-\pi, +\pi]$ bestehende Verlauf in jedem Intervalle von der Form $[(2n-1)\pi, (2n+1)\pi]$ für $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Da sodann: $S(\eta) = \sqrt{1 - C^2(\eta)}$ und andererseits $S(\eta)$ für $0 < \eta < \pi$ als *wesentlich positiv* erkannt wurde (s. Gl. (15) und (16) des vorigen Paragraphen), so *wächst* $S(x)$ zunächst für $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ *monoton* von 0 bis 1, um sodann für $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ wegen $S(\pi - x) = S(x)$ wiederum von 1 bis 0 *monoton abzunehmen*. Im Intervalle $[0, -\pi]$ nimmt dann $S(\eta)$ (wegen: $S(-\eta) = -S(\eta)$) die entsprechenden *negativen* Werte an. Im übrigen verhält sich wiederum $S(\eta)$ in jedem Intervalle von der Form $[(2n-1)\pi, (2n+1)\pi]$ genau so wie im Intervalle $[-\pi, +\pi]$.

Bedeutet nun $\varrho + \sigma i$ eine beliebige komplexe Zahl mit dem absoluten Betrage 1, so daß also:

$$(2) \qquad \varrho^2 + \sigma^2 = 1, \quad \sigma = \pm\sqrt{1 - \varrho^2}, \quad |\varrho| \leqq 1, \quad |\sigma| \leqq 1,$$

so gibt es im Intervalle $0 \leqq \eta \leqq \pi$ *stets einen* und *nur einen* Wert η, für

welchen:

$$(3) \qquad C(\pm\eta) = \varrho$$

wird. Alsdann ist aber:

$$(4) \qquad S(\eta) = +\sqrt{1-\varrho^2}, \quad S(-\eta) = -\sqrt{1-\varrho^2},$$

(wo $\sqrt{1-\varrho^2}$ den *nicht negativen* Wert der Quadratwurzel bedeutet), so daß also:

$$(5) \qquad \begin{cases} \sigma = S(\eta), & \text{falls } \sigma > 0, \\ \sigma = S(-\eta), & \text{falls } \sigma < 0. \end{cases}$$

Es gibt also, solange σ *von Null verschieden*, stets *einen* und *nur* einen Wert η im Intervalle $[-\pi, +\pi]$, für welchen:

$$(6) \qquad C(\eta) + i\cdot S(\eta) = \varrho + \sigma i$$

wird. Im Falle $\sigma = 0$ hat man $\varrho = \pm 1$. Dabei ergibt sich für $\varrho = +1$ offenbar $\eta = -\eta = 0$, so daß hier wiederum nur *dieser einzige* Wert η innerhalb des Intervalles $[-\pi, +\pi]$ die Gl. (6) befriedigt. Ist dagegen $\varrho = -1$, so wird $\eta = \pm\pi$, und in diesem Falle würde sowohl $\eta = \pi$ als auch $\eta = -\pi$ der Gl. (6) genügen. Schließen wir also, um vollständige Eindeutigkeit für η herzustellen, den Wert $\eta = -\pi$ noch aus, so ergibt sich jetzt das folgende Resultat:

Bedeutet $\varrho + \sigma i$ eine beliebige komplexe Zahl mit dem absoluten Betrage 1, so gibt es im Intervalle:

$$-\pi < \eta \leqq +\pi$$

stets einen und nur einen Wert η, für welchen

$$\varrho + \sigma i = C(\eta) + iS(\eta) = e^{\eta i}.$$

Umgekehrt nimmt also $e^{\eta i}$ jeden Wert mit dem absoluten Betrage 1 einmal und nur einmal an, wenn η alle möglichen der Bedingung: $-\pi < \eta \leqq \pi$ genügenden Werte durchläuft.

2. Ist jetzt $\alpha + \beta i$ eine ganz beliebige von Null verschiedene komplexe Zahl, so kann man setzen:

$$\alpha + \beta i = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left\{\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + i\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right\}$$
$$= |\alpha + \beta i| \,.\, (\varrho + \sigma i).$$

Alsdann gibt es nach Nr. 1 *stets eine* und *nur eine* reelle Zahl ξ, so daß:

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = e^{\xi} \quad (-\infty < \xi < +\infty)^{1)},$$

---

1) Man findet ohne weiteres:

$$\xi = \lg\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

und *eine einzige* dem Intervalle $-\pi < \eta \leqq \pi$ angehörige Zahl η, so daß:

$$\varrho + \sigma i = e^{\eta i}.$$

Man findet somit schließlich die Beziehung:

$$(7)\qquad \begin{aligned} \alpha + \beta i &= e^{\xi + \eta i} \\ &= |\alpha + \beta i| \cdot e^{\eta i} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} -\infty < \xi < +\infty \\ -\pi < \eta \leqq \pi \end{pmatrix}$$

und damit den folgenden Satz:

Für jede von Null verschiedene komplexe Zahl $(\alpha + \beta i)$ *existiert* ***eine und nur eine*** *Darstellung von der Form* (7), *welche schlechthin als* ***Hauptdarstellung*** *(sc. in Exponentialform) bezeichnet werden soll. Umgekehrt nimmt also die Exponentialfunktion* $e^{\xi + \eta i}$ *jeden von Null verschiedenen Wert schon* ***einmal*** *und* ***nur einmal*** *an, wenn man* ξ *jeden endlichen reellen,* η *dagegen nur solche Werte beilegt, welche dem Intervalle* $-\pi < \eta \leqq \pi$ *angehören.*

Infolge der Periodizität von e^x gibt es dann für jede Zahl $\alpha + \beta i$ neben jener „Hauptdarstellung" *unendlich viele* Darstellungen in Exponentialform, nämlich, wenn ξ, η die frühere Bedeutung haben, *alle möglichen* von der Form:

$$(8)\qquad \alpha + \beta i = e^{\xi + (\eta \pm 2n\pi)i} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

und *nur* diese.[1]) Umgekehrt nimmt also $e^{\xi + \eta i}$ *jeden* endlichen von Null verschiedenen Wert *unendlich oft* an, wenn man außer ξ auch η *alle möglichen* endlichen Werte durchlaufen läßt. Insbesondere nimmt e^x (in Übereinstimmung mit dem allgemeinen Satze von § 57, Nr. 5, S. 434) noch in beliebiger Nähe der wesentlich singulären Stelle $x = \infty$ jeden solchen Wert unendlich oft an. Denn bedeutet R eine *beliebig groß* zu denkende positive Zahl, so kann man für die in Gl. (8) auftretende Zahl n eine untere Grenze m so bestimmen, daß:

$$(9)\qquad |\xi + (\eta \pm 2n\pi)i|^2 = \xi^2 + (\eta \pm 2n\pi)^2 > R^2 \qquad \text{für} \quad n \geqq m,$$

und man hat sodann:

$$\begin{aligned} & e^x = \alpha + \beta i & \text{für:}\quad & x = \xi + (\eta \pm 2n\pi)i \\ \text{wo:}\quad & |x| > R & \text{für:}\quad & n = m, m+1, m+2, \ldots \end{aligned}$$

Außerdem hat man:

$$(10)\qquad \lim_{\xi \to -\infty} e^{\xi} = 0, \qquad \lim_{\xi \to \infty} e^{\xi} = \infty,$$

also

$$(11)\qquad \underline{\lim}_{x \to \infty} |e^x| = 0, \qquad \overline{\lim}_{x \to \infty} |e^x| = \infty.$$

---

1) Aus $e^{x'} = e^x$ würde nämlich folgen: $e^{x'-x} = 1$, so daß $x' - x = 0$ oder von der Form $\pm 2n\pi i$ sein muß, wie aus dem Schlußsatz von Nr. 1 hervorgeht.

Daß unter den von e^x angenommenen Werten der Wert 0 *nicht* vorkommen kann, liegt in der Natur der Sache, da ja e^x ausdrücklich als ganze transzendente Funktion *ohne Nullstelle* definiert bzw. auf Grund dieser Definition hergestellt wurde.

Was den *„uneigentlichen"* Wert ∞ betrifft (vgl. § 57, Nr. 2 S. 431), so nimmt ihn ja überhaupt *eine transzendente* ganze Funktion in dem a. a. O. bezeichneten Sinne niemals an, vielmehr ist sie für die einzige Stelle, in deren Nähe sie *beliebig große* (aber auch unendlich viele andere) Werte annimmt, nämlich für $x = \infty$, *nicht definiert.*

3. Den Inhalt der vorstehenden Betrachtung kann man sich in folgender Weise geometrisch veranschaulichen. Zieht man im Abstande $\eta = \pm \pi$ zwei Parallelen zur reellen Achse, so entsteht ein nach rechts und links unbegrenzter Parallelstreifen von der Höhe 2π, dessen Punkte die Gesamtheit der Werte von der Form:

$$x = \xi + \eta i \qquad \left\{\begin{matrix} -\infty \leqq \xi \leqq +\infty \\ -\pi < \eta \leqq +\pi \end{matrix}\right\}$$

darstellen, sofern man die *obere* Grenzlinie noch zu dem betreffenden Bereiche rechnet. Es nimmt alsdann die Funktion $y = e^x$ ihren gesamten *„Wertvorrat"*, nämlich *jeden* von Null und ∞ verschiedenen Wert *einmal* und *nur* einmal an, wenn x nur alle möglichen Werte annimmt, die dem definierten Bereiche angehören, so daß also die Werte von y die ganze y-Ebene einfach überdecken, wenn diejenigen von x nur jenen Parallelstreifen (einschließlich der oberen Grenzlinie) erfüllen Dabei entspricht dem von den Punkten $+\pi i$ (*inkl.*) und $-\pi i$ (*exkl.*) begrenzten Stücke der imaginären x-Achse der Kreis mit dem Radius 1 um den Punkt $y = 0$, dem *links* bzw. *rechts* von der imaginären x-Achse gelegenen Teile des Parallelstreifens das *innerhalb* bzw. *außerhalb* jenes Kreises gelegene y-Gebiet. Der oberen Grenzlinie des Parallelstreifens ($x = \xi + \pi i$) entspricht die negative reelle y-Achse.

Denkt man sich die gesamte x-Ebene durch weitere Parallelen zur reellen Achse in den Abständen $\eta = \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$ in lauter Parallelstreifen von der Höhe 2π geteilt, wobei jedesmal die *obere* Grenzlinie noch zu dem betreffenden Streifen gerechnet werden soll, so wird offenbar vermöge der *Periodizität* von $y = e^x$ für jeden solchen Streifen das analoge gelten, wie für den zuerst betrachteten.

Wir wollen jeden solchen Parallelstreifen als einen *Periodenstreifen* der Funktion $y = e^x$ und den zuerst betrachteten speziell als den *ersten* Periodenstreifen bezeichnen. Da sich jede komplexe Zahl $x = \xi + \eta i$ *stets* auf *eine* und *nur* eine Weise in die Form setzen läßt: $x = \xi + (\eta_0 + 2n\pi)i$, wo n eine positive oder negative ganze Zahl (eventuell auch 0) und

$-\pi < \eta_0 \leqq \pi$, so entspricht jedem Punkte x irgendeines *beliebigen* Periodenstreifens ein bestimmter Punkt $x_0 = \xi + \eta_0 i$ im *ersten* Periodenstreifen. Die Stellen x und x_0 sollen dann *kongruent* heißen und ebenso irgendzwei Stellen x und x', welche *derselben* Stelle x_0 *kongruent* sind, so daß also:

$$e^{x_0} = e^x = e^{x'}.$$

Da das eigentliche Charakteristikum eines *Periodenstreifens* offenbar nur darin besteht, daß die Funktion e^x ihren gesamten Wertvorrat einmal annimmt, wenn x nur die sämtlichen Werte des betreffenden Teilgebietes durchläuft, so kann man die Einteilung der x-Ebene in Periodenstreifen noch auf unendlich viele andere Arten bewerkstelligen, z. B. durch jedes *beliebige* System von *parallelen Geraden*, deren Abstand *in der Richtung der imaginären Achse* gemessen den Wert 2π hat (womit implizite schon gesagt ist, daß die betreffenden Geraden *nicht parallel zur imaginären Achse* sein dürfen). Auch kann man statt der *geraden* Linien irgend welches System von *parallelen*, unter sich kongruenten, nach beiden Seiten unbegrenzten Kurven substituieren, welche nur so beschaffen sein müssen, daß sie von jeder Ordinate *nur einmal* geschnitten werden.

4. Da die Funktionen $C(x)$, $S(x)$ die reelle Periode 2π besitzen, so wird hier eine Einteilung der x-Ebene in *Periodenstreifen* durch solche Parallelen erzielt, deren Abstand *in der Richtung der reellen Achse* gemessen den Wert 2π hat. Nehmen wir etwa als *ersten* Periodenstreifen denjenigen, welcher begrenzt wird durch die beiden Parallelen zur Ordinatenachse im Abstande $\xi = \pm\pi$, so wird im übrigen die Einteilung in Periodenstreifen durch das System der Parallelen $\xi = \pm 3\pi$, $\pm 5\pi, \ldots$ hergestellt werden. Dabei mag etwa allemal die *rechtsseitige* Grenzlinie noch zu dem betreffenden Periodenstreifen gerechnet werden. Die Punkte $x_0 = \xi_0 + \eta i$ des *ersten* Periodenstreifens sind alsdann durch die Bedingung charakterisiert: $-\pi < \xi_0 \leqq +\pi$. Da sich aber jede komplexe Zahl $x = \xi + \eta i$ *stets* auf eine und *nur* auf eine Weise in die Form setzen läßt: $x = \xi_0 + 2n\pi + \eta i$, wo n eine positive oder negative ganze Zahl (eventuell auch 0) und ξ_0 der eben erwähnten Bedingung genügt, so existiert für jede Stelle x *eine* und *nur* eine *kongruente* Stelle x_0 im *ersten* Periodenstreifen, so daß also:

$$C(x) = C(x_0), \quad S(x) = S(x_0).$$

Es nehmen aber $C(x)$, $S(x)$ im *ersten* und somit in *jedem* Periodenstreifen ihren gesamten Wertvorrat *nicht*, wie e^x, *nur einmal*, sondern *zweimal* an. Dies folgt für $C(x)$ unmittelbar aus der Beziehung:

$$C(-x_0) = C(x_0).$$

Setzt man $x_0 = \xi_0 + \eta i$ und schränkt ξ_0 zunächst auf das Gebiet: $-\pi < \xi_0 < \pi$

ein (also mit Ausschluß von $\xi_0 = \pi$), so gehört auch die Stelle $-x_0 = -\xi_0 - \eta i$ dem *ersten* Periodenstreifen an, und sie ist wirklich allemal von x_0 *verschieden* mit alleiniger Ausnahme des Falles $x_0 = 0$. Hier fallen gewissermaßen diese beiden sonst *verschiedenen* Stellen in *eine einzige* zusammen: in der Tat nimmt $C(x)$ den zu $x = 0$ gehörigen Wert, nämlich 1, für $x = 0$ in demselben Sinne *zweimal* oder *zweifach* an, wie dies in § 24, Nr. 1 (S. 198) für eine *ganze rationale* Funktion definiert wurde, d. h. die Funktion $C(x) - 1$ besitzt die *zweifache Nullstelle* $x = 0$. Man erkennt dies unmittelbar aus der Entwicklung:

$$(12)\qquad C(x) - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$$ [1])

Für Werte von der Form: $x_0 = \pi + \eta i$ gehört die Stelle: $-x_0 = -\pi - \eta i$ nicht mehr dem *ersten* Periodenstreifen an. Dies gilt hier dagegen bezüglich der von $-x_0$ nur um eine Periode verschiedenen Stelle: $2\pi - x_0 = \pi - \eta i$, und man hat sodann:

$$(13)\qquad C(\pi + \eta i) = C(\pi - \eta i).$$

Dabei ist wieder $\pi - \eta i$ allemal von $\pi + \eta i$ *verschieden* mit einziger Ausnahme des Falles $\eta = 0$, d. h. für $x_0 = \pi$. In der Tat kommt der zu $x_0 = \pi$ gehörige Funktionswert, nämlich $C(x) = -1$, für *keine* andere Stelle x_0 des *ersten* Periodenstreifens zum Vorschein; dafür wird er aber an der Stelle $x_0 = \pi$ auch wiederum *zweifach* angenommen. Man erkennt dies am einfachsten mit Hilfe der Beziehung (cf. § 60, Gl. (10) S. 451):

$$(14)\qquad C(x) = -C(x - \pi) = -1 - \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} (-1)^{\nu} \cdot \frac{(x-\pi)^{2\nu}}{(2\nu)!},$$

also:

$$(15)\qquad C(x) + 1 = \frac{(x-\pi)^2}{2!} - \frac{(x-\pi)^4}{4!} + \cdots,$$

wodurch die Stelle $x = \pi$ als *zweifache* Nullstelle von $C(x) + 1$ charakterisiert wird.[2])

Daß im übrigen $C(x)$ auch wirklich *jeden beliebigen* endlichen Wert und *keinen öfters als zweimal* im ersten Periodenstreifen annimmt, ergibt

---

1) Oder auch (nach § 57, Nr. 3, S. 432) aus der Beziehung:

$$D(C(x) - 1)_{x=0} \equiv C'(0) = -S(0) = 0.$$

2) Oder auch folgendermaßen: Setzt man:

$$f(x) = C(x) + 1,$$

so wird:

$$f'(x) = -S(x),$$
$$f''(x) = -C(x),$$

also:

$$f(\pi) = f'(\pi) = 0, \quad f''(\pi) = 1,$$

d. h. $x = \pi$ ist eine *zweifache* Nullstelle von $f(x)$.

sich mit Hilfe der Beziehung:

$$C(x) = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}.$$

Soll dann $C(x) = a$ werden — unter a einen beliebigen komplexen Wert verstanden —, so hat man:

$$e^{xi} + e^{-xi} = 2a,$$

also:

$$e^{2xi} - 2ae^{xi} = -1$$

und daher:

$$e^{xi} = a + \sqrt{a^2 - 1} \tag{16}$$

(wo unter $\sqrt{a^2 - 1}$ irgendeiner der beiden Wurzelwerte zu verstehen ist). Es nimmt also $C(x)$ den beliebig vorgeschriebenen Wert a *dann* und *nur* dann an, wenn e^{xi} *je einen* der beiden Werte $a + \sqrt{a^2 - 1}$ und $a - \sqrt{a^2 - 1}$ annimmt. Dies geschieht aber im ersten Periodenstreifen von $C(x)$, welcher auch einen Periodenstreifen für e^{xi} bildet, je *ein*mal[1]), so daß also $C(x)$ den Wert a daselbst genau *zwei*mal annimmt. Dabei fallen diese beiden Werte $a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ nur dann in einen einzigen zusammen, wenn $a^2 - 1 = 0$, also $a = \pm 1$: dies waren in der Tat auch die einzigen Werte, welche von $C(x)$ nur an je *einer* Stelle des Periodenstreifens angenommen wurden.

5. Die analogen Betrachtungen gelten auch für $S(x)$. Man hat hier die Beziehung (§ 60, Gl. (11), S. 451):

$$S(\pm \pi - x_0) = S(x_0). \tag{17}$$

Ist dann $x_0 = \xi_0 + \eta i$ und $0 \leqq \xi_0 \leqq \pi$, so liegt offenbar die Stelle $\pi - x_0$ im *ersten* Periodenstreifen; ist dagegen $-\pi < \xi_0 < 0$, so liegt $-\pi - x_0$ im *ersten* Periodenstreifen. Dabei ist wieder allemal $\pm \pi - x_0$ von x_0 *verschieden*, außer wenn $x_0 = \pm \frac{\pi}{2}$; die zu diesen Stellen gehörigen Werte, nämlich $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, werden dann wiederum für keine andere Stelle des Periodenstreifens, dagegen für die genannten Stellen $x_0 = \pm \frac{\pi}{2}$ *zweifach* angenommen. Man überzeugt sich hiervon direkt mit Hilfe der Relation[2]) (s. § 60, Gl. (13), S. 451):

$$S(x) = \pm C\left(x \mp \frac{\pi}{2}\right), \tag{18}$$

---

1) Man bemerke, daß $a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ für keinen endlichen Wert von a zu *Null* werden kann, so daß also der Wert $a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ wirklich stets von e^{xi} angenommen werden muß.

2) Oder auch, indem man setzt:

$$f(x) = S(x) - 1,$$
$$f'(x) = C(x),$$
$$f''(x) = -S(x),$$

welche die Entwicklungen liefert:

$$S(x) = \quad 1 + \sum_{1}^{\infty} (-1)^{\nu} \cdot \frac{1}{(2\nu)!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2\nu}, \tag{19}$$

$$S(x) = -1 - \sum_{1}^{\infty} (-1)^{\nu} \cdot \frac{1}{(2\nu)!} \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^{2\nu}, \tag{20}$$

$$S(x) \mp 1 = \mp \left\{ \frac{1}{2!} \left(x \mp \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{4!} \left(x \mp \frac{\pi}{2}\right)^4 + \cdots \right\}. \tag{21}$$

§ 62. Einheitswurzeln. — Die Zahl π als Maßzahl für die halbe Länge des Einheitskreises. — Trigonometrische Funktionen. — Die Beziehungen $C(x) = \cos x$, $S(x) = \sin x$. — Darstellbarkeit jeder komplexen Zahl in trigonometrischer Form.

1. Aus der definierenden Identität (§ 59, Gl. (22), S. 446):

$$e^{xi} = C(x) + i \cdot S(x) \tag{1}$$

ergeben sich für $x = 2\pi, \pm\pi, \pm\frac{\pi}{2}$ mit Berücksichtigung der Gl (5) bis (8) des § 60 (S. 451) die Beziehungen:

$$e^{2\pi i} = 1, \quad e^{\pm\pi i} = -1, \quad e^{\pm\frac{\pi i}{2}} = \pm i. \tag{2}$$

Bedeutet jetzt n eine beliebige positive ganze Zahl, so hat man:

$$\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^n = e^{2\pi i} = 1, \tag{3}$$

d. h. $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ist eine Wurzel der Gleichung $x^n = 1$, also eine n^{te} *Einheitswurzel*. Dasselbe gilt offenbar von $\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ wegen: $\left(e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)^n = e^{2k\pi i} = 1$. Unter den auf diese Weise resultierenden *unendlich vielen* n^{ten} Einheitswurzeln können nach dem früher Gesagten nicht mehr als n verschiedene sein. In der Tat: Bedeutet k' eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, so läßt sich dieselbe stets in die Form setzen:

$$k' = h \cdot n + k,$$

wo h eine bestimmte ganze Zahl, k eine Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ Alsdann wird aber:

$$e^{\frac{2k'\pi i}{n}} = e^{2h\pi i + \frac{2k\pi i}{n}} = e^{\frac{2k\pi i}{n}},$$

und es gibt also *höchstens* so viel verschiedene Werte von $e^{\frac{2k'\pi i}{n}}$, als es

---

also:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \text{usf.}$$

Zahlen k gibt, d. h. höchstens n Die n für $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$ resultierenden Werte von $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ sind aber auch *wirklich* alle *verschieden*. Denn da e^x irgendeinen bestimmten Wert in jedem Periodenstreifen nur *ein*mal annimmt, so ist die Gleichung:

$$e^{\frac{2k_1\pi i}{n}} = e^{\frac{2k_2\pi i}{n}}$$

nur dann möglich, wenn:

$$\frac{2k_1\pi i}{n} - \frac{2k_2\pi i}{n} = 2s\pi i \quad \text{(wo } s \text{ eine ganze Zahl)},$$

also:

$$k_1 - k_2 = sn,$$

was unmöglich ist, wenn k_1, k_2 der Reihe $0, 1, \ldots, (n-1)$ angehören (oder noch etwas allgemeiner: wenn k_1, k_2 irgendeiner Reihe von n *aufeinander folgenden* ganzen Zahlen angehören). Es stellt somit der Ausdruck:

$$(4) \qquad e^{\frac{2k\pi i}{n}} = C\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + iS\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \left\{C\left(\frac{2\pi}{n}\right) + iS\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right\}^k$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ die n verschiedenen, also *alle möglichen* n^{ten} Einheitswurzeln dar.[1]) Setzt man speziell $k = 1$, so resultiert:

$$(5) \qquad e^{\frac{2\pi i}{n}} = C\left(\frac{2\pi}{n}\right) + iS\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

als diejenige n^{te} Einheitswurzel, welche früher (s. § 23, Nr. 3, S. 197) als die n^{te} *Grundeinheitswurzel* bezeichnet wurde, nämlich diejenige *komplexe* n^{te} Einheitswurzel, für welche unter der Voraussetzung $n > 4$ *beide* Bestandteile *positiv* und der *reelle* Teil zugleich ein *Maximum* ist. Es folgt dies unmittelbar daraus, daß, solange $\frac{2k\pi}{n} < \pi$, d. h. $k < \frac{n}{2}$, stets $S\left(\frac{2k\pi}{n}\right) > 0$ ist und daß andererseits $C\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 1$ für $k = 0$, sodann aber mit wachsendem k für $0 < k < \frac{n}{2}$ *monoton abnimmt* (s. § 61, Nr. 1, S. 455).[2])

---

1) Ist a eine beliebige komplexe Zahl und etwa (s S. 457, Gl. (7)):

$$a = |a| \cdot e^{\eta i} \qquad (-\pi < \eta \leq \pi),$$

so findet man hiernach für die n Werte von $\sqrt[n]{a}$, also die n Wurzeln der Gleichung:

$$x^n = a,$$

den Ausdruck:

$$\sqrt[n]{a} = |a|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{(\eta + 2k\pi)i}{n}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

2) Setzt man:

$$e^{\frac{2\nu\pi i}{n}} = \mathfrak{e}_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1),$$

also $\mathfrak{e}_1 = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ und daher: $\mathfrak{e}_\nu = \mathfrak{e}_1^\nu$, und ist $q \neq 0$ eine nicht durch n teilbare

2. Den n Einheitswurzeln:

$$\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^0, \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^1, \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^2, \ldots, \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^{n-1}$$

entsprechen n äquidistante, in der gegenseitigen Entfernung $\left|1-e^{\frac{2\pi i}{n}}\right|$ auf dem Einheitskreise gelegene Punkte, die also die Eckpunkte eines dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen n-Ecks bilden. Der *Umfang* dieses Polygons besitzt alsdann die Maßzahl: $n\cdot\left|1-e^{\frac{2\pi i}{n}}\right|$, und da sich ergibt:

$$(6)\quad \lim_{n\to\infty} n\cdot\left|1-e^{\frac{2\pi i}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left|\sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!}\left(\frac{2\pi i}{n}\right)^\nu\right| = \lim_{\varepsilon\to 0}\left|\sum_1^\infty{}_\nu \frac{(2\pi i)^\nu}{\nu!}\varepsilon^{\nu-1}\right| = 2\pi,$$

so wird man naturgemäß diesen Grenzwert definitionsweise als *Maßzahl für die Länge des Einheitskreises* anzusehen haben, wie bereits bei früherer Gelegenheit (§ 34, Nr. 6, S 268) für den Fall, daß an die Stelle von n eine Zahl von der besonderen Form $N = 2^n$ tritt, ausgeführt wurde.[1]) Die dort zur Vermeidung von Zweideutigkeiten mit p bezeichnete Zahl kann also jetzt durch π ersetzt werden, so daß die a. a. O. mit (23) numerierte Gleichung die Form annimmt:

$$(7)\qquad \lim_{n\to\infty} 2^n\,|1-c_n| \equiv \lim_{n\to\infty} 2^{n+1}\delta_{n+1} = 2\pi,$$

wo c_n die Grundwurzel der Gleichung $x^N = 1$ (also in der jetzigen Darstellungsform: $c_n = e^{\frac{2\pi i}{N}}$), δ_{n+1} den (vom Faktor i befreiten) imaginären Teil von c_{n+1} bedeutet $\left(\text{also: } \delta_{n+1} = S\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)$.[2]) Die prinzipielle Wichtig-

---

ganze Zahl, also $\mathfrak{e}_1^q \neq 1$, so findet man

$$\sum_0^{n-1}{}_\nu\, \mathfrak{e}_\nu^q = \sum_0^{n-1}{}_\nu\, \mathfrak{e}_1^{\nu q} = \frac{\mathfrak{e}^{nq}-1}{\mathfrak{e}^q-1} = 0;$$

nur, wenn q ein Multiplum von n (bzw. $q = 0$), also $\mathfrak{e}_1^q = 1$:

$$\sum_0^{n-1}{}_\nu\, \mathfrak{e}_\nu^q = n$$

1) In diesem Zusammenhange besagt also Gl. (6), daß nicht nur die Maßzahl für den Umfang des eingeschriebenen regelmäßigen N-Ecks mit $n\to\infty$ einer festen Grenze zustrebt, sondern daß der nämliche Grenzwert auch für jedes *beliebige* eingeschriebene regelmäßige n-Eck zustande kommt.

2) Man hat daher:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n S\left(\frac{\pi}{2^n}\right),$$

wie sich auch unmittelbar mit Hilfe der Potenzreihe für $S\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ verifizieren läßt.

keit der Gl. (7) besteht darin, daß sie ein erstes Mittel liefert, um die bisher von uns nur auf Grund einer bestimmten Eigenschaft definierte und als existierend erwiesene Zahl π (s. § 60, Nr. 1, S. 450), die jetzt zugleich als Maßzahl für die halbe Länge des Einheitskreises („*Ludolf*sche“ Zahl) erscheint, mit beliebiger Annäherung wirklich zu *berechnen* ($\pi = 3{,}14159\ldots$). Mit Benutzung von Gl. (23), S. 269 findet man nämlich:

$$(8) \qquad \pi = \lim_{n \to \infty} 2^n \delta_{n+1} = \lim_{n \to \infty} 2^n \cdot \underset{n-1}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \underset{n-2}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{2} \underset{3}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \underset{2}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \underset{1}{\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}}}}}}}}.$$

Diesem vermöge der iterierten Quadratwurzel für die Rechnung recht unhandlichen Ausdruck nebst gewissen prinzipiell unwesentlichen Modifikationen [1]) kommt immerhin eine außerordentlich große historische Bedeutung zu, da er für nahezu zwei Jahrtausende, von *Archimedes* bis in die erste Hälfte des 17. Jahrhunderts, den einzigen zur Berechnung des Kreisumfangs (und Inhalts) als gangbar erkannten und bis zu verhältnismäßig sehr hohem Genauigkeitsgrade ausgenützten Weg charakterisiert. Es wird sich sehr bald Gelegenheit finden, wesentlich zweckmäßigere Ausdrücke, nämlich Grenzwerte *rationaler* Zahlenfolgen (unendliche Reihen oder Produkte aus rationalen Zahlen) zur Darstellung bzw. Berechnung von π anzugeben.

3 Die Darstellung der n^{ten} Haupteinheitswurzel in der Form (5): $C\left(\frac{2\pi}{n}\right) + iS\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ soll zunächst dazu benutzt werden, um für den Fall *reeller* x die Identität der Funktionen $C(x)$, $S(x)$ mit den *trigonometrischen* Funktionen $\cos x$, $\sin x$ zu erweisen. In bezug auf die Definition dieser letzteren schicken wir zunächst die folgenden Bemerkungen voraus.

In einem Kreise mit dem Radius 1 denke man sich zwei Radien gezogen, deren einer, etwa *horizontal nach rechts* gerichtet und mit $\overline{OA}$ bezeichnet, als *fest*, während der andere $\overline{OB}$ als *beweglich* angesehen werden soll. Der von diesen beiden Radien gebildete *Winkel* AOB kann sodann als *eindeutig bestimmt* gelten durch die *Länge* des *Kreisbogens* $\widehat{AB}$, also auch durch diejenige (unbenannte) *Zahl* ξ, welche diesem Kreisbogen, gemessen nach der Längeneinheit (dem Kreisradius) als *Maßzahl* zugeordnet ist und die wir demgemäß als *definierende Maßzahl* für die Größe

1) Man ging z. B. statt, wie hier, vom eingeschriebenen *Quadrat* (s. die Fußnote S. 269), vom eingeschriebenen regelmäßigen *Sechseck* oder *Fünfeck* aus und legte demgemäß zur Berechnung von π ein Polygon von der Seitenzahl $3 \cdot 2^n$ oder $5 \cdot 2^n$ zugrunde. Da die *eingeschriebenen* Polygone nur eine *untere* Schranke für den Kreisumfang liefern, so hatte man (behufs Abschätzung der Fehlergrenze) auf Grund analoger Formeln den Umfang der entsprechenden *umschriebenen* Polygone als *obere* Schranke zu berechnen.

des Winkels AOB ansehen wollen. Ist diese, wie es ja in der elementaren Trigonometrie üblich ist, zunächst nach *Graden, Minuten, Sekunden* gemessen, so kann man die betreffende Angabe zunächst in eine solche nach *Graden* und *Bruchteilen* eines Grades umwandeln und hat, wenn die so gewonnene Zahl etwa mit γ bezeichnet wird, die oben mit ξ bezeichnete aus der Proportion zu bestimmen:

$$\xi : 2\pi = \gamma : 360. \tag{9}$$

Denkt man sich den Radius $\overline{OB}$ zunächst mit $\overline{OA}$ zusammenfallend und hierauf in der Weise um den Mittelpunkt gedreht, daß der Punkt B sich zunächst nach aufwärts bewegt und dann sukzessive die ganze Peripherie durchläuft, bis also der Radius $\overline{OB}$ wieder in die Anfangslage $\overline{OA}$ zurückgekehrt ist, sò läßt sich dieser Vorgang in der Weise beschreiben, daß dabei jene Maßzahl ξ des Winkels AOB als *stetige Veränderliche* die Werte von 0 bis 2π durchläuft

Macht man jetzt $\overline{OA}$ zur positiven Abszissenachse, ein auf $\overline{OA}$ im Punkte O nach oben errichtetes Lot zur positiven Ordinatenachse, so wird die *Abszisse* des veränderlichen Punktes B (d. h. die betreffende *Längenzahl* mit dem auf Grund der Koordinatenmethode ihr zukommenden *Vorzeichen*) als der *Kosinus*, die *Ordinate* als der *Sinus* von ξ (in Zeichen: $\cos\xi$, $\sin\xi$) bezeichnet.

Der Verlauf der auf diese Weise zunächst für das Intervall $0 \leqq \xi \leqq 2\pi$ eindeutig definierten *„trigonometrischen" Funktionen* $\cos\xi$, $\sin\xi$ kann alsdann folgendermaßen schematisch dargestellt werden:

$$\left\{\begin{array}{lccccccccc} \xi: & 0 & < & \frac{\pi}{2} & < & \pi & < & \frac{3\pi}{2} & < & 2\pi \\ \cos\xi: & 1 & \overset{+}{>} & 0 & \overset{-}{>} & -1 & \overset{-}{<} & 0 & \overset{+}{<} & 1 \\ \sin\xi: & 0 & \overset{+}{<} & 1 & \overset{+}{>} & 0 & \overset{-}{>} & -1 & \overset{-}{<} & 0 \end{array}\right. \tag{10}$$

wenn durch die Zeichen $<$ bzw. $>$ ein *monotones Zu-* bzw. *Abnehmen* und durch das hineingesetzte $+$ oder $-$ das in dem betreffenden Intervall herrschende Vorzeichen ausgedrückt wird.

4. Durch einfache geometrische Betrachtungen, die wir als bekannt voraussetzen, wird bewiesen, daß:

$$\left\{\begin{array}{l} \cos(\xi \pm \eta) = \cos\xi \cdot \cos\eta \mp \sin\xi \cdot \sin\eta, \\ \sin(\xi \pm \eta) = \sin\xi \cdot \cos\eta \pm \cos\xi \cdot \sin\eta \end{array}\right. \tag{11}$$

zunächst unter der Voraussetzung, daß ξ, η, $\xi \pm \eta$ die Grenzen des Intervalls $(0, 2\pi)$ nicht überschreiten, da ja die betreffenden Funktionen nur soweit definiert sind. Die Gl. (11) können dann aber dazu dienen, die Definition der Funktionen $\cos\xi$, $\sin\xi$ auf *beliebige positive* und *negative* Werte von ξ auszudehnen.

Insbesondere ergibt sich zunächst (wegen: $\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$):

$$\cos(\xi + 2\pi) = \cos\xi, \quad \sin(\xi + 2\pi) = \sin\xi,$$

also für $\xi = 2\pi$:

$$\cos 4\pi = 1, \qquad \sin 4\pi = 0.$$

Daraus folgt wieder mit Benutzung der Gl. (11):

$$\cos(\xi + 4\pi) = \cos\xi, \quad \sin(\xi + 4\pi) = \sin\xi,$$

und durch weitere Fortsetzung dieser Schlußweise:

$$\left.\begin{array}{lll} (12) & \cos 2k\pi = 1, & \sin 2k\pi = 0 \\ (13) & \cos(\xi + 2k\pi) = \cos\xi, & \sin(\xi + 2k\pi) = \sin\xi \end{array}\right\} k = 1, 2, 3, \ldots$$

Schließlich ergibt sich aus den Gl. (11) für $\xi = 0$:

$$(14) \qquad \cos(-\eta) = \cos\eta, \quad \sin(-\eta) = -\sin\eta,$$

so daß nunmehr mit Hilfe der Gl. (13) und (14) die Funktionen $\cos\xi$, $\sin\xi$ *für alle reellen Werte* von ξ eindeutig definiert sind. Man erkennt dann leicht, daß diese Funktionen auch in dem so *erweiterten* Definitionsbereiche den Additionstheoremen (11) genügen.

Um ferner die *Stetigkeit* von $\cos\xi$, $\sin\xi$ nachzuweisen, hat man für jedes $h \gtrless 0$:

$$\cos(\xi + h) = \cos\left(\xi + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) = \cos\left(\xi + \frac{h}{2}\right)\cdot\cos\frac{h}{2} - \sin\left(\xi + \frac{h}{2}\right)\cdot\sin\frac{h}{2}$$

$$\cos\xi \quad = \cos\left(\xi + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right) = \cos\left(\xi + \frac{h}{2}\right)\cdot\cos\frac{h}{2} + \sin\left(\xi + \frac{h}{2}\right)\cdot\sin\frac{h}{2}$$

und daher:

$$(15) \qquad |\cos(\xi + h) - \cos\xi| = 2\left|\sin\left(\xi + \frac{h}{2}\right)\right|\cdot\left|\sin\frac{h}{2}\right| < \varepsilon,$$

da $\left|\sin\left(\xi + \frac{h}{2}\right)\right| \leqq 1$ und zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ der Winkel $\frac{h}{2}$ so gewählt (d. h. konstruiert) werden kann, daß (die Länge der oben bezeichneten *Ordinate*) $\left|\sin\frac{h}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ ausfällt.

Zugleich wird dann auch:

$$(16) \qquad |\sin(\xi + h) - \sin\xi| = 2\left|\cos\left(\xi + \frac{h}{2}\right)\right|\cdot\left|\sin\frac{h}{2}\right| < \varepsilon,$$

woraus die *Stetigkeit* von $\cos\xi$, $\sin\xi$ für jedes endliche ξ unmittelbar hervorgeht.

5. Durch Ausführung der Multiplikation und Anwendung der Additionstheoreme (11) ergibt sich:

$$\begin{aligned} &(\cos\xi + i\sin\xi)(\cos\eta + i\sin\eta) \\ &= \cos\xi\cdot\cos\eta - \sin\xi\cdot\sin\eta + i(\sin\xi\cdot\cos\eta + \cos\xi\cdot\sin\eta) \\ &= \cos(\xi + \eta) + i\sin(\xi + \eta) \end{aligned}$$

und durch $(n-1)$malige Anwendung dieser Schlußweise:

$$\prod_{\nu}^{n}(\cos\xi_\nu + i\sin\xi_\nu) = \cos(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) + i\sin(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n).$$

Ersetzt man in dieser Beziehung sämtliche ξ_ν durch ξ, so folgt:

(17) $(\cos\xi + i\sin\xi)^n = \cos n\xi + i\sin n\xi$ *(„Moivresche" Formel)*,

und hieraus, wenn man $2n$ statt n schreibt und sodann $\xi = \frac{k\pi}{n}$ setzt:

$$\left(\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}\right)^{2n} = \cos 2k\pi + i\cdot\sin 2k\pi,$$

also, wenn k eine beliebige *ganze* Zahl (einschließlich Null) bedeutet:

$$\left(\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}\right)^{2n} = 1, \tag{18}$$

d. h. der Ausdruck: $\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}$ stellt für $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ jedesmal eine $(2n)^{\text{te}}$ Einheitswurzel vor. Man erhält aber wiederum $2n$ *verschiedene*, $(2n)^{\text{te}}$ Einheitswurzeln, wenn man setzt $k = 0, 1, \ldots, (2n-1)$. Denn wäre etwa:

$$\cos\frac{k_2\pi}{n} + i\sin\frac{k_2\pi}{n} = \cos\frac{k_1\pi}{n} + i\sin\frac{k_1\pi}{n},$$

falls $k_1 < k_2$ und k_1, k_2 beide dem Intervall $[0, 2n-1]$ angehören, also:

$$0 \leqq k_1 < k_2 \leqq 2n - 1,$$

so hätte man zunächst:

$$\cos\frac{k_2\pi}{n} - \cos\frac{k_1\pi}{n} = 0,$$

$$\sin\frac{k_2\pi}{n} - \sin\frac{k_1\pi}{n} = 0.$$

Nun folgt aus den Gl. (11) durch die Substitution $\xi + \eta = \alpha$, $\xi - \eta = \beta$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = \quad 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\ \sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

so daß die vorstehenden Gleichungen durch die folgenden ersetzt werden können:

$$\sin\frac{(k_2+k_1)\pi}{2n}\cdot\sin\frac{(k_2-k_1)\pi}{2n} = 0$$

$$\cos\frac{(k_2+k_1)\pi}{2n}\cdot\sin\frac{(k_2-k_1)\pi}{2n} = 0.$$

Da aber *nicht gleichzeitig* die Beziehungen:

$$\cos\frac{(k_2+k_1)\pi}{2n} = 0, \qquad \sin\frac{(k_2+k_1)\pi}{2n} = 0$$

bestehen können (s. Schema (10)), so müßte sein:

$$\sin\frac{(k_2-k_1)\pi}{2n} = 0,$$

was *unmöglich* ist, da $\frac{k_2-k_1}{2n}$ ein *positiver echter Bruch* ist und anderer-

seits, wie das Schema (10) zeigt, $\sin \xi$ für $0 < \xi < \pi$ *nicht verschwindet*. Der Ausdruck $\cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n}$ stellt also für $k = 0, 1, \ldots (2n-1)$ wirklich $2n$ *verschiedene* und somit *alle möglichen* $(2n)^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln dar. Daraus folgt weiter, daß die für $k = 1$ resultierende Wurzel:

$$\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}$$

als diejenige mit größtmöglichem *positiven reellen* und mit *positiv imaginärem* Teil keine andere sein kann, als die $(2n)^{\text{te}}$ *Grund*einheitswurzel. Infolgedessen findet man:

$$\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n} = e^{\frac{\pi i}{n}} \quad \text{(für jedes ganzzahlige } n > 0) \tag{19}$$

und sodann, wenn m irgendeine natürliche Zahl bedeutet, durch Erhebung in die m-te Potenz mit Benutzung von Gl. (17):

$$\cos \frac{m\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{m\pi}{n} = e^{\frac{m\pi i}{n}} = C\left(\frac{m\pi}{n}\right) + i S\left(\frac{m\pi}{n}\right)$$

also, wenn man noch $\frac{m}{n} = \varrho$ setzt:

$$\cos \pi\varrho = C(\pi\varrho), \qquad \sin(\pi\varrho) = S(\pi\varrho) \tag{20}$$

für jedes *positive rationale* ϱ; des weiteren aber, wegen: $\cos(-\xi) = \cos\xi$, $C(-\xi) = C(\xi)$ und: $\sin(-\xi) = -\sin\xi$, $S(-\xi) = -S(\xi)$, auch für jedes *negative rationale* ϱ und schließlich infolge der *Stetigkeit* aller beteiligten Funktionen für jedes *beliebige reelle* ϱ. Schreibt man noch ξ statt $\pi\varrho$, so gelten also die Beziehungen:

$$\cos\xi = C(\xi), \qquad \sin\xi = S(\xi) \tag{22}$$

für jedes *reelle* ξ. Wir führen deshalb auch für *komplexe* x an Stelle der bisher gebrauchten Zeichen $C(x)$, $S(x)$ die Bezeichnungen $\cos x$, $\sin x$ ein. Wir *definieren* also die beiden Funktionen $\cos x$, $\sin x$ als ganze transzendente Funktionen der *komplexen* Veränderlichen x durch die Gleichungen:

$$\cos x = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} (-1)^{\nu} \cdot \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}, \qquad \sin x = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \tag{22}$$

und *bezeichnen* sie auch in diesem erweiterten Sinne als *trigonometrische Funktionen*, da sie für *reelle* x mit den in der üblichen Weise auf *geometrischem* Wege definierten Funktionen dieses Namens zusammenfallen. Man pflegt auch sie mit der Exponentialfunktion e^x unter der Bezeichnung *elementare* ganze transzendente Funktionen zusammenzufassen.

6. Aus der in der vorigen Nummer gewonnenen Erkenntnis, daß die bisher mit $C(\xi)$, $S(\xi)$ bezeichneten Funktionen für reelle ξ mit den *trigono-*

metrischen Funktionen $\cos\xi$, $\sin\xi$ identisch sind, folgt, daß die nach dem Satze von § 61, Nr. 2, Gl. (7) (S. 457) für jede komplexe Zahl $\alpha+\beta i$ existierende *Hauptdarstellung* (sc. in Exponentialform), nämlich:

$$\alpha+\beta i = re^{\eta i} \quad (\text{wo}: r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\ -\pi<\eta\leqq\pi)$$

sich auch in die *trigonometrische* Form:

$$(23) \qquad \alpha+\beta i = r(\cos\eta + i\sin\eta) \qquad (-\pi<\eta\leqq\pi)$$

setzen läßt.[1])

Neben dieser Hauptdarstellung existieren dann noch unendlich viele andere von ähnlicher Form:

$$(23\text{a}) \quad \alpha+\beta i = r(\cos(\eta+2n\pi)+i\cdot\sin(\eta+2n\pi)) \quad (n=\pm1, \pm2, \ldots),$$

deren Argumente sich zunächst nach beiden Seiten *stetig* an dasjenige der Hauptdarstellung und sodann *stetig* aneinander schließen. Daraus (wie übrigens schon aus den zugrunde liegenden Betrachtungen von § 61. Nr. 1) ist zu entnehmen, daß man den *Anfangspunkt* des für die „Hauptdarstellung" dienlichen Intervalls auch beliebig verschieben, also irgendein beliebiges von der Form $[\eta_0, \eta_0+2\pi]$ dafür wählen kann, z. B. statt des von uns angenommenen, für die Zwecke der *Funktionentheorie* besonders zweckmäßigen, das Intervall $[0, 2\pi]$, was dann (bei Einschluß *beider* Grenzen) mehr den Gepflogenheiten der *Trigonometrie* und *analytischen Geometrie* entsprechen würde. Man findet dann aus Gl. (23) (mit veränderter Grenzbedingung für η) durch Trennung des Reellen und Imaginären:

$$(24) \qquad \alpha = r\cos\eta, \quad \beta = r\sin\eta \qquad (0\leqq\eta\leqq 2\pi),$$

und zwar ist dann r in *geometrischer* Deutung die Länge des vom Nullpunkte nach dem Punkte (α, β) gezogenen „Vektors", η der *Winkel*, genauer gesagt die *Maßzahl*[2]) des *Winkels*, welchen dieser mit der positiven Abszissenrichtung bildet („*Polarwinkel*"). Die Gleichungen (24) liefern in diesem Zusammenhang die Darstellung der *rechtwinkligen* Koordinaten des Punktes (α, β) durch seine *Polar*-Koordinaten r, η. Während aber in der Geometrie (übrigens auch in den meisten Lehrbüchern der Analysis bzw. Funktionentheorie) die Existenz des Vektors r und des

1) Hier bzw. a. a. O. in § 61 wird nur die *Existenz* einer solchen Darstellung festgestellt. Der Weg zu ihrer wirklichen Herstellung, d. h. schließlich zur rechnerischen Bestimmung von η als Funktion von α, β kann erst an späterer Stelle gezeigt werden (s. § 71, Nr. 5).

2) In der *Funktionentheorie* häufig als *Argument* oder *zweckmäßiger* als *Amplitude* (auch *Anomalie* oder *Abweichung*) bezeichnet (da die Bezeichnung *Argument* zumeist in allgemeinerem Sinne [= unabhängige Veränderliche einer Funktion] gebraucht wird).

Winkels η der *Anschauung* entnommen wird, die trigonometrischen Funktionen des letzteren als Streckenverhältnisse (mit bestimmtem Vorzeichen) definiert und die Gleichungen (24) durch die Konstanz der Verhältnisse homologer Seiten bei ähnlichen Dreiecken begründet werden, wurde hier zu beliebig gegebenem Zahlenpaar (α, β) in *arithmetischer* Weise die *Existenz* der Zahlen r und η festgestellt, für welche die Gleichungen (24) bestehen, sofern unter $\cos\eta$, $\sin\eta$ die Summen der beiden Reihen:

$$\sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}, \qquad \sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+2}}{(2\nu+1)!}$$

verstanden werden.

§ 63. Die Irrationalität und die Transzendenz von e und π.

1. Bei der außerordentlichen Bedeutung, welche die Zahlen e und π nicht nur in dem zunächst hier vorliegenden Zusammenhange, sondern innerhalb der gesamten Analysis besitzen, muß es wünschenswert erscheinen, Genaueres über ihren Charakter auszusagen. In I_1, § 33, Nr. 4 (S. 205) wurde bereits festgestellt, daß die Zahl e *irrational* ist. Der Beweis knüpfte ganz unmittelbar an die Reihenentwicklung von e an, die auf Grund einer sehr einfachen Restabschätzung zeigt, daß:

$$e = \sum_0^n{}_\nu \frac{1}{\nu!} + \Delta_n, \quad \text{wo: } \frac{1}{(n+1)!} < \Delta_n < \frac{1}{n!\,n}.$$

Die *Irrationalität* von π läßt sich gleichfalls in sehr elementarer, wenn auch etwas umständlicherer Weise folgendermaßen beweisen.[1])

Aus der Beziehung (s. § 59, Gl. (23), S. 374):

$$(1) \qquad \frac{1}{x}\sin x = \sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(2\nu+1)!}$$

folgt durch Derivation und Multiplikation mit $\frac{1}{x}$:

$$-\frac{1}{x^3}\sin x + \frac{1}{x^2}\cos x = \sum_1^\infty{}_\nu (-1)^\nu \cdot \frac{1}{2\nu+1} \cdot \frac{x^{2\nu-2}}{(2\nu-1)!}$$

$$= -\sum_0^\infty{}_\nu \frac{(-1)^\nu}{2\nu+3} \cdot \frac{x^{2\nu}}{(2\nu+1)!}.$$

1) Von einer dritten für die Analysis wichtigen, wenn auch an universeller Bedeutung den beiden im Text bei weitem nicht gleichkommenden Konstanten, der *Euler*schen Konstanten γ (s. I_1, § 34, Nr. 2, S. 207) hat man bisher noch nicht feststellen können, ob sie *irrational* sei, obschon wohl schwerlich daran zu zweifeln sein dürfte.

Bildet man wiederum die Derivierte und multipliziert mit $\frac{1}{x}$, so folgt weiter:

$$\left(\frac{3}{x^5}-\frac{1}{x^3}\right)\sin x-\frac{3}{x^4}\cos x=-\sum_1^\infty{}_\nu \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)(2\nu+3)}\cdot\frac{x^{2\nu-2}}{(2\nu-1)!}$$

$$=(-1)^2\cdot\sum_0^\infty{}_\nu \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+3)(2\nu+5)}\cdot\frac{x^{2\nu}}{(2\nu+1)!}$$

Bei nochmaliger (also dritter) Anwendung derselben Operation ergibt sich:

$$\left(-\frac{15}{x^7}+\frac{6}{x^5}\right)\sin x+\left(\frac{15}{x^6}-\frac{1}{x^4}\right)\cos x$$

$$=(-1)^3\cdot\sum_0^\infty{}_\nu \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+3)(2\nu+5)(2\nu+7)}\cdot\frac{x^{2\nu}}{(2\nu+1)!}$$

und analog bei *n-maliger* Anwendung (wie sich durch vollständige Induktion leicht bestätigen läßt):

$$(2)\qquad \left(\frac{\alpha_0}{x^{2n+1}}+\frac{\alpha_1}{x^{2n-1}}+\cdots\right)\sin x+\left(\frac{\beta_0}{x^{2n}}+\frac{\beta_1}{x^{2n-2}}+\cdots\right)\cos x=X_n\text{ [1]},$$

wo:

$$(3)\qquad\begin{cases} X_n=(-1)^n\cdot\sum_0^\infty{}_\nu \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+3)(2\nu+5)\ldots(2\nu+2n+1)}\cdot\frac{x^{2\nu}}{(2\nu+1)'} \\ \quad=(-1)^n\cdot\sum_0^\infty{}_\nu \frac{(-1)^\nu}{1\cdot 3\,.\,(2\nu+2n+1)}\cdot\frac{x^{2\nu}}{2\cdot 4\ldots(2\nu)} \\ \quad=(-1)^n\cdot\frac{1}{1\cdot 3\,.\,(2n+1)}\sum_0^\infty{}_\nu(-1)^\nu\cdot\frac{1\cdot 3\,..\,(2n+1)}{1\cdot 3\,..\,(2\nu+2n+1)}\cdot\frac{x^{2\nu}}{2^\nu\cdot\nu!} \\ \quad=(-1)^n\cdot\frac{1}{1\cdot 3\,..\,(2n+1)}\cdot S_n(x). \end{cases}$$

---

1) Für die weiteren Schlüsse genügt die Formel (2) in der vorliegenden Fassung. Eine genauere Ausführung der Rechnung zeigt, daß

$$\alpha_0=\beta_0=(-1)^n\ 1\cdot 3\ldots(2n-1)$$

und daß die Schlußglieder der Klammerausdrücke die Form haben:

$$\frac{\alpha_k}{x^{2n+1-2k}}\qquad\text{bzw.}\qquad\frac{\beta_l}{x^{2n-2l}}$$

wo:

$$k=l+1=\frac{n}{2},\qquad \alpha_k=(-1)^{\frac{n}{2}},\ \text{wenn } n \text{ gerade},$$

$$k=l=\frac{n-1}{2},\qquad \beta_l=(-1)^{\frac{n-1}{2}},\ \text{wenn } n \text{ ungerade}.$$

Dabei sind $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \beta_0, \beta_1, \ldots$ *ganze* Zahlen, und zwar α_0, β_0 ausdrücklich *von Null verschieden*. Setzt man jetzt zur Abkürzung:

(4) $$\frac{\pi}{2} = \varrho$$

und sodann

(5) $$x = \varrho, \qquad \text{also: } \sin x = 1, \qquad \cos x = 0,$$

so nimmt die Formel (2) die folgende Gestalt an:

(6) $$\frac{\alpha_0}{\varrho^{2n+1}} + \frac{\alpha_1}{\varrho^{2n-1}} + \cdots = \frac{(-1)^n}{1 \cdot 3 \ldots (2n+1)} \cdot S_n(\varrho),$$

wo:

(7) $$\begin{cases} S_n(\varrho) = 1 - \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{\varrho^2}{2} + \frac{1}{(2n+3)(2n+5)} \cdot \frac{\varrho^4}{2^2 \cdot 2!} \\ \qquad\qquad - \frac{1}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} \cdot \frac{\varrho^6}{2^3 \cdot 3!} + \cdots \\ \qquad = \left(1 - \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{\varrho^2}{2}\right) + \frac{1}{(2n+3)(2n+5)} \cdot \frac{\varrho^4}{2^2 \cdot 2!}\left(1 - \frac{1}{2n+7} \cdot \frac{\varrho^2}{2 \cdot 3}\right) + \cdots \end{cases}$$

Die erste Klammergröße und um so mehr jede folgende ist, wegen $\varrho < 2$, für jedes $n \geqq 0$ *positiv*. Man findet daher:

$$S_n(\varrho) > 1 - \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{\varrho^2}{2},$$

und wenn man rechts n durch 0 und ϱ durch 2 ersetzt, *a fortiori*:

(8a) $$S_n(\varrho) > \left(1 - \frac{4}{3 \cdot 2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Andererseits ergibt sich, da die Glieder der alternierenden Reihe $S_n(\varrho)$ beständig abnehmen:

(8b) $$S_n(\varrho) < 1,$$

und man gewinnt somit aus Gl (6) die doppelte Ungleichung:

(9) $$\left|\frac{\alpha_0}{\varrho^{2n+1}} + \frac{\alpha_1}{\varrho^{2n-1}} + \cdots\right| \begin{cases} > \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \\ < \frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}. \end{cases}$$

Angenommen nun $\varrho \equiv \frac{\pi}{2}$ wäre *rational*, etwa: $\varrho = \frac{q}{r}$, wo q, r natürliche Zahlen, so hätte man:

(10) $$\left|\frac{\alpha_0}{\varrho^{2n+1}} + \frac{\alpha_1}{\varrho^{2n-1}} + \cdots\right| = \left|\frac{\alpha_0 r^{2n+1}}{q^{2n+1}} + \frac{\alpha_1 r^{2n-1}}{q^{2n-1}} + \cdots\right| = \frac{\gamma_n}{q^{2n+1}},$$

wo γ_n eine *ganze* Zahl, die auf Grund von (9) der doppelten Ungleichung genügen müßte:

(11) $$\gamma_n \begin{cases} > \frac{1}{3} \frac{q^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \\ < \frac{q^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}, \end{cases}$$

deren erste zunächst zeigt, daß γ_n sicher *von Null verschieden*. Da überdies:

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} = \frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{(2n+1)!} = \frac{2^n}{(n+1)(n+2)\cdot\;(2n+1)} < \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}},$$

so würde aus (11) folgen (wenn man in der zweiten Ungleichung noch q^{2n+1} durch q^{2n+2} ersetzt):

$$0 < \gamma_n < \left(\frac{2q^2}{n+1}\right)^{n+1}, \tag{12}$$

was unmöglich ist, sobald $n+1 \geqq 2q^2$ angenommen wird.

Somit ist π irrational.

2. Die vorstehenden auf die *Irrationalität* von e und π bezüglichen Ergebnisse sind wesentlich verschärft und somit überholt worden durch die neuere Erkenntnis von der *Transzendenz*[1]) dieser Zahlen, also von dem besonderen *Charakter* ihrer *Irrationalität*. Nichtsdestoweniger hielt ich es für zweckmäßig, den jetzt mitzuteilenden *Transzendenz*beweisen jene Beweise für die bloße *Irrationalität* voranzuschicken, da sie, in der Fassung ihres Themas begrifflich einfacher und dementsprechend wesentlich geringeren Aufwand an Beweismitteln erfordernd, noch immer ein mehr als historisches Interesse beanspruchen dürfen.

Die gemeinsame Grundlage für die beiden fraglichen Transzendenzbeweise bildet eine besondere, eine willkürliche ganze Funktion enthaltende Zerlegungs- und Abschätzungsformel für e^x, die wir jetzt herleiten wollen.

Man hat:

$$\begin{aligned}\sum_0^{\nu-1}{}_{\varkappa}\frac{1}{\varkappa!}x^{\varkappa} &= \frac{1}{\nu!}\left(\nu! + \frac{\nu!}{1!}x + \cdots + \frac{\nu!}{(\nu-2)!}x^{\nu-2} + \frac{\nu!}{(\nu-1)!}x^{\nu-1}\right)\\ &= \frac{1}{\nu!}\left(D^{\nu}x^{\nu} + D^{\nu-1}x^{\nu} + \cdots + D^2x^{\nu} + D^1x^{\nu}\right)\\ &= \frac{1}{\nu!}\cdot\sum_1^{\nu}{}_{\mu} D^{\mu}x^{\nu}\\ &= \frac{1}{\nu!}\sum_1^{r}{}_{\mu} D^{\mu}x^{\nu} \quad \text{für } r \geqq \nu \text{ (wegen: } D^r x^{\nu} = 0 \text{ für } r > \nu)\end{aligned}$$

und daher:

$$e^x = \frac{1}{\nu!}\sum_1^{r}{}_{\mu} D^{\mu}x^{\nu} + \frac{1}{\nu!}R_{\nu}(x) \qquad (\nu \leqq r), \tag{13}$$

---

1) Vgl. I_1, § 25, Nr. 8 (S. 160); I_2, § 105, Nr. 2 (S. 801). — Der Beweis für die Transzendenz von e wurde zuerst von *Hermite* (1873), derjenige für die Transzendenz von π zuerst von *Lindemann* (1882) erbracht.

wo:

$$(14)\qquad R_\nu(x) = x^\nu\left(1 + \frac{1}{\nu+1}\,x + \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}\,x^2 + \cdots\right),$$

folglich:

$$(15)\qquad |R_\nu(x)| < |x|^\nu\left(1 + \frac{1}{1}\cdot|x| + \frac{1}{1\cdot 2}|x|^2 + \cdots\right) = |x|^\nu\, e^{|x|}.$$

Es sei jetzt $g(x)$ eine ganz beliebige, für $x = 0$ verschwindende ganze rationale Funktion etwa vom Grade r, also:

$$(16)\qquad g(x) = \sum_1^r {}_\nu \frac{g^{(\nu)}(0)}{\nu!}\cdot x^\nu,$$

so ergibt sich durch Multiplikation von Gl. (13) mit $g^{(\nu)}(0)$ und Summation über $\nu = 1, 2, \ldots, r$:

$$\left(\sum_1^r {}_\nu\, g^{(\nu)}(0)\right)\cdot e^x = \sum_1^r {}_\nu \frac{g^{(\nu)}(0)}{\nu!}\sum_1^r {}_\mu D^\mu x^\nu + \sum_1^r {}_\nu \frac{1}{\nu!}\, g^{(\nu)}(0)\cdot R_\nu(x)$$

$$= \sum_1^r {}_\mu D^\mu \sum_1^r {}_\nu \frac{g^{(\nu)}(0)}{\nu!}\cdot x^\nu + \sum_1^r {}_\nu \frac{1}{\nu!}\, g^{(\nu)}(0)\cdot R_\nu(x)$$

oder, mit Berücksichtigung von Gl. (16), wenn man überdies der Symmetrie zuliebe den Index ν in der ersten und letzten Summe durch μ ersetzt:

$$(17)\qquad \left(\sum_1^r {}_\mu\, g^{(\mu)}(0)\right)\cdot e^x = \sum_1^r {}_\mu\, g^{(\mu)}(x) + \sum_1^r {}_\mu \frac{1}{\mu!}\, g^{(\mu)}(0)\cdot R_\mu(x),$$

kürzer geschrieben:

$$(18)\qquad G(0)\cdot e^x = G(x) + R(x),$$

wo:

$$(19)\qquad G(x) = \sum_1^r {}_\mu\, g^{(\mu)}(x),\quad R(x) = \sum_1^r {}_\mu \frac{1}{\mu!}\, g^{(\mu)}(0)\cdot R_\mu(x).$$

Zu der, wie bereits oben angedeutet, für die weiteren Entwickelungen fundamentalen Zerlegungsformel (18) kommt dann noch die mit Benutzung von Ungl. (15) sich ergebende Abschätzungsformel:

$$(20)\qquad |R(x)| < e^{|x|}\sum_1^r {}_\mu \frac{1}{\mu!}\,|g^{(\mu)}(0)|\cdot|x|^\mu = e^{|x|}\cdot g[|x|],$$

wenn man mit $g[x]$ diejenige ganze Funktion bezeichnet, die aus $g(x)$ durch Verwandlung aller Koeffizienten in ihre Absolutwerte entsteht, so daß also:

$$(21)\qquad g[x] = \sum_1^r {}_\mu \frac{1}{\mu!}\,|g^{(\mu)}(0)|\cdot x^\mu.$$

3. Wäre die Zahl e *nicht* transzendent, so müßte sie einer algebraischen Gleichung mit *reellen ganzzahligen Koeffizienten*, etwa n^{ten} Grades. genügen, so daß also:

$$\sum_0^n {}^{\nu} \alpha_\nu e^\nu = 0, \tag{22}$$

mit dem Zusatze, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit das konstante Glied α_0 als *von Null verschieden* annehmen dürfen (andernfalls ließe sich ja die entsprechende Eigenschaft durch Weglassung des Faktors x^k, wo $k \geqq 1$, d. h. durch Ausscheidung der k-fachen Wurzel 0 aus der ursprünglichen Gleichung $\sum_k^{n+k} {}^{\nu} \beta_\nu x^\nu = 0$ stets erzielen). Durch Multiplikation mit der Konstanten $G(0)$ und mit Benutzung der Zerlegungsformel (18) nimmt diese Gleichung die Form an:

$$\sum_0^n {}^{\nu} \alpha_\nu G(\nu) + \sum_0^n {}^{\nu} \alpha_\nu R(\nu) = 0. \tag{23}$$

Wir werden die *Unmöglichkeit* dieser Gleichung nachweisen, indem wir zeigen, daß bei passender Wahl der darin implizite enthaltenen willkürlichen Funktion $g(x)$ ihre linke Seite *von Null verschieden* ausfällt. Hierzu setzen wir:

$$g(x) = \frac{1}{(p-1)!} \cdot x^{p-1} \prod_1^n {}^{\nu} (x-\nu)^p \quad (\text{also: } r = (n+1)p - 1), \tag{24}$$

wo p eine *in α_0 nicht aufgehende* Primzahl bedeutet, die wir von vornherein *größer als n* annehmen wollen, über deren Größenordnung wir im übrigen noch später verfügen werden. Es wird sich ergeben, daß bei dieser Wahl von $g(x)$ der *erste* Teil der linken Seite von Gl. (23) *eine von Null verschiedene ganze Zahl* ist, der *zweite* bei hinlänglicher Vergrößerung von p numerisch *beliebig klein* wird, die *Summe* dieser beiden Bestandteile also *nicht verschwinden* kann.

Wir zeigen zunächst, daß $G(0)$ *relativ prim zu p*, daß dagegen alle anderen $G(\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *durch p teilbar* sind. Aus der Doppelgleichung:

$$\begin{aligned}(p-1)!\, g(x) &= x^{p-1} \cdot \prod_1^n {}^{\nu} (x-\nu)^p \\ &= \sum_1^r {}^{\mu} \frac{(p-1)!}{\mu!} \cdot g^{(\mu)}(0) \cdot x^\mu\end{aligned} \tag{25}$$

folgt durch Koeffizientenvergleichung der beiden rechten Seiten, daß die

Ausdrücke $\frac{(p-1)!}{\mu!} g^{(\mu)}(0)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, r)$ jedenfalls *ganze* Zahlen sein müssen, und zwar ergibt sich im besonderen:

$$(26) \begin{cases} \text{Für } \mu = 1, 2, \ldots, (p-2)\colon g^{(\mu)}(0) = 0 \\ \;\;\text{„} \;\; \mu = p - 1\colon \quad g^{(p-1)}(0) = (-1)^{np} \cdot (n!)^p, \text{ also durch } p \text{ \textit{nicht teilbar}} \\ \;\;\text{„} \;\; \mu \geqq p\colon \quad \frac{1}{p(p+1)\cdots\mu} \cdot g^{\mu}(0) \text{ \textit{ganzzahlig}, also } g^{(\mu)}(0) \text{ durch } p \text{ \textit{teilbar}.} \end{cases}$$

Daraus folgt zunächst, daß $G(0) \equiv \sum_1^r {}^{\mu} g^{(\mu)}(0)$ als Summe von ganzen Zahlen, die mit *Ausnahme* einer *einzigen* durch p *teilbar* (bzw. $= 0$) sind, durch p *nicht teilbar* ist, und das gleiche gilt dann auch für $\alpha_0 G(0)$ (da laut Annahme α_0 durch p nicht teilbar ist)

Um eine entsprechende Aussage bezüglich der übrigen $G(\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ machen zu können, ist es notwendig, die Entwicklung von $(p-1)!\, g(x)$ nach Potenzen von $(x - \nu)$ so weit durchzuführen, daß die Vergleichung der Entwicklungskoeffizienten mit denjenigen der entsprechenden *Taylor*schen Formel:

$$(27) \qquad (p-1)!\, g(x) = \sum_1^r {}^{\mu} \frac{(p-1)!}{\mu!} g^{(\mu)}(\nu) \cdot (x - \nu)^{\mu}$$

in dem erforderlichen Umfange möglich wird. Man hat nun für jedes einzelne $\nu = 1, 2, \ldots, n$:

$$(28) \qquad (p-1)!\, g(x) = (x-\nu)^p \cdot x^{p-1} \cdot \prod_1^n {}_{\varkappa}{}' (x - \varkappa)^p,$$

dabei soll der Akzent an dem Produktzeichen andeuten, daß der Faktor $(x - \nu)^p$ auszuschließen ist. Entwickelt man mit Benutzung der Identitäten: $x^{p-1} = (\nu + (x - \nu))^{p-1}$ und: $(x - \varkappa)^p = (\nu - \varkappa + (x - \nu))^p$ nach steigenden Potenzen von $(x - \nu)$, so ist unmittelbar ersichtlich, daß die Entwicklung mit der Potenz $(x - \nu)^p$ *beginnt*[1]) und daß alle Koeffizienten (reelle) *ganze* Zahlen sind — eine Erkenntnis, die für die weiteren Schlüsse vollständig ausreicht. Daraus folgt nämlich durch Vergleichung mit der Formel (27) für $\nu = 1, 2, \ldots, n$:

$$(29) \begin{cases} \text{Für } \mu = 1, 2, \ldots, (p-1)\colon g^{(\mu)}(\nu) = 0 \\ \;\;\text{„} \;\; \mu \geqq p\colon \quad \frac{1}{p(p+1)\cdots\mu} g^{(\mu)}(\nu) \text{ \textit{ganzzahlig}, also } g^{(\mu)}(\nu) \text{ durch } p \text{ \textit{teilbar}.} \end{cases}$$

1) Gerade hierin liegt der Grund, daß auch noch $g^{(p-1)}(\nu) = 0$, während bei der zuvor angestellten analogen Betrachtung der entsprechende Koeffizient $g^{(p-1)}(0)$ als *von Null verschieden* und *durch p nicht teilbar* sich ergab.

Somit ist auch $G(\nu) \equiv \sum_1^r{}^{\mu}\, g^{(\mu)}(\nu)$ *durch p teilbar* und schließlich $\sum_0^n{}^{\nu}\, \alpha_\nu G(\nu)$ als Summe ganzer Zahlen, die *mit Ausnahme einer einzigen* durch p *teilbar* sind, eine *durch p nicht teilbare ganze Zahl*, also numerisch $\geqq 1$.

Um ferner den zweiten Teil der linken Seite von Gl. (23) abzuschätzen, hat man zunächst mit Benutzung der Abschätzungsformel (20):

$$\left|\sum_0^n{}^{\nu}\, \alpha_\nu R(\nu)\right| \leqq \sum_0^n{}^{\nu}\, |\alpha_\nu| \cdot |R(\nu)| < \sum_0^n{}^{\nu}\, |\alpha_\nu|\, e^\nu g[\nu]$$

und, da e^ν und $g[\nu]$ mit ν monoton zunehmen, *a fortiori*:

$$(30)\qquad \left|\sum_0^n{}^{\nu}\, \alpha_\nu R(\nu)\right| < e^n \cdot \sum_0^n{}^{\nu}\, |\alpha_\nu| \cdot g[n].$$

Man findet sodann auf Grund von Gl. (24), daß:

$$g[|x|] \leqq \frac{1}{(p-1)!}\, |x|^{p-1} \cdot \prod_1^n{}^{\nu}\, (|x| + \nu)^p,^{1)}$$

also:

$$(31)\qquad g[n] < \frac{1}{(p-1)!}\, ((2n)!)^p = (2n)!\, \frac{((2n)!)^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Da $\frac{((2n)!)^{p-1}}{(p-1)!}$ das p^{te} Glied der konvergenten Reihe

$$e^{(2n)!} \equiv \sum_1^\infty \frac{((2n)!)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

---

1) Genau genommen gilt hier das *Gleichheits*zeichen (was aber für den erforderlichen Schluß ohne Belang ist), da die Ausführung der Multiplikation bei einem Produkt von der Form:

$$P(x) = \prod_1^n{}^{\nu}\, (x - x_\nu)$$

als Koeffizienten der einzelnen Potenzen von x die *Kombinationssummen* der x_ν mit *alternierenden* Vorzeichen liefert und daher bei *positiven* x_ν ohne weiteres die Beziehung resultiert:

$$P[|x|] = \prod_1^n{}^{\nu}\, (|x| + x_\nu)$$

(wo $P[x]$ diejenige Funktion bedeutet, die aus $P(x)$ durch Verwandlung aller Koeffizienten in ihre Absolutwerte hervorgeht).

ist, so kann $g[n]$, also, wie Ungl. (30) zeigt, auch $\left|\sum_0^n \alpha_\nu R(\nu)\right|$ durch hinlängliche Vergrößerung von p *beliebig klein* gemacht werden.

Damit ist aber die *Unmöglichkeit* der Gl. (23) bzw. (22), also *die Transzendenz von e vollständig bewiesen.*

4. Die für den Transzendenzbeweis von e geschaffenen Hilfsmittel lassen sich im Anschluß an die Beziehung: $e^{\pm \pi i} = -1$ auch für den Transzendenzbeweis von π nutzbar machen. Um die eben erwähnte zwischen e und π bestehende Beziehung für den vorliegenden Zweck verwerten zu können, bemerke man zunächst, daß *gleichzeitig* mit irgend einer (beliebig komplexen) Zahl a auch die Zahlen $\pm ai$ *algebraisch* sein müssen — *vice versa.* Denn ist etwa bei reellen ganzzahligen γ_ν:

$$\sum_0^\varkappa \gamma_\nu a^\nu = 0,$$

so folgt auf Grund der Identitäten:

$$\sum_0^\varkappa \gamma_\nu a^\nu \equiv \sum_0^\varkappa \gamma_\nu i^{-\nu}(ai)^\nu \equiv \sum_0^\varkappa \gamma_\nu i^\nu(-ai)^\nu,$$

daß die Gleichung:

$$\left(\sum_0^\varkappa \gamma_\nu i^{-\nu} \cdot y^\nu\right) \cdot \left(\sum_0^\varkappa \gamma_\nu i^\nu \cdot y^\nu\right) = 0$$

die beiden Wurzeln $y = ai$ und $y = -ai$ hat. Da aber die entsprechenden Koeffizienten der beiden Faktoren, welche die linke Seite dieser Gleichung bilden, *konjugiert* sind, so liefert die Ausführung der Multiplikation ein Polynom $2k^{\text{ten}}$ Grades mit lauter *reellen*, überdies *ganzzahligen* Koeffizienten, so daß also ai und $-ai$ *algebraische* Zahlen sind. Auf Grund dieses Ergebnisses folgt aber auch umgekehrt aus dem *algebraischen* Charakter von ai oder $-ai$ derjenige von $\pm(\pm ai)\cdot i$, also von $\pm a$.

Um die Transzendenz von π nachzuweisen, genügt also die Feststellung, daß πi keiner Gleichung von der Form:

$$f(y) \equiv \sum_0^m \beta_\nu y^\nu = 0 \qquad (\beta_m \neq 0) \tag{32}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten genügen kann.

Angenommen, dies wäre der Fall, so hätte diese Gleichung auch *eo ipso* die Wurzel $-\pi i$, da ja das Resultat der Substitution von $y = -\pi i$ zu dem für $y = \pi i$ sich ergebenden *konjugiert*, also gleichfalls $= 0$ sein müßte. Bezeichnet man die Gesamtheit der Wurzeln von Gl. (32) mit:

$$y_1, y_2, \ldots, y_m$$

so hätte man, da unter diesen Zahlen auch πi und $-\pi i$ vorkommen müßten, wegen: $1 + e^{\pm \pi i} = 0$, auch:

$$(33) \qquad \prod_{1}^{m} {}_{\varkappa} (1 + e^{y_\nu}) \equiv 0$$

und daher, durch Ausführung der angedeuteten Multiplikation:

$$(34) \quad 1 + \sum e^{y_\varkappa} + \sum_{\varkappa\lambda} e^{y_\varkappa + y_\lambda} + \sum_{\varkappa\lambda\mu} e^{y_\varkappa + y_\lambda + y_\mu} + \cdots + e^{y_1 + y_2 + \cdots + y_m} \equiv 0,$$

wo diese Summen sich zu erstrecken haben über alle Kombinationen (ohne Wiederholung) zur $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, 3^{\text{ten}}, \ldots, m^{\text{ten}}$ Klasse von $y_1, y_2, \ldots, y_m$, also ausführlicher geschrieben:

$$(35) \quad \begin{cases} \sum_{\varkappa} e^{y_\varkappa} = \sum_{1}^{m} {}_{\varkappa}\, e^{y_\varkappa} \\ \sum_{\varkappa\lambda} e^{y_\varkappa + y_\lambda} = \sum_{2}^{m} {}_{\lambda} \sum_{1}^{m-1} {}_{\varkappa}\, e^{y_\varkappa + y_\lambda} & (\varkappa < \lambda) \\ \sum_{\varkappa\lambda\mu} e^{y_\varkappa + y_\lambda + y_\mu} = \sum_{3}^{m} {}_{\mu} \sum_{2}^{m-1} {}_{\lambda} \sum_{1}^{m-2} {}_{\varkappa}\, e^{y_\nu + y_\lambda + y_\mu} & (\varkappa < \lambda < \mu) \quad \text{usf.} \end{cases}$$

Wir wollen nun diejenige Gleichung bilden, welche außer den einzelnen $y_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, m$) auch alle Summen $y_\varkappa + y_\lambda$, $y_\varkappa + y_\lambda + y_\mu, \ldots$, $y_1 + y_2 + \cdots + y_m$ zu Wurzeln hat. Schreibt man nach Analogie von (35) zur Abkürzung:

$$\prod_{\varkappa} (y - y_\nu), \quad \prod_{\nu\lambda} (y - (y_\nu + y_\lambda)), \quad \prod_{\nu\lambda\mu} (y - (y_\varkappa + y_\lambda + y_\mu)), \quad \ldots$$

statt:

$$\prod_{1}^{m} {}_{\varkappa} (y - y_\varkappa), \ \prod_{2}^{m} {}_{\lambda} \prod_{1}^{m-1} {}_{\varkappa} (y - (y_\nu + y_\lambda)), \ \prod_{3}^{m} {}_{\mu} \prod_{2}^{m-1} {}_{\lambda} \prod_{1}^{m-2} {}_{\varkappa} (y - (y_\varkappa + y_\lambda + y_\mu)), \ldots$$

(wo wieder: $\varkappa < \lambda < \mu \cdots$) und setzt sodann:

$$(36) \quad \begin{cases} \prod_{\varkappa} (y - y_\varkappa) = f_1(y) \quad \left(= \frac{1}{\beta_m} \cdot f(y)\right) \\ \prod_{\varkappa\lambda} (y - (y_\varkappa + y_\lambda)) = f_2(y) \\ \prod_{\varkappa\lambda\mu} (y - (y_\varkappa + y_\lambda + y_\mu)) = f_3(y) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y - (y_1 + y_2 + \cdots + y_m) = f_m(y) \quad \left(= y + \frac{\beta_{m-1}}{\beta_m}\right), \end{cases}$$

so sind nicht nur die Koeffizienten von $f_1(y)$ auf Grund von Gl. (32) *ratio-*

nale Zahlen, sondern das gleiche gilt auch für $f_2(y), f_3(y), \ldots, f_m(y)$, da ja die betreffenden Koeffizienten als ganze symmetrische Funktionen der $y_\varkappa + y_\lambda$, $y_\varkappa + y_\lambda + y_\mu$, ... mit ganzzahligen Koeffizienten schließlich eben solche Funktionen von $y_1, y_2, \ldots y_m$, also rational durch $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ ausdrückbar sind.

Die sämtlichen in Gl. (34) auftretenden *Exponenten* sind also jetzt die sämtlichen Wurzeln der Gleichung:

$$f_1(y) \cdot f_2(y) \ldots f_m(y) = 0 \tag{37}$$

mit *rationalen* Zahlenkoeffizienten, die sich durch Multiplikation mit dem Hauptnenner N auch in *ganzzahlige* verwandeln lassen.

Unter den Wurzeln dieser Gl. (37) kommt auch die *Null* zum mindesten *ein*mal vor, da ja $y_\varkappa + y_\lambda = 0$ für $y_\varkappa = \pi i$, $y_\lambda = -\pi i$. Wir wollen annehmen, sie möge im ganzen γmal vorkommen, wo also $\gamma \geqq 1$. Dann läßt sich aus der linken Seite von Gl. (37) der Faktor y^γ absondern, bzw. durch Multiplikation mit $y^{-\gamma}$ fortschaffen, so daß die auf diese Weise abgeänderte Gleichung nur noch lauter *von Null verschiedene* Wurzeln behält, deren Anzahl (und zwar jede Wurzel nach dem Grade ihrer Multiplizität gezählt) mit n bezeichnet werden möge. Setzt man sodann:

$$F(x) \equiv N \cdot x^{-\gamma} \cdot f_1(x) \cdot f_2(x) \ldots f_m(x) = \sum_0^n{}_\nu\, \alpha_\nu x^\nu, \tag{38}$$

wo $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_n \neq 0$, übrigens ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha_n > 0$ angenommen werden kann, so hat die Gleichung:

$$F(x) = 0 \tag{39}$$

die *von Null verschiedenen* unter den Ausdrücken:

$$y_\varkappa,\ y_\varkappa + y_\lambda,\ y_\varkappa + y_\lambda + y_\mu,\ \ldots,\ y_1 + y_2 + \cdots + y_m$$

zu Wurzeln, die wir jetzt kürzer mit:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

bezeichnen wollen. Infolgedessen nimmt jetzt die Gl. (34) die einfache Form an:

$$1 + \gamma + \sum_1^n{}_\nu\, e^{x_\nu} \equiv 0, \tag{40}$$

und das Ergebnis der vorstehenden Betrachtung läßt sich zunächst in den folgenden, das nunmehrige Endziel unseres Transzendenzbeweises kennzeichnenden Satz zusammenfassen:

Wäre π eine algebraische Zahl, so müßte eine Beziehung von der Form (40) *bestehen, wo γ eine positive ganze Zahl bedeutet*

und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *die (durchweg von Null verschiedenen) Wurzeln der algebraischen Gleichung* (39) *mit ganzzahligen Koeffizienten sind.*

5. Wie die Vergleichung mit Gl. (22) zeigt, hat die zu lösende Aufgabe, die im Beweise der Unmöglichkeit der Beziehung (40) besteht, jetzt dieselbe Form, wie bei dem zuvor behandelten Beweise der Transzendenz von e, und kann auch auf demselben Wege erledigt werden, mit derjenigen gewissermaßen selbstverständlichen Modifikation, die sich aus dem Umstande ergibt, daß an die Stelle der in Gl. (22) auftretenden Exponenten ν jetzt die Zahlen x_ν getreten sind.

Wir multiplizieren also die hypothetische Gl. (40) wieder mit der Konstanten $G(0)$ und setzen sie mit Benutzung der Zerlegungsformel (18) in die Form:

$$(41) \qquad \left\{ (1+\gamma)\cdot G(0) + \sum_1^n{}^{\nu}\, G(x_\nu) \right\} + \sum_1^n{}^{\nu}\, R(x_\nu) \equiv 0 .$$

Die in den Funktionen $G(x)$ und $R(x)$ enthaltene Hilfsfunktion $g(x)$ (s. Gl. (24)) ist jetzt in der Weise abzuändern, daß an die Stelle der Wurzeln $\nu = 1, 2, \ldots, n$ die Wurzeln $x_\nu\,(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ treten, also das Polynom $\prod_1^n{}^{\nu}\,(x-\nu)$ durch $F(x)$ (s. Gl (38), (39)) zu ersetzen ist. Wir definieren daher jetzt $g(x)$ durch die Gleichung:

$$(42) \qquad g(x) = \frac{\alpha_n^{np-1}}{(p-1)!}\, x^{p-1}\cdot (F(x))^p ,$$

wo p eine noch näher zu definierende Primzahl bedeutet [1]).

Wird von vornherein p der Bedingung unterworfen, *nicht* in $1+\gamma$, α_0 und α_n aufzugehen, so läßt sich ganz analog, wie in Nr. 3 erschließen, daß $(1+\gamma)\cdot G(0)$ *relativ prim zu* p, dagegen $\sum_1^n{}^{\nu}\, G(x_\nu)$ *durch* p *teilbar* ist. Nach Gl. (42) und (38) hat man nämlich zunächst:

$$(43) \qquad \begin{aligned} (p-1)!\, g(x) &= \alpha_n^{np-1}\cdot x^{p-1}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n)^p \\ &= \alpha_n^{np-1}\cdot x^{p-1}(\alpha_0^p + p\cdot \alpha_0^{p-1}\alpha_1 x + \cdots + \alpha_n^p x^{np}). \end{aligned}$$

Durch Vergleichung mit der *Mac Laurin*schen Formel:

$$(p-1)!\, g(x) = \sum_0^r{}^{\mu}\, \frac{(p-1)!}{\mu!}\, g^{(\mu)}(0)\cdot x^\mu$$

1) Die Hinzufügung des konstanten Faktors α_n^{np-1} erweist sich als erforderlich, um späterhin die Ganzzahligkeit aller in Betracht kommenden Koeffizienten zu sichern.

(wo: $r \equiv (n+1)p-1$ wieder den Grad von $g(x)$ bezeichnet) ergibt sich daher:

$$(44)\quad \begin{cases} \text{Für } \mu = 1, 2, \ldots, (p-2)\colon\ g^{(\mu)}(0) = 0 \\ \;\;\text{„}\quad \mu = p-1\colon \qquad g^{(p-1)}(0) = \alpha_0^p \alpha_n^{np-1} \\ \;\;\text{„}\quad \mu \geqq p\colon \qquad \dfrac{1}{p(p+1)\ldots\mu} g^{(\mu)}(0) \text{ ganzzahlig, also } g^{(\mu)}(0) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{durch } p \text{ teilbar.} \end{cases}$$

Daraus folgt, daß $(1+\gamma)\cdot G(0) \equiv (1+\gamma)\left\{g^{(p-1)}(0) + \sum_p^r{}^{\mu}\, g^{(\mu)}(0)\right\}$ *durch p nicht teilbar* ist

Um wiederum eine entsprechende Aussage bezüglich $G(x_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ machen zu können, hat man $g(x)$ nach Potenzen von $(x - x_\nu)$ oder auch — mit Rücksicht auf die weiteren Schlüsse etwas zweckmäßiger — von $(\alpha_n x - \alpha_n x_\nu)$ zu entwickeln. Man findet zunächst aus Gl. (43), wenn man den Faktor $\alpha_n^{np-1} \equiv \alpha_n^{p-1}\cdot(\alpha^{n-1})^p$ auf die beiden anderen Faktoren verteilt:

$$(p-1)!\, g(x)$$
$$= (\alpha_n x)^{p-1}\{(\alpha_n x)^n + \alpha_{n-1}(\alpha_n x)^{n-1} + \alpha_{n-2}\alpha_n(\alpha_n x)^{n-2} + \cdots + \alpha_0\alpha_n^{n-1}\}^p$$

oder, wenn

$$(45)\qquad \alpha_n x = z$$

gesetzt wird:

$$(46)\qquad (p-1)!\, g(x) = z^{p-1}\cdot(F_1(z))^p,$$

wo:

$$(47)\qquad F_1(z) = z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \alpha_{n-2}\alpha_n z^{n-2} + \cdots + \alpha_0 \alpha_n^{n-1}$$

Dabei hat die Gleichung

$$(48)\qquad F_1(z) = 0 \quad \text{die Wurzeln: } z_\nu = \alpha_n x_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Infolgedessen ist $F_1(z)$ durch $z - z_\nu$ teilbar, und zwar findet man (vgl. § 22, Nr. 2, Gl. (8), S. 190):

$$\frac{F_1(z)}{z - z_\nu} \equiv \frac{F_1(z) - F_1(z_\nu)}{z - z_\nu} = z^{n-1} + \gamma_1(z_\nu)\cdot z^{n-2} + \gamma_2(z_\nu)\cdot z^{n-3} + \cdots + \gamma_{n-1}(z_\nu),$$

wo $\gamma_1(z_\nu), \gamma_2(z_\nu), \ldots, \gamma_{n-1}(z_\nu)$ ganze rationale Funktionen von z_ν (vom Grade ihres Index) mit *ganzzahligen* aus den α_ν zusammengesetzten Koeffizienten[1]), also:

$$(49)\qquad F_1(z) = (z - z_\nu)(z^{n-1} + \gamma_1(z_\nu)\cdot z^{n-2} + \cdots + \gamma_{n-1}(z_\nu)).$$

---

1) Man findet z. B.:

$$\gamma_1(z_\nu) = z_\nu + \alpha_{n-1}$$
$$\gamma_2(z_\nu) = z_\nu^2 + \alpha_{n-1} z_\nu + \alpha_{n-2}\alpha_n$$
$$\gamma_3(z_\nu) = z_\nu^3 + \alpha_{n-1} z_\nu^2 + \alpha_{n-2}\alpha_n z_\nu + \alpha_{n-3}\alpha_n^2 \quad \text{usf}$$

Mit Benutzung dieser Beziehung geht die Gl. (46) in die folgende über:

$$(50)\quad (p-1)!\,g(x) = (z-z_\nu)^p \cdot z^{p-1}(z^{n-1} + \gamma_1(z_\nu)\cdot z^{n-2} + \cdots + \gamma_{n-1}(z_\nu))^r$$

und sodann, wenn man auf der rechten Seite (vermittelst der Identität $z = z_\nu + (z - z_\nu)$) alles nach Potenzen von $(z - z_\nu)$ entwickelt und ordnet:

$$\begin{aligned}&(p-1)!\,g(x)\\ &= \varphi_p(z_\nu)\cdot(z-z_\nu)^p + \varphi_{p+1}(z_\nu)\cdot(z-z_\nu)^{p+1} + \cdots + \varphi_r(z_\nu)\cdot(z-z_\nu)^r\\ (51)\ &= \alpha_n^p\varphi_p(z_\nu)\cdot(x-x_\nu)^p + \alpha_n^{p+1}\varphi_{p+1}(z_\nu)(x-x_\nu)^{p+1} + \cdots + \alpha_n^r\varphi_r(z_\nu)\cdot(x-x_\nu)^r,\end{aligned}$$

(wo $\varphi_p(z_\nu)$, $\varphi_{p+1}(z_\nu)$, ..., $\varphi_r(z_\nu)$ wieder ganze rationale Funktionen von z_ν mit *ganzzahligen* Koeffizienten.

Vergleicht man wiederum die letzte Entwickelung mit der *Taylor*schen:

$$(p-1)!\,g(x) = \sum_1^r{}^\nu \frac{(p-1)!}{\mu!} g^{(\mu)}(x_\nu)\cdot(x-x_\nu)^\mu,$$

so ergibt sich:

$$\begin{aligned}&\text{Für } \mu = 1, 2, \ldots, p-1: \ g^{(\mu)}(x_\nu) = 0\\ &\ \ ,, \quad \mu \geqq p: \qquad \frac{1}{p(p+1)\ldots\mu} g^{(\mu)}(x_\nu) = \alpha_n^\mu \varphi_\mu(z_\nu)\end{aligned}$$

d. h.:

$$\begin{aligned}g^{(p)}(x_\nu) &= p\cdot\alpha_n^p\varphi_p(z_\nu)\\ g^{(p+1)}(x_\nu) &= p(p+1)\cdot\alpha_n^{p+1}\varphi_{p+1}(z_\nu)\\ &\ldots\ldots\ldots\\ g^{(r)}(x_\nu) &= p(p+1)\ldots r\cdot\alpha_n^r\varphi_r(z_\nu)\end{aligned}$$

und hieraus durch Addition:

$$(52)\qquad G(x_\nu) \equiv \sum_1^r{}^\mu g^{(\mu)}(x_\nu) = p\,.\,\Phi(z_\nu),$$

wo:

$$(53)\quad \Phi(z_\nu) = \alpha_n^p\varphi_p(z_\nu) + (p+1)\alpha_n^{p+1}\varphi_{p+1}(z_\nu) + \cdots + (p+1)(p+2)\ldots r\alpha_n^r\varphi_r(z_\nu)$$

eine ganze rationale Funktion von z_ν mit *ganzzahligen* Koeffizienten.

Substituiert man in Gl. (52) $\nu = 1, 2, \ldots, n$, so ergibt sich durch nochmalige Addition:

$$(54)\qquad \sum_1^n{}^\nu G(x_\nu) = p\cdot\sum_1^n{}^\nu \Phi(z_\nu).$$

Dabei ist $\sum_1^n{}^\nu \Phi(z_\nu)$ eine *symmetrische* ganze Funktion mit *ganzzahligen* Koeffizienten von $z_1, z_2, \ldots, z_n$, d. h. von den Wurzeln der Gleichung $F_1(z) = 0$ (Gl. (48)) und da diese 1 als höchsten Koeffizienten hat (s. Gl. (47)), eine ganze Funktion der Koeffizienten von $F_1(z)$ wieder mit

ganzzahligen Koeffizienten (vgl. den letzten Satz von § 25, S. 208), somit selbst *eine ganze Zahl*, mithin $\sum_1^n {}_\nu G(x_\nu)$ ein *Multiplum* von p. Daraus folgt schließlich in Verbindung mit dem Ergebnis betreffs $(1+\gamma)\cdot G(0)$ (s. hinter Gl. (44)), daß der *erste* Teil der linken Seite von Gl. (41) als Summe einer *durch p nicht teilbaren* Zahl und eines *Multiplums von p* sicher eine *von Null verschiedene* ganze Zahl ist.

Zur Abschätzung des *zweiten* Teils der linken Seite von Gl. (41) findet man zunächst mit Benutzung der Abschätzungsformel (20):

$$\left|\sum_1^n {}_\nu R(x_\nu)\right| < \sum_1^n {}_\nu e^{|x_\nu|} g[\,|x_\nu|\,],$$

also, wenn $|x_\nu| \leqq \varrho$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, um so mehr:

$$\left|\sum_1^n {}_\nu R(x_\nu)\right| < n\cdot e^\varrho g[\varrho] \tag{55}$$

Da andererseits:

$$(p-1)!\, g(x) = \alpha_n^{np-1} x^{p-1}\cdot (F(x))^p = \alpha_n^{(n+1)p-1}\cdot x^{p-1} \prod_1^n {}_\nu (x - x_\nu)^p,$$

so folgt:

$$(p-1)!\, g[\varrho] \leqq \alpha_n^{(n+1)p-1}\cdot \varrho^{p-1}(2\varrho)^{np} = (2\alpha_n\varrho)^n\cdot (2^n\alpha_n^{n+1}\varrho^{n+1})^{p-1}$$

und daher:

$$\left|\sum_1^n {}_\nu R(x_\nu)\right| < n\,(2\alpha_n\varrho)^n\cdot e^\varrho\cdot \frac{(2^n\alpha_n^{n+1}\cdot\varrho^{n+1})^{p-1}}{(p-1)!} \tag{56}$$

also, da der letzte Faktor das p^{te} Glied der konvergenten Reihe für $e^{2^n\alpha_n^{n+1}\varrho^{n+1}}$ bildet, bei hinlänglicher Vergrößerung von p *beliebig klein*.

Damit ist aber die *Unmöglichkeit* von Gl. (41) bzw. (40), also die *Transzendenz von π vollständig bewiesen.*

§ 64. Darstellung von $\sin \pi x$, $\cos \pi x$ bzw. $\sin x$, $\cos x$ und von $e^x \pm 1$ durch unendliche Produkte.

1. Eine ganze Funktion n^{ten} Grades mit n vorgeschriebenen *Nullstellen* läßt sich durch ein Produkt von n Linearfaktoren darstellen und ist vermöge dieser Darstellungsform bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt (vgl. § 22, Nr. 6, S. 194). Nachdem wir jetzt in $\cos x$, $\sin x$ ganze transzendente Funktionen mit *unendlich vielen Nullstellen* kennen gelernt haben, liegt die Frage nahe, inwieweit jenes Ergebnis auf Funktionen dieser Gattung übertragbar sein könnte. Dabei wäre vor allem festzustellen: Gibt es überhaupt stets eine ganze transzendente Funktion

mit einer unendlichen Menge vorgeschriebener *Nullstellen* (die dann *eo ipso* nur die einzige *Häufungsstelle* ∞ besitzen dürfen[1]) und demgemäß abzählbar sein müssen, wie sofort ersichtlich wird, wenn man sich die betreffenden Punkte nach der Größe ihrer absoluten Beträge geordnet denkt)? Wir werden späterhin (s. § 77) zeigen, daß diese Frage ohne jede Einschränkung zu bejahen ist. Für den zunächst vorliegenden Zweck können wir indessen die gleiche Entscheidung einem bereits in I_3, § 85, Nr. 2 (S. 648) bewiesenen Satze entnehmen. Danach ist unter Voraussetzung der Konvergenz von $\sum |a_\nu|$ das unendliche Produkt:

$$\mathfrak{L}(x) \equiv \prod_{0}^{\infty}{}_{\nu} (1 + a_\nu x)$$

für *jeden endlichen Wert von x absolut und unbedingt konvergent*[2]) und kann in eine in gleichem Umfange, also *beständig konvergierende Potenzreihe* umgeformt werden, stellt somit eine *ganze* transzendente Funktion vor. Nimmt man etwa die a_ν als durchweg voneinander verschieden an und setzt das obige Produkt in die Form:

$$(1) \qquad \mathfrak{L}(x) = (1 + a_m x) \prod_{0}^{\infty}{}_{\nu}' (1 + a_\nu x),$$

wo m eine beliebige natürliche Zahl bedeutet und der Akzent bei dem Produktzeichen anzeigen soll, daß der Faktor $(1 + a_m x)$ nunmehr auszuscheiden hat, so erkennt man, daß dieses Produkt an der Stelle $x = -\frac{1}{a_m}$ einen *von Null verschiedenen* Wert besitzt, daß also die betreffende ganze transzendente Funktion die *einfache* Nullstelle $x = -\frac{1}{a_m}$ und somit schließlich die Gesamtmenge $\left(-\frac{1}{a_\nu}\right)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ zu *einfachen* Nullstellen hat.

Das Produkt $\mathfrak{L}(x)$ muß als ganze transzendente Funktion Derivierte jeder Ordnung besitzen. Wir wollen mit Rücksicht auf eine demnächst zu machende Anwendung zeigen, daß insbesondere die erste Derivierte des *unendlichen* Produkts $\mathfrak{L}(x)$ in ganz analoger Weise dargestellt werden kann, wie diejenige eines *endlichen* Produktes von der Form:

$$(2) \qquad \mathfrak{L}_n(x) = \prod_{0}^{n}{}_{\nu} (1 + a_\nu x),$$

für das nach der § 43, Nr. 3, Gl. (16) (S. 327) gegebenen Regel die Be-

---

1) Jede sonstige *Häufungsstelle* von *Nullstellen* wäre ja eine weitere *wesentlich singuläre* Stelle.

2) Vgl insbesondere a. a. O. Fußnote 1.

ziehung besteht:

$$(3) \qquad \mathfrak{L}_n'(x) = \mathfrak{L}_n(x) \cdot \sum_0^n{}_\nu \frac{a_\nu}{1 + a_\nu x},$$

mit dem Zusatze, daß diese Schreibweise nur korrekt ist, solange keiner der Nenner den Wert 0 hat, also $x \neq -\frac{1}{a_\nu}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ ist. Im Falle $x = -\frac{1}{a_m}$ *verschwinden* gleichzeitig mit $\mathfrak{L}_n(x)$ alle Glieder, deren Index ν von m verschieden ist, während das einzig übrigbleibende, in der Schreibweise: $\frac{a_m \mathfrak{L}_n(x)}{1 + a_m x}$ für $x = -\frac{1}{a_m}$ *sinnlos* werdende Glied so abzuändern ist, daß vermöge des in $\mathfrak{L}_n(x)$ enthaltenen Faktors $(1 + a_m x)$ der Nenner *vor* der Substitution von $x = -\frac{1}{a_m}$ durch Division fortgeschafft wird. Danach hat man:

$$(3\text{a}) \qquad \mathfrak{L}_n'\left(-\frac{1}{a_m}\right) = a_m \prod_0^n{}_\nu{}' \left(1 - \frac{a_\nu}{a_m}\right),$$

wo wiederum der Akzent bei dem Produktzeichen den Ausschluß des Indexwertes $\nu = m$ andeuten soll.

Um die analoge Darstellung für $\mathfrak{L}'(x)$ zu gewinnen, gehen wir davon aus, daß $\mathfrak{L}'(x)$ als Koeffizient der ersten Potenz von h in der Entwicklung von $\mathfrak{L}(x + h)$ nach Potenzen von h definiert ist. Man hat zunächst:

$$(4) \qquad \mathfrak{L}(x + h) = \prod_0^\infty{}_\nu (1 + a_\nu x + a_\nu h).$$

Andererseits ist infolge der vorausgesetzten Konvergenz von $\sum |a_\nu|$ auch das Produkt $\Pi(1 + |a_\nu x| + |a_\nu h|)$ konvergent und die daraus hervorgehende Reihe nach Potenzen von $(|x| + |h|)$ läßt sich, da sie aus lauter positiven Elementen besteht, auch nach Potenzen von $|h|$ ordnen. Infolgedessen läßt sich aber auch $\mathfrak{L}(x + h)$ in eine (absolut) konvergierende Reihe nach Potenzen von h umformen, und zwar ergibt sich durch Ausführung der angedeuteten Multiplikation als Koeffizient von h eine unendliche Reihe von Gliedern, deren jedes aus einem Faktor a_m und dem Produkt aller möglichen Faktoren von der Form $(1 + a_\nu x)$ mit Ausschluß von $(1 + a_m x)$ besteht und daher — abgesehen von dem oben gemachten, auf den Fall $1 + a_m x = 0$ bezüglichen Vorbehalt — in die Form: $\frac{a_m \mathfrak{L}(x)}{1 + a_m x}$ gesetzt werden kann. Somit ergibt sich, abgesehen von den Werten $x = -\frac{1}{a_\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$(5) \qquad \mathfrak{L}'(x) = \mathfrak{L}(x) \cdot \sum_0^\infty{}_\nu \frac{a_\nu}{1 + a_\nu x},$$

in vollständiger Analogie mit Gl. (3). Für $x = -\frac{1}{a_m}$ nimmt diese Beziehung die Form an:

$$(5a) \qquad \mathfrak{P}'\left(-\frac{1}{a_\nu}\right) = a_m \prod_0^\infty{}'_\nu \left(1 - \frac{a_\nu}{a_m}\right) \quad \text{(Akzent bedeutet: } excl.\ \nu = m).$$

2. Auf die Nullstellen der Funktion $\sin \pi x$, nämlich:

$$x = \nu \ (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

sind die Ergebnisse der vorigen Nummer in der vorliegenden Form noch nicht ohne weiteres anwendbar, da ja die Reihen $\sum \frac{1}{\nu}$ und $\sum \frac{-1}{\nu}$ *divergieren* und demgemäß auch die beiden unendlichen Produkte $\prod \left(1 + \frac{x}{\nu}\right)$, $\prod \left(1 - \frac{x}{\nu}\right)$ bei positivem x das erste nach $+\infty$, das zweite nach 0)[1]. Faßt man aber die Faktoren $\left(1 \pm \frac{x}{\nu}\right)$ paarweise zusammen[2]) und setzt:

$$(6) \qquad \Pi(x) = \prod_1^\infty{}_\nu \left\{\left(1 + \frac{x}{\nu}\right)\left(1 - \frac{x}{\nu}\right)\right\} = \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right),$$

so zeigt die zweite Schreibweise, daß dieses Produkt, infolge der Konvergenz von $\sum \frac{1}{\nu^2}$, von dem in Nr. 1 betrachteten Typus sich nur dadurch unterscheidet, daß x^2 an Stelle von x steht: es stellt also eine ganze transzendente Funktion von x^2, somit eine *gerade* Funktion dieser Gattung von x dar, mit den *einfachen* Nullstellen $x^2 = \nu^2$ (d h. $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$).

---

1) Vgl. I_3, § 82, Nr. 1 (S. 627).

2) Die Konvergenz des aus Faktoren von der Form $\left(1 + \frac{x}{\nu}\right)$ und $\left(1 - \frac{x}{\nu}\right)$ zusammengesetzten Produkts hängt infolge der Divergenz seiner beiden Bestandteile

$$\prod_1^\infty{}_\nu \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) \quad \text{und} \quad \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x}{\nu}\right)$$

wesentlich von der Anordnung der beiden Faktorengattungen $\left(1 + \frac{x}{\nu}\right)$ und $\left(1 - \frac{x}{\nu}\right)$ ab, sie ist bei Zulassung beliebiger Anordnung nur eine *bedingte*, wie bereits in I_3, § 86, Nr. 1 (S. 650) hervorgehoben wurde. Es wird später gezeigt werden, wie man ein solches *bedingt* konvergierendes Produkt durch Hinzufügung gewisser Exponentialfaktoren (also ohne an den vorhandenen *Nullstellen* etwas zu ändern) in ein *unbedingt* konvergentes umwandeln kann. Für den zunächst vorliegenden Zweck ist diese Kenntnis jedoch nicht erforderlich, da hier schon *die paarweise Zusammenfassung* der Faktoren, wie die zweite in Gl. (6) angegebene Schreibweise zeigt, genügt, um dessen *unbedingte* Konvergenz zu sichern und die in Nr. 1 gefundenen Ergebnisse darauf übertragen zu können

Bildet man jetzt den Quotienten $\frac{\sin \pi x}{x \cdot \Pi(x)}$ und beachtet, daß $\sin \pi x$ in der Umgebung von $x = 0$ in der Form: $x \cdot \mathfrak{P}(x)$, in der Umgebung jeder Stelle $x = \pm \nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) in der Form:

$$(x \mp \nu) \cdot \mathfrak{P}(x \mp \nu) = \left(1 \mp \frac{x}{\nu}\right) \cdot (\mp \nu \cdot \mathfrak{P}(x \mp \nu))$$

darstellbar ist, so erkennt man, daß dieser Quotient in jedem endlichen Bereiche sich *regulär* verhält und durchweg *von Null verschieden* ist, er muß also (im äußersten Falle) eine ganze transzendente Funktion ohne Nullstellen sein (die sich eventuell auch auf eine Konstante reduzieren kann), also nach § 58, Nr. 5 (S. 441) bzw. § 59, S. 444, Fußnote 1) von der Form: $C \cdot e^{g(x)}$, wo C eine Konstante und $g(x)$ eine ganze (rationale oder transzendente) Funktion ohne konstantes Glied bedeutet. Hiernach ergibt sich:

$$\sin \pi x = C \cdot e^{g(x)} \cdot x \cdot \Pi(x). \tag{7}$$

3. Um die noch unbekannte Funktion $g(x)$ zu bestimmen, bilden wir von beiden Seiten der Gl. (7) die Derivierte. Man findet mit Benutzung der in § 43 angegebenen Regeln (s. insbesondere S. 328, Gl. (27) nebst Fußnote 1) und S. 327, Gl. (16)):

$$\pi \cdot \cos \pi x = C \cdot e^{g(x)} \cdot x \cdot \Pi(x) \left\{ \frac{e^{g(x)} \cdot g'(x)}{e^{g(x)}} + \frac{1}{x} + \frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)} \right\}$$

und, wenn man diese Gleichung durch Gl. (7) dividiert:

$$\pi \cdot \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} = g'(x) + \frac{1}{x} + \frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)}. \tag{8}$$

Um zur Herstellung von $\Pi'(x)$ die Formel (5) anwenden zu können, ersetzen wir in der zweiten Form der Definitionsgleichung (6) x^2 durch y, so daß mit Hilfe der soeben schon angeführten Derivationsregel (Gl. (27), S. 328) und der Formel (5) sich ergibt:

$$\Pi'(x) = \left(D_y \prod_1^\infty{}^{\nu} \left(1 - \frac{y}{\nu^2}\right)\right)_{y = x^2} \cdot D_x x^2$$

$$= \left(\prod_1^\infty{}^{\nu} \left(1 - \frac{y}{\nu^2}\right) \cdot \sum_1^\infty{}^{\nu} \left(-\frac{1}{\nu^2}\right) \frac{1}{1 - \frac{y}{\nu^2}}\right)_{y = x^2} \cdot 2x$$

$$= \Pi(x) \cdot \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{2x}{x^2 - \nu^2}, \tag{8a}$$

also aus Gl. (8) die folgende Beziehung hervorgeht:

$$g'(x) = \pi \cdot \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} - \frac{1}{x} - \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{2x}{x^2 - \nu^2}. \tag{9}$$

Wir bilden hieraus auch noch $g''(x)$. Da die rechts auftretende Reihe in jedem beliebig großen endlichen Bereich, abgesehen von den Stellen $x = \pm \nu$, *gleichmäßig* konvergiert (vgl. § 29, das Beispiel am Schluß von Nr. 3, S. 240), so kann ihre Derivierte (nach § 49, Gl. (2), S. 373) durch gliedweises Derivieren gewonnen werden, wobei es zweckmäßig ist, sie zuvor in die Form: $\sum_1^\infty{}' \left(\frac{1}{x-\nu} + \frac{1}{x+\nu}\right)$ zu setzen. Man findet sodann:

$$g''(x) = \pi^2 \frac{-\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x}{\sin^2 \pi x} + \frac{1}{x^2} + \sum_1^\infty{}' \left(\frac{1}{(x-\nu)^2} + \frac{1}{(x+\nu)^2}\right).$$

Da die betreffende Reihe, wegen $\lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{\nu^2}{(x \pm \nu)^2} = 1$ noch absolut konvergent bleibt, wenn man die beiden Bestandteile der Klammergröße einzeln als Reihenglieder auffaßt, so kann man mit Benutzung der Identität: $\sum_1^\infty{}' \frac{1}{(x+\nu)^2} = \sum_{-1}^{-\infty}{}' \frac{1}{(x-\nu)^2}$ und indem man die beiden Teilreihen mit Hinzunahme des Gliedes $\frac{1}{x^2}$ in der üblichen Schreibweise (vgl. I_2, § 44, Nr. 7, S. 303) zu einer einzigen zusammenfaßt, der letzten Gleichung die Form geben:

$$g''(x) = -\left(\frac{\pi}{\sin \pi x}\right)^2 + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(x-\nu)^2}. \tag{10}$$

Man hat nun:

$$\sin \pi(x+1) = -\sin \pi x, \quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{((x+1)-\nu)^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(x-(\nu-1))^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(x-\nu)^2}$$

und daher:

$$g''(x+1) = g''(x), \tag{11}$$

d. h. $g''(x)$ ist *periodisch*, hat die Periode 1. Hieraus folgt, daß diese Funktion ihren gesamten Wertvorrat schon annehmen muß, wenn x nur alle Stellen *eines Periodenstreifens* durchläuft, etwa denjenigen, welcher bestimmt wird durch die Bedingungen:

$$x = \xi + \eta i, \quad \text{wo:} \begin{cases} 0 \leqq \xi < 1 \\ -\infty \leqq \eta \leqq +\infty. \end{cases} \tag{12}$$

Insbesondere müßte sie, falls sie absolut genommen überhaupt *beliebig große* Werte annimmt, solche Werte schon innerhalb des durch die Ungleichungen (12) charakterisierten Periodenstreifens annehmen, und zwar könnte sie als *ganze* Funktion von x nur *gleichzeitig mit* $|x$ also, wegen $0 \leqq \xi < 1$, nur *gleichzeitig mit* $|\eta|$ über alle Grenzen wachsen.

Man hat nun aber:

$$\sin \pi(\xi + \eta i) = \frac{e^{\pi(\xi+\eta i)i} - e^{-\pi(\xi+\eta i)i}}{2i} = \frac{e^{-\pi\eta} \cdot e^{\pi\xi i} - e^{\pi\eta} \cdot e^{-\pi\xi i}}{2i},$$

mithin ganz unabhängig von der Wahl des ξ:

$$|\sin \pi(\xi + \eta i)| \geqq \tfrac{1}{2} |e^{-\pi\eta} - e^{\pi\eta}| = \tfrac{1}{2}(e^{\pi|\eta|} - e^{-\pi|\eta|}) > \pi|\eta|$$

und daher für jedes ξ:

$$\left|\frac{\pi}{\sin \pi(\xi + \eta i)}\right| < \frac{1}{|\eta|},$$

also schließlich *gleichmäßig* für *alle* ξ insbesondere für diejenigen des Intervalls $[0, 1]$:

$$(13) \qquad \lim_{\eta \to \pm\infty} \frac{\pi}{\sin \pi(\xi + \eta i)} = 0.$$

Ferner ist:

$$\left|\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} \frac{1}{(\xi + \eta i - \nu)^2}\right| \leqq \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} \left|\frac{1}{\xi - \nu + \eta i}\right|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} \frac{1}{(\nu - \xi)^2 + \eta^2}$$

mithin, wenn $0 \leqq \xi \leqq 1$ und von vornherein $|\eta| > 0$ angenommen wird:

$$\left|\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} \frac{1}{(\xi + \eta i - \nu)^2}\right| < \frac{1}{\eta^2} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu^2 + \eta^2} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{(\nu - 1)^2 + \eta^2} = 2\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu^2 + \eta^2},$$

$$< 2\sum_{1}^{n}{}_{\nu} \frac{1}{\nu^2 + \eta^2} + 2\sum_{n+1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu^2}.$$

Der letzte Teil kann durch Wahl von n, der erste sodann durch Wahl von η *beliebig klein* gemacht werden, und somit wird:

$$(14) \qquad \lim_{\eta \to \pm\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} \frac{1}{(\xi + \eta i - \nu)^2} = 0,$$

wiederum *gleichmäßig* für alle ξ des Intervalls $[0, 1]$. Mit Benutzung der Gleichungen (13) und (14) liefert dann Gl. (10) in dem bezeichneten Umfang die oben angekündigte Beziehung:

$$(15) \qquad \lim_{\eta \to \pm\infty} g''(\xi + \eta i) = 0,$$

aus welcher auf Grund des zuvor Gesagten hervorgeht, daß $g''(x)$ *beschränkt* sein, also nach dem in § 52 Nr. 3 (S. 392) bewiesenen Satze sich auf eine *Konstante* reduzieren muß[1]), die aber mit Rücksicht auf

---

1) Die hier benutzte Schlußweise läßt sich offenbar in den folgenden Satz zusammenfassen: Eine eindeutige periodische, innerhalb eines einzigen Periodenstreifens *beschränkt* bleibende Funktion reduziert sich auf eine Konstante.

Gl. (15) nur die *Null* sein kann. Man findet somit:

$$g''(x) \equiv 0, \tag{16}$$

woraus dann weiter folgt, daß auch $g'(x)$ eine *Konstante* sein muß, etwa:

$$g'(x) = c. \tag{17}$$

Nun ergibt sich aber aus Gl. (9):

$$g'(-x) = -\pi \cdot \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} + \frac{1}{x} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{2x}{x^2 - \nu^2} = -g'(x),$$

also mit Benutzung von Gl. (17) (wegen: $g'(-x) = g'(x) = c$):

$$c = -c \quad \text{d. h.} \quad c = 0,$$

und daher:

$$g'(x) \equiv 0. \tag{18}$$

Danach muß schließlich auch $g(x)$ eine *Konstante* sein, und zwar, da $g(x)$ kein konstantes Glied enthalten sollte:

$$g(x) \equiv g(0) = 0. \tag{19}$$

Infolgedessen nimmt jetzt die in Gl. (7) gegebene Produktentwicklung für $\sin \pi x$ die folgende Form an:

$$\sin \pi x = C \cdot x \cdot \Pi(x) = C \cdot x \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right).$$

Schreibt man, um noch die Konstante C zu bestimmen, diese Gleichung folgendermaßen:

$$C \cdot \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right) = \frac{\sin \pi x}{x} = \pi\left(1 - \frac{(\pi x)^2}{3!} + \frac{(\pi x)^4}{5!} - \cdot \cdot\right),$$

so ergibt sich, indem man $x = 0$ setzt:

$$C = \pi,$$

und man findet somit als Endergebnis die folgende Produktentwickelung:

$$\sin \pi x = \pi x \cdot \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right) \tag{20}$$

oder auch, wenn man πx durch x, also x durch $\frac{x}{\pi}$ ersetzt:

$$\sin x = x \cdot \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{x^2}{\nu^2 \pi^2}\right). \tag{21}$$

Substituiert man hier noch $\frac{xi}{2}$ für x und benutzt die Beziehung:

$$\sin \frac{xi}{2} = \frac{e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}}}{2i} = \frac{1 - e^x}{2i\, e^{\frac{x}{2}}},$$

so geht aus der Gleichung (21) nach Multiplikation mit $\left(-2ie^{\frac{x}{2}}\right)$ noch die folgende hervor:

$$(22) \qquad e^x - 1 = x \cdot e^{\frac{x}{2}} \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 + \frac{x^2}{4\nu^2\pi^2}\right).$$

4. Analoge Betrachtungen, wie die zuvor angestellten würden zur Produktentwicklung von $\cos \pi x$ führen. Man kann indessen dieses Ziel mit Benutzung der für $\sin \pi x$ gefundenen Entwicklung sehr viel kürzer in folgender Weise erreichen. Man hat:

$$\cos \pi x \cdot \sin \pi x = \frac{1}{2} \sin 2\pi x = \pi x \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{4x^2}{\nu^2}\right),$$

also, wenn man das unendliche Produkt in *zwei* solche (gleichfalls beständig und unbedingt konvergierende) zerlegt, von denen das eine alle Faktoren mit *geradem*, das andere alle mit *ungeradem* Index ν enthält:

$$\cos \pi x \cdot \sin \pi x = \pi x \cdot \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{4x^2}{(2\nu)^2}\right) \cdot \prod_{0}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{4x^2}{(2\nu+1)^2}\right)$$

$$= \sin \pi x \cdot \prod_{0}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{4x^2}{(2\nu+1)^2}\right),$$

und daher:

$$(23) \qquad \cos \pi x = \prod_{0}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{4x^2}{(2\nu+1)^2}\right)$$

in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß $\cos \pi x$ die einfachen Nullstellen $x = \pm \frac{2\nu+1}{2} (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ besitzt. Ersetzt man wieder πx durch x, so folgt weiter:

$$(24) \qquad \cos x = \prod_{0}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{4x^2}{(2\nu+1)^2\pi^2}\right)$$

und hieraus durch Substitution von $\frac{xi}{2}$ statt x mit Benutzung der Beziehung:

$$\cos \frac{xi}{2} = \frac{e^{-\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}}}{2} = \frac{e^x + 1}{2e^{\frac{x}{2}}}$$

nach Multiplikation mit $2e^{\frac{x}{2}}$:

$$(25)\qquad e^x + 1 = 2e^{\frac{x}{2}} \prod_{0}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 + \frac{x^2}{(2\nu+1)^2\pi^2}\right).$$

§ 65. Das Wallissche Produkt und die Leibnizsche Reihe zur Darstellung von π. — Die Stirlingsche Formel für $n!$.

1. Die Entwicklungen des vorigen Paragraphen setzen uns in den Stand, die Zahl π nunmehr auch durch Grenzwerte *rationaler* Zahlenfolgen darzustellen.

Gibt man zunächst in der Produktentwicklung für $\sin \pi x$ (Gl (20) des vorigen Paragraphen) x den Wert $\frac{1}{2}$, so folgt:

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{1}{4\nu^2}\right) = \frac{\pi}{2} \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{(2\nu-1)\cdot(2\nu+1)}{2\nu \cdot 2\nu}$$

und daher:

$$(1)\qquad \frac{\pi}{2} = \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{2\nu \cdot 2\nu}{(2\nu-1)\,(2\nu+1)} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2\nu}{2\nu-1}\cdot\frac{2\nu}{2\nu+1}\cdots\cdots$$ [1])

eine Beziehung, welche nach ihrem Entdecker als die *Wallis*sche Formel bezeichnet wird.

Eine Produktentwicklung für $\frac{\pi}{2}$ von ähnlicher Einfachheit ergibt sich aus der nämlichen Produktdarstellung von $\sin \pi x$ durch die Substitution $x = \frac{1}{4}$, wenn man noch beachtet, daß:

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Danach wird zunächst:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\pi}{4} \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{1}{16\nu^2}\right) = \frac{\pi}{4} \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{(4\nu-1)\cdot(4\nu+1)}{4\nu\;4\nu},$$

also:

$$(2)\qquad \frac{\pi}{2} = \sqrt{2} \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{4\nu \cdot 4\nu}{(4\nu-1)\cdot(4\nu+1)} = \sqrt{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots\frac{4\nu}{4\nu-1}\cdot\frac{4\nu}{4\nu+1}\cdots\cdots$$

---

1) Genau genommen hätte man zunächst zu setzen:

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdots\left(\frac{2\nu}{2\nu-1}\cdot\frac{2\nu}{2\nu+1}\right)\cdots\cdots$$

Da aber: $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{2\nu}{2\nu-1} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{2\nu}{2\nu+1} = 1$, so darf man die Klammern weglassen.

Die Vergleichung der beiden Formeln (1) und (2) gibt beiläufig bemerkt eine der *Wallis*schen Formel verwandte, merkwürdige Produktdarstellung von $\sqrt{2}$. Trennt man nämlich in dem unendlichen Produkte (1) die Faktoren mit geradem Index von denjenigen mit ungeradem Index (was infolge der *unbedingten* Konvergenz des Gesamtproduktes gestattet ist), so wird:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_1^\infty{}_\nu \frac{(4\nu-2)(4\nu-2)}{(4\nu-3)(4\nu-1)} \cdot \prod_1^\infty{}_\nu \frac{4\nu \cdot 4\nu}{(4\nu-1)(4\nu+1)}$$

und daher mit Benutzung von Gl. (2):

$$(3)\qquad \sqrt{2} = \prod_1^\infty{}_\nu \frac{(4\nu-2)(4\nu-2)}{(4\nu-3)(4\nu-1)} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{4\nu-2}{4\nu-3}\cdot\frac{4\nu-2}{4\nu-1}\cdots,$$

wie sich übrigens auch aus dem Kosinusprodukte durch die Substitution $x = \frac{1}{4}$ ergeben würde.

2. Um auch eine *Reihen*entwicklung für π zu gewinnen, gehen wir auf die Gleichung (9) des vorigen Paragraphen zurück, welche infolge des Ergebnisses $g'(x) \equiv 0$ (s. Gl. (18)) jetzt in die Form gesetzt werden kann:

$$(4)\qquad \frac{\pi\cdot\cos\pi x}{\sin\pi x} = \frac{1}{x} - \sum_1^\infty{}_\nu \frac{2x}{\nu^2-x^2} = \frac{1}{x} - \sum_1^\infty{}_\nu \left(\frac{1}{\nu-x} - \frac{1}{\nu+x}\right).$$

Setzt man hier wieder $x = \frac{1}{4}$, so ergibt sich:

$$\pi = 4 - \sum_1^\infty{}_\nu \left(\frac{4}{4\nu-1} - \frac{4}{4\nu+1}\right)$$
$$= 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots\right),$$

also:

$$(5)\qquad \frac{\pi}{4} = \sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu \cdot \frac{1}{2\nu+1} = 2\sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{(4\nu+1)(4\nu+3)}.$$

Diese in der *ersten* Form (als sogenannte *Leibniz*sche Reihe) nur *bedingt*, in der *zweiten* dagegen *unbedingt* konvergierende Reihe ist freilich wegen ihrer verhältnismäßig *langsamen* Konvergenz (wie übrigens auch die unter (1) und (2) mitgeteilten Produktentwicklungen) zur wirklichen *Berechnung* von π mit einigermaßen ausreichender Genauigkeit äußerst ungeeignet. Immerhin ist durch die Formeln (1) und (5) die prinzipiell wichtige Aufgabe, die Zahl π als Grenzwert *rationaler* Zahlenfolgen darzustellen, nicht nur in *theoretisch* befriedigender Weise gelöst, sondern die Reihe (5) läßt sich mit Hilfe elementarer Transformationsmethoden

leicht in *sehr viel rascher* konvergierende und zur Berechnung von π *praktisch* brauchbare umformen (vgl. I_2, § 61, S. 443 und insbesondere S. 449, wo eine Reihe angegeben wird, die schon durch Summation von 4 Gliedern π auf 4 Dezimalstellen genau liefert). Im übrigen liefert die Analysis noch mannigfache andere, zum Teil noch wesentlich vorteilhaftere Berechnungsformeln. Man findet:

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots \tag{6}$$

3. Schreibt man die *Wallis*sche Formel (1) folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\pi &= 2\lim_{n\to\infty}\frac{2^2\ 4^2\cdots(2n)^2}{1^2\ 3^2\cdots(2n-1)^2}\cdot\frac{1}{2n+1}\\ &= 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n\cdot n!}{1\cdot3\cdots(2n-1)}\right)^2\cdot\frac{1}{2n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{(2n)!}\right)^2\cdot n^{-1}\right)\end{aligned}$$

so folgt:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} 2^{2n}\cdot n^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!}. \tag{7}$$

Wir knüpfen an diese Beziehung die Herleitung der sogenannten *Stirling*schen Formel, die zur näherungsweisen Berechnung von $n!$ bei verhältnismäßig großen Werten von n dienlich ist bzw. einen *infinitären* Ausdruck für $n!$ liefert. Man hat identisch:

$$\begin{aligned}(n!)^2 &= \frac{1^3\ 2^5\cdot3^7\cdots(n-1)^{2n-1}\cdot n^{2n+1}}{1^1\cdot2^3\cdot3^5\cdots(n-1)^{2n-3}\ n^{2n-1}}\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n-1}\cdot n^{2n+1}\end{aligned}$$

und daher:

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}}\cdot\prod_{1}^{n-1}{}_{\nu}\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Um das rechtsstehende Produkt umzuformen, gehen wir von der Identität aus:

$$\frac{\nu}{\nu+1} = \frac{2\nu}{2\nu+1}\cdot\frac{2\nu+1}{2\nu+2} = \left(1-\frac{1}{2\nu+1}\right)\left(1+\frac{1}{2\nu+1}\right)^{-1} \tag{9}$$

und benutzen sodann die für $|x|<1$ geltenden Beziehungen:

$$1-x = e^{-\sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\frac{1}{\lambda}x^{\lambda}},\quad 1+x = e^{-\sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}(-1)^{\lambda}\frac{1}{\lambda}x^{\lambda}}, \tag{10}$$

deren *erste* aus:

$$\frac{D_x(1-x)}{1-x} = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}x^{\lambda-1} = D_x\left(-\sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\frac{1}{\lambda}\cdot x^{\lambda}\right)\quad(\ x\ <1)$$

nach § 58, Nr. 4 (s. Gl. (10) und (15)[1], S. 440) hervorgeht, worauf die *zweite* durch Substitution von $-x$ an Stelle von x sich ergibt. Man findet hieraus:

$$(1-x)(1+x)^{-1} = e^{-\sum_1^\infty \lambda\,(1+(-1)^{\lambda-1})\cdot\frac{1}{\lambda}\,x^\lambda}$$
$$= e^{-2x\left(1+\sum_1^\infty \lambda\,\frac{1}{2\lambda+1}\,x^{2\lambda}\right)}$$

und daher durch Anwendung auf Gl. (9):

$$\frac{\nu}{\nu+1} = e^{-\frac{2}{2\nu+1}\left(1+\sum_1^\infty \lambda\,\frac{1}{2\lambda+1}\,\left(\frac{1}{2\nu+1}\right)^{2\lambda}\right)},$$

also durch Erhebung in die $(\nu+\frac{1}{2})$te Potenz:

$$\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} = e^{-\left(1+\sum_1^\infty \lambda\,\frac{1}{2\lambda+1}\,\left(\frac{1}{2\nu+1}\right)^{2\lambda}\right)},$$

und schließlich für das in Gl. (8) auftretende Produkt:

$$\prod_1^{n-1}{}_\nu \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} = e^{-(n-1+S_n)}, \tag{11}$$

wo:

$$S_n = \sum_1^{n-1}{}_\nu \sum_1^\infty{}_\lambda \frac{1}{2\lambda+1}\cdot\left(\frac{1}{2\nu+1}\right)^{2\lambda}. \tag{12}$$

Es läßt sich zeigen, daß S_n für $n\to\infty$ in eine *konvergierende* iterierte Reihe übergeht, also für $n\to\infty$ einen endlichen Grenzwert besitzt. Man hat zunächst für jedes $p = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\sum_n^{n+p}{}_\nu \sum_1^\infty{}_\lambda \frac{1}{2\lambda+1}\cdot\left(\frac{1}{2\nu+1}\right)^{2\lambda} = \alpha \sum_n^{n+p}{}_\nu \sum_1^\infty{}_\lambda \left(\frac{1}{2\nu+1}\right)^{2\lambda},$$

wo $0<\alpha<\frac{1}{3}$. Dabei ist:

$$\sum_1^\infty{}_\lambda \left(\frac{1}{2\nu+1}\right)^{2\lambda} = \frac{1}{(2\nu+1)^2-1} = \frac{1}{4\nu(\nu+1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)$$

---

1) Danach würde sich zunächst ergeben:

$$1-x = C\cdot e^{-\sum_1^\infty \lambda\,\frac{1}{\lambda}\,x^\lambda}.$$

Die Substitution $x=0$ liefert alsdann:

$$C = 1.$$

und daher für $p \to \infty$:

$$(13) \quad \sum_n^\infty{}_\nu \sum_1^\infty{}_\lambda \frac{1}{2\lambda+1}\left(\frac{1}{2\nu+1}\right)^{2\lambda} < \frac{1}{12}\sum_n^\infty{}_\nu\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right) = \frac{1}{12n}.$$

Hiernach kann man setzen:

$$(14) \quad \sum_1^\infty{}_\nu \sum_1^\infty{}_\lambda \frac{1}{2\lambda+1}\cdot\left(\frac{1}{2\nu+1}\right)^{2\lambda} = S,$$

wo S eine bestimmte positive Zahl vorstellt.[1]) Die Ungleichung (13) nimmt alsdann die Form an:

$$S - S_n < \frac{1}{12n},$$

so daß also:

$$(15) \quad S_n > S - \frac{1}{12n}.$$

Andererseits ist offenbar:

$$(16) \quad S_n < S,$$

da die aus lauter positiven Gliedern bestehende Summe S_n mit n monoton zunimmt. Auf Grund der Ungleichungen (15) und (16) kann man also setzen:

$$(17) \quad S_n = S - \frac{\vartheta_n}{12n},$$

wo ϑ_n eine von n abhängige, zwischen 0 und 1 liegende Zahl bedeutet. Führt man diesen Ausdruck (17) in die Gleichung (11) ein, so wird:

$$(18) \quad \prod_1^{n-1}{}_\nu \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} = e^{1-S}\cdot e^{-n+\frac{\vartheta_n}{12n}} = C\cdot e^{-n+\frac{\vartheta_n}{12n}},$$

wo $C = e^{1-S}$ eine *von n unabhängige* Konstante bedeutet, und es geht somit Gl. (8) in die folgende über:

$$(19) \quad n! = C\cdot n^{n+\frac{1}{2}}\cdot e^{-n+\frac{\vartheta_n}{12n}} \quad (0 < \vartheta_n < 1).$$

Die aus der *Wallis*schen Formel abgeleitete Beziehung (7) kann nun dazu dienen, um die ursprünglich in der Form e^{1-S} gefundene Konstante C anderweitig zu bestimmen. Erhebt man Gl. (19) ins Quadrat, so folgt:

$$(n!)^2 = C^2\cdot n^{2n+1}\cdot e^{-2n+\frac{\vartheta_n}{6n}}.$$

Andererseits findet man aus Gl. (19) durch Substitution von $2n$ für n:

$$(2n)! = C\cdot 2^{2n+\frac{1}{2}}\cdot n^{2n+\frac{1}{2}}\cdot e^{-2n+\frac{\vartheta_{2n}}{24n}}$$

---

1) Vgl. die Fußnote 1 auf der folgenden Seite.

und daher:

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = C \cdot 2^{-2n-\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{24n}(4\vartheta_n - \vartheta_{2n})}$$

Durch Einführung dieses Ausdrucks in Gl. (7) ergibt sich also: .

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} C \cdot 2^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{24n}(4\vartheta_n - \vartheta_{2n})} = \frac{C}{\sqrt{2}},$$

d. h.

(20) $$C = \sqrt{2\pi}\ ^{1)}.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in Gl. (19) gewinnt man schließlich die oben als *Stirling*sche Formel angekündigte Beziehung:

(21) $$n! = \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n+\frac{\vartheta_n}{12n}} \qquad (0 < \vartheta_n < 1).$$

Man hat hiernach für $n \to \infty$:

(22) $$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \simeq \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}\ ^{2)}$$

---

1) Daraus ergibt sich:

$$e^{1-S} = \sqrt{2\pi},$$

also:

$$S = 1 - \tfrac{1}{2}\lg 2\pi.$$

2) Hieraus folgt mit Berücksichtigung von:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(2\pi n)^{\frac{1}{2}}} = 1,$$

daß:

$$\sqrt[n]{n!} \simeq \frac{n}{e}.$$

(Bezüglich der Bedeutung des Zeichens $\simeq$ vgl. I_1, § 37, Gl. (41), S. 237.) Übrigens läßt sich diese für manche Zwecke nützliche Formel auch merklich kürzer herleiten. Man hat zunächst:

$$e^n = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{n^\nu}{\nu!} > \frac{n^n}{n!},$$

also:

(1) $$n! > n^n e^{-n}.$$

Andererseits ist:

$$n! = \frac{1^2 \cdot 2^3 \cdot 3^4 \cdots (n-1)^n \cdot n^{n+1}}{2^2 \cdot 3^3 \cdots (n-1)^{n-1} \cdot n^n}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot n^{n+1}$$

$$= n^{n+1} \cdot \prod_{1}^{n-1}{}_{\nu} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}},$$

also:

(2) $$n! < n^{n+1}\ e^{-(n-1)}$$

und $\left(\text{wegen: } 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)=\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}\right)$:

$$1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\simeq\sqrt{2}\cdot(2n)^n\cdot e^{-n}. \tag{23}$$

§ 66. Zusammenhang der Reihensummen $S_{2\lambda}\equiv\sum_1^\infty{}_\nu\left(\frac{1}{\nu}\right)^{2\lambda}$ und $s_{2\lambda}\equiv\sum_1^\infty{}_\nu\left(\frac{1}{2\nu-1}\right)^{2\lambda}$ mit $\pi^{2\lambda}$. — Die Bernoullischen Zahlen.

1. Entwickelt man das unendliche Produkt der Formel:

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x}=\prod_1^\infty{}_\nu\left(1-\frac{x^2}{\nu^2}\right)$$

in eine Reihe nach Potenzen von x^2, so ergibt sich durch Vergleichung des Koeffizienten von x^2 mit demjenigen der Reihenentwicklung:

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x}=1-\frac{\pi^2x^2}{3!}+\frac{\pi^4x^4}{5!}-\cdots$$

die Beziehung:

$$\sum_1^\infty{}_\nu\left(\frac{1}{\nu}\right)^2=\frac{\pi^2}{6}. \tag{1}$$

Analoge Beziehungen für Reihensummen von der allgemeinen Form $\sum_1^\infty{}_\nu\left(\frac{1}{\nu}\right)^{2\lambda}$ sind auf diesem Wege offenbar nicht zu gewinnen, da ja bei der Umformung des obigen Produktes in eine Reihe unendliche Reihen von *Kombinationen λ ter* Klasse der Zahlen $\frac{1}{\nu^2}$ $(\nu=1,2,3,\ldots)$ als Koeffizienten der Potenzen $x^{2\lambda}$ erscheinen. Das gelingt hingegen, wenn wir von der durch Derivation aus der Produktentwicklung von $\sin\pi x$ hervorgehenden, im vorigen Paragraphen bereits als Gl. (4) (S. 495) benutzten Beziehung ausgehen:

$$\frac{\cos\pi x}{\sin\pi x}=\frac{1}{\pi x}-\frac{2}{\pi}\sum_1^\infty{}_\nu\frac{x}{\nu^2-x^2}=\frac{1}{\pi x}\left(1-2\sum_1^\infty{}_\nu\frac{x^2}{\nu^2-x^2}\right), \tag{2}$$

$\left(\text{wegen: } \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}>e, \text{ vgl. I}_1, \text{ § 33, Ungl. (10), S. 199}\right)$. Aus (1) und (2) folgt weiter:

$$n\cdot e^{-1}<\sqrt[n]{n!}<n\cdot e^{-1}\sqrt[n]{ne}$$

und daher für $n\to\infty$, wie oben:

$$\sqrt[n]{n!}\cong n\cdot e^{-1}.$$

welche durch Substitution von x an Stelle von πx in die folgende übergeht:

$$\text{(3)} \qquad \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x}\left(1 - 2\sum_1^\infty {}_\nu \frac{x^2}{\nu^2\pi^2 - x^2}\right).$$

Unterwirft man x der Bedingung $|x| < \pi$, so hat man:

$$\sum_1^\infty {}_\nu \frac{x^2}{\nu^2\pi^2 - x^2} = \sum_1^\infty {}_\nu \frac{x^2}{\nu^2\pi^2} \sum_0^\infty {}_\lambda \frac{x^{2\lambda}}{\nu^{2\lambda}\pi^{2\lambda}} = \sum_1^\infty {}_\nu \sum_1^\infty {}_\lambda \frac{x^{2\lambda}}{\nu^{2\lambda}\pi^{2\lambda}}.$$

Da es auf Grund der absoluten Konvergenz dieser Reihe und des *Cauchy*schen Doppelreihensatzes freisteht, die Reihe durch Vertauschung der Summationsfolge nach Potenzen von x zu ordnen, so wird:

$$\text{(4)} \qquad \sum_1^\infty {}_\nu \frac{x^2}{\nu^2\pi^2 - x^2} = \sum_1^\infty {}_\lambda \frac{1}{\pi^{2\lambda}}\left(\sum_1^\infty {}_\nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{2\lambda}\right) \cdot x^{2\lambda} = \sum_1^\infty {}_\lambda \frac{1}{\pi^{2\lambda}} \cdot S_{2\lambda} x^{2\lambda},$$

wenn gesetzt wird:

$$\text{(5)} \qquad S_k = \sum_1^\infty {}_\nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^k \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots).$$

Durch Einsetzen dieser Entwicklung in Gl. (3) ergibt sich also:

$$\text{(6)} \qquad \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x}\left(1 - 2\sum_1^\infty {}_\lambda \frac{1}{\pi^{2\lambda}} \cdot S_{2\lambda} x^{2\lambda}\right) \qquad (|x| < \pi)$$

und hieraus würde durch Multiplikation mit $\sin x$ und Einführung der Potenzreihen für $\cos x$, $\frac{\sin x}{x}$ die Beziehung:

$$\text{(7)} \quad \left(\sum_0^\infty {}_\lambda (-1)^\lambda \cdot \frac{x^{2\lambda}}{(2\lambda+1)!}\right)\left(1 - 2\sum_1^\infty {}_\lambda \frac{1}{\pi^{2\lambda}} \cdot S_{2\lambda} x^{2\lambda}\right) = \sum_0^\infty {}_\lambda (-1)^\lambda \cdot \frac{x^{2\lambda}}{(2\lambda)!}$$

und nach Ausführung der Multiplikation durch Vergleichung der Koeffizienten von $x^{2\lambda}$ eine Rekursionsformel für $S_{2\lambda}$ hervorgehen. Es erweist sich indessen mit Rücksicht auf andere, mit der vorliegenden zusammenhängende Entwicklungen als zweckmäßig, die Ausführung der Rechnung noch folgendermaßen umzugestalten. Wir ersetzen in Gl. (6) x durch $\frac{x}{2}$, so daß also:

$$\text{(8)} \qquad \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{2}{x}\left(1 - \sum_1^\infty \frac{1}{2^{2\lambda-1}\pi^{2\lambda}} \cdot S_{2\lambda} x^{2\lambda}\right)$$

und führen an Stelle der $S_{2\lambda}$ Zahlen B_λ ein durch die Beziehung:

$$\text{(9)} \qquad \frac{1}{2^{2\lambda-1}\pi^{2\lambda}} \cdot S_{2\lambda} = \frac{1}{(2\lambda)!} B_\lambda, \quad \text{also:} \quad S_{2\lambda} = \frac{2^{2\lambda-1}}{(2\lambda)!} \cdot B_\lambda \pi^{2\lambda}.$$

Durch Einführung dieser als *Bernoullische Zahlen* bezeichneten, in zahlreichen analytischen Entwicklungen vorkommenden Zahlen B_λ nimmt Gl. (8) die Form an:

$$\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{2}{x}\left(1 - \sum_1^\infty{}^\lambda \frac{1}{(2\lambda)!} B_\lambda x^{2\lambda}\right) \tag{10}$$

und, wenn man diese Gleichung mit der folgenden:

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin x$$

multipliziert:

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{x}\left(1 - \sum_1^\infty{}^\lambda \frac{1}{(2\lambda)!} B_\lambda x^{2\lambda}\right). \tag{11}$$

Substituiert man für $\cos^2\frac{x}{2}\left(=\frac{1}{2}(1+\cos x)\right)$ und $\frac{\sin x}{x}$ die entsprechenden Potenzreihen, so ergibt sich nach Vertauschung der beiden Gleichungsseiten:

$$\left(1 + \sum_1^\infty{}^\lambda (-1)^\lambda\cdot\frac{x^{2\lambda}}{(2\lambda+1)!}\right)\left(1 - \sum_1^\infty{}^\lambda \frac{1}{(2\lambda)!} B_\lambda x^{2\lambda}\right) \tag{12}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\sum_1^\infty{}^\lambda (-1)^\lambda\cdot\frac{x^{2\lambda}}{(2\lambda)!}$$

und hieraus durch Multiplikation der beiden links stehenden Reihen nach der *Cauchy*schen Regel und Vergleichung der Koeffizienten von $x^{2\lambda}$ die Rekursionsformel:

$$-\frac{1}{(2\lambda)!}B_\lambda + \frac{1}{3!\,(2\lambda-2)!}B_{\lambda-1} - \frac{1}{5!\,(2\lambda-4)!}B_{\lambda-2} + \cdots$$

$$+ (-1)^\lambda\cdot\frac{1}{(2\lambda-1)!\,2!}B_1 + (-1)^\lambda\cdot\frac{1}{(2\lambda+1)!} = (-1)^\lambda\frac{1}{2\cdot(2\lambda)!},$$

welche durch Multiplikation mit $-(2\lambda+1)!$ und Transposition des letzten Gliedes der linken Seite auf die rechte die Form annimmt:

$$(2\lambda+1)_1 B_\lambda - (2\lambda+1)_3 B_{\lambda-1} + (2\lambda+1)_5 B_{\lambda-2} - \cdots \tag{13}$$

$$+ (-1)^{\lambda-1}(2\lambda+1)_{2\lambda-1} B_1 = (-1)^{\lambda-1}\cdot\frac{2\lambda-1}{2}.$$

2. Diese Rekursionsformel läßt sofort erkennen, daß die B_λ *rationale* Zahlen sind; daß sie andererseits durchweg *positiv* sind, zeigen schon die Gleichungen (9), aus denen jetzt zugleich hervorgeht, daß $S_{2\lambda}$ (wie schon oben für $\lambda = 1$ erkannt wurde; s. Gl. (1)) für jedes positive ganzzahlige $\lambda \geqq 1$ ein *rationales Multiplum von* $\pi^{2\lambda}$.[1])

1) Es verdient hervorgehoben zu werden, daß für die Summen $S_{2\lambda+1}$ ($\lambda \geqq 1$) ähnliche Beziehungen zu π oder zu irgendeiner anderen festen Zahl bisher nicht

Man findet z. B. aus der Rekursionsformel (13) für $\lambda = 1, 2, 3, 4$:

$$(13a)\quad \begin{cases} 3B_1 = \frac{1}{2} & \text{also: } B_1 = \frac{1}{6} \\ 5B_2 - 10B_1 = -\frac{3}{2} & B_2 = \frac{1}{30} \\ 7B_3 - 35B_2 + 21B_1 = \frac{5}{2} & B_3 = \frac{1}{42} \\ 9B_4 - 84B_3 + 126B_2 - 36B_1 = -\frac{7}{2} & B_4 = \frac{1}{30} \end{cases}$$

und daher mit Benutzung von (9):

$$(14)\qquad S_2 = \frac{\pi^2}{6},\quad S_4 = \frac{\pi^4}{90},\quad S_6 = \frac{\pi^6}{945},\quad S_8 = \frac{\pi^8}{9450},\ \text{usf.}$$

Beachtet man noch, daß (für $\varkappa \geqq 2$):

$$S_\varkappa = \sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{2\nu-1}\right)^\varkappa + \sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{2\nu}\right)^\varkappa = s_\varkappa + \frac{1}{2^\nu}\cdot S_\varkappa,$$

wenn gesetzt wird:

$$(15)\qquad s_\varkappa = \sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{2\nu-1}\right)^\varkappa \qquad (\varkappa = 2, 3, 4, \ldots),$$

so folgt:

$$(16)\qquad s_\varkappa = \frac{2^\varkappa - 1}{2^\varkappa}\cdot S_\varkappa$$

und daher:

$$(16a)\qquad s_2 = \frac{\pi^2}{8},\quad s_4 = \frac{\pi^4}{96},\quad s_6 = \frac{\pi^6}{960},\quad s_8 = \frac{17\pi^8}{161280},\ \text{usf.}$$

3. Wie die Anfangswerte der *Bernoulli*schen Zahlen B_λ (s. Gl. (13a)) zeigen, findet bis B_3 ein *Abnehmen* statt, während $B_4 > B_3$ ist. Als weitere Werte findet man:

$$B_5 = \frac{5}{66},\quad B_6 = \frac{691}{2730},\quad B_7 = \frac{7}{6}\ \text{usf.,}$$

sie sind also *zunehmend*. Daß aber die *Zunahme* nunmehr eine *beständige* bleibt, läßt sich leicht aus Gl. (9) erschließen. Danach hat man:

$$(17)\quad B_\lambda = \frac{(2\lambda)!}{2^{2\lambda-1}\cdot\pi^{2\lambda}}\cdot S_{2\lambda},\quad \text{also:}\quad \frac{B_{\lambda+1}}{B_\lambda} = \frac{(\lambda+1)(2\lambda+1)}{2\pi^2}\cdot\frac{S_{2\lambda+2}}{S_{2\lambda}}.$$

Nun ist für $\varkappa \geqq 2$:

$$S_\varkappa = 1 + \frac{1}{2^\varkappa} + \frac{1}{3^\varkappa} + \cdots < 1 + \frac{1}{2^{\varkappa-2}}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{2^{\varkappa-2}},$$

andererseits:

$$S_\varkappa > 1\ ^{1)}$$

---

bekannt sind. Man hat noch nicht einmal feststellen können, ob sie rationale oder irrationale Zahlen sind.

1) Aus diesen beiden Ungleichungen für S_ν folgt:

$$\lim_{\varkappa\to\infty} S_\varkappa = 1.$$

und daher, wenn man die erste dieser Ungleichungen auf $S_{2\lambda}$, die zweite auf $S_{2\lambda+2}$ anwendet:

$$\frac{S_{2\lambda+2}}{S_{2\lambda}} > \frac{2^{2\lambda-2}}{2^{2\lambda-2}+1}. \tag{18}$$

Da ferner (vgl. § 65, Gl. (6), S. 496):

$$\pi^2 < (3{,}15)^2 < 10.$$

so folgt aus der zweiten der Gl. (17), daß:

$$\frac{B_{\lambda+1}}{B_\lambda} > \frac{(2\lambda+1)(\lambda+1)}{20} \cdot \frac{2^{2\lambda-2}}{2^{2\lambda-2}+1} \tag{19}$$

und daher schon für $\lambda \geqq 3$:

$$\frac{B_{\lambda+1}}{B_\lambda} > \frac{28}{20} \cdot \frac{16}{17} = \frac{112}{85} > 1.$$

Im übrigen zeigt die Ungl. (19), daß die B_λ mit wachsendem λ *außerordentlich schnell* wachsen und daß $\lim_{\lambda \to \infty} B_\lambda = +\infty$. Um einen Begriff von der rapiden Zunahme zu geben, möge angeführt werden, daß schon: $B_{13} = \frac{8553103}{6}$ und daß B_{31} im Nenner gleichfalls die 6, im Zähler aber bereits eine 38stellige Zahl enthält.

Will man zu der *unteren* Schranke (19) für das Zunahmeverhältnis $\frac{B_{\lambda+1}}{B_\lambda}$ auch eine *obere* hinzufügen, so ergibt sich, da die $S_\varkappa$ mit wachsendem $\varkappa$ beständig *abnehmen*, also:

$$\frac{S_{2\lambda+1}}{S_{2\lambda}} < 1, \tag{20}$$

aus Gl. (17):

$$\frac{B_{\lambda+1}}{B_\lambda} < \frac{(\lambda+1)(2\lambda+1)}{2\pi^2}. \tag{21}$$

Um auch die B_λ selbst in übersichtliche Grenzen einzuschließen, hat man für $\lambda > 1$:

$$1 < S_{2\lambda} < S_2 = \frac{\pi^2}{6}$$

und findet somit aus der ersten der Gl. (17):

$$\frac{(2\lambda)!}{2^{2\lambda-1}\cdot\pi^{2\lambda}} < B_\lambda < \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{(2\lambda)!}{2^{2\lambda-1}\cdot\pi^{2\lambda}}. \tag{22}$$

---

und daher aus der zweiten Gl. (17) für $\lambda \to \infty$:

$$\frac{B_{\lambda+1}}{B_\lambda} \cong \frac{\lambda^2}{\pi^2}.$$

§ 67. Gebrochene transzendente Funktionen. — Darstellung der elementaren Funktionen dieser Gattung: $\cot x$, $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ und $\frac{1}{1 \pm e^x}$ durch Partialbruch- und Potenzreihen. Die Tangenten- und Sekantenkoeffizienten (Eulerschen Zahlen).

1. Nach Analogie der Definition einer *gebrochenen rationalen* Funktion als Quotient zweier *ganzer rationaler* Funktionen (dessen Zähler sich auch auf eine Konstante reduzieren kann) bezeichnen wir den Quotienten zweier *ganzen* Funktionen, von denen mindestens *eine* eine *transzendente* ist, als *gebrochene transzendente Funktion.* Dabei ist zu beachten, daß ein solcher Quotient sich auf eine *ganze* transzendente Funktion reduziert, falls der Nenner eine ganze transzendente Funktion *ohne Nullstellen,* also von der Form $C \cdot e^{g(x)}$ ist (vgl. S. 444 Fußn. 1), da deren reziproker Wert $\frac{1}{C} \cdot e^{-g(x)}$ gleichfalls eine *ganze* transzendente Funktion ist; und daß wir, falls der Nenner *Nullstellen* in endlicher oder unendlicher Menge besitzt, ein für allemal annehmen wollen, daß Zähler und Nenner *keine gemeinsamen* Nullstellen haben. Unter dieser Voraussetzung ist jede Nullstelle des Nenners ein *Pol* der entsprechenden Ordnung für den reziproken Wert des Nenners (vgl. § 57, Nr. 2, S. 431), folglich auch für den betreffenden Quotienten. Eine solche gebrochene transzendente Funktion ist also *in jedem endlichen Bereich bis auf (rationale) Pole regulär,* während die Stelle $x = \infty$ für sie stets eine *wesentlich singuläre* sein muß.[1]) Dies ist unmittelbar ersichtlich, wenn der Nenner *unendlich viele Nullstellen* besitzt, da alsdann die Stelle ∞ für die Funktion als *Häufungsstelle* von *Polen* erscheint. Es ergibt sich aber auch für den Fall einer nur *endlichen* Anzahl von *Polen* aus dem Umstande, daß andernfalls die Funktion sich auf eine gebrochene *rationale* reduzieren müßte, bzw. sich von einer solchen nur dadurch unterscheiden könnte, daß Zähler und Nenner mit ein und demselben Faktor von der Form $e^{g(x)}$ multipliziert sind — ein Fall, der in dem vorliegenden Zusammenhange selbstverständlich auszuscheiden hat.

Es wird später gezeigt werden, daß auch umgekehrt eine eindeutige und im Endlichen *bis auf Pole reguläre* analytische Funktion *mit der einzigen wesentlich singulären Stelle* ∞ im Sinne der oben gegebenen De-

1) Bei Anwendung der in Fußnote 2, S. 430 erwähnten Terminologie pflegen solche Funktionen schlechthin als *„meromorphe"* bezeichnet zu werden, was eigentlich nicht korrekt ist, da sie doch nur *im Endlichen meromorph* sind. (Bei *konsequenter* Anwendung einer solchen Terminologe hätte man *ganze* rationale oder transzendente Funktionen schlechthin als *„holomorphe"* zu bezeichnen.)

finition eine *gebrochene transzendente Funktion* ist d. h. als *Quotient* zweier *ganzen* Funktionen, von denen mindestens eine *transzendent* ist, dargestellt werden kann. Des weiteren wird sich allgemein ergeben, daß eine solche Funktion, ähnlich wie eine gebrochene *rationale* Funktion, in eine (endliche oder im vorliegenden Falle auch unendliche) Reihe von *Partialbrüchen* mit eventuellem Hinzutreten einer additiven ganzen Funktion zerlegt werden kann. An dieser Stelle soll indessen eine solche Zerlegung nur ganz direkt für gewisse aus den elementaren ganzen transzendenten Funktionen $\cos x$, $\sin x$, e^x zusammengesetzte *„elementare" gebrochene transzendente Funktionen* durchgeführt werden.

2. Wir definieren zunächst, genau so wie dies in der Trigonometrie für reelle Werte von x geschieht:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}\left(= i \cdot \frac{e^{2xi}+1}{e^{2xi}-1}\right) \tag{1}$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}\left(= - i \cdot \frac{e^{2xi}-1}{e^{2xi}+1}\right) \tag{2}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}\left(= 2i \cdot \frac{e^{xi}}{e^{2xi}-1}\right) \tag{3}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}\left(= 2 \cdot \frac{e^{xi}}{e^{2xi}+1}\right). \tag{4}$$

Alle vier Funktionen sind periodisch, $\sec x$ und $\operatorname{cosec} x$, geradeso wie $\cos x$ und $\sin x$ mit der Periode 2π, dagegen $\cot x$ und $\operatorname{tang} x$ mit der Periode π, wegen: $\cos(x+\pi) = -\cos x$, $\sin(x+\pi) = -\sin x$. Ferner haben zu *Polen* $\cot x$ und $\operatorname{cosec} x$ die Nullstellen von $\sin x$, also die Stellen $x = \nu\pi$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $\operatorname{tang} x$ und $\sec x$ die Nullstellen von $\cos x$, also die Stellen $x = \frac{2\nu+1}{2}\pi (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Außerdem besitzen sie alle vier die *wesentlich singuläre Stelle* $x = \infty$, und zwar zugleich als Häufungsstelle von Polen. In der Nähe dieser Stelle wird (wie am einfachsten aus der Darstellung durch Exponentialfunktionen erkannt wird) von $\cot x$ und $\operatorname{tang} x$ jeder Wert außer $\pm i$, von $\operatorname{cosec} x$ und $\sec x$ jeder Wert außer 0 unendlich oft angenommen.

Um die Formeln für die Zerlegung in Partialbrüche möglichst einfach zu gestalten, empfiehlt es sich, πx an Stelle von x als Argument einzuführen. Die Darstellung von $\cot \pi x$ durch eine konvergierende Reihe von Partialbrüchen ist schon in Gl. (4) des vorletzten Paragraphen (S. 445) enthalten. Danach ist:

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{2x}{x^2-\nu^2} = \frac{1}{x} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left(\frac{1}{x-\nu} + \frac{1}{x+\nu}\right). \tag{5a}$$

Die Reihe konvergiert nach Ausschluß der Stellen $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ in jedem endlichen Bereiche, etwa für $|x| \leqq R$, *unbedingt* und *gleichmäßig* $\left(\text{wegen: } \left|\frac{2x}{x^2 - \nu^2}\right| \leqq \frac{2R}{\nu^2 - R^2} < \frac{4R}{\nu^2} \text{ für } \nu^2 > 2R^2\right)$, und das nämliche gilt nach Absonderung des einen Gliedes $\frac{1}{x}$ bzw. eines einzelnen Gliedes von der Form $\frac{2x}{x^2 - \nu^2}$ für die übrig bleibende Reihe auch noch an der Stelle $x = 0$ bzw. $x = \pm \nu$ und deren Umgebung, während das abgesonderte Glied die betreffende Stelle als einen *Pol* erster Ordnung charakterisiert[1].

Faßt man im Anschluß an die zweite Schreibweise der Reihe (5a) jeden *einzelnen* der Brüche $\frac{1}{x-\nu}$ und $\frac{1}{x+\nu}$ als ein *Glied* der Reihe auf, so erweist sich die auf der *paarweisen* Zusammenfassung von $\frac{1}{x-\nu}$ und $\frac{1}{x+\nu}$ beruhende Konvergenz lediglich als eine *bedingte*[2]), da ja jede der einzelnen Reihen $\sum \frac{1}{x-\nu}$ und $\sum \frac{1}{x+\nu}$ *divergiert* $\left(\text{wegen: } \frac{1}{x \pm \nu} = \pm \frac{1}{\nu} \mp \frac{x}{\nu(x \pm \nu)}, \text{ s. das folgende}\right)$. Man kann indessen mit Hilfe eines Verfahrens, das sich späterhin als typisch und wichtiger Verallgemeinerung fähig erweisen wird, nämlich durch Hinzufügung gewisser *Zusatzglieder*, die Reihe so umformen, daß sie auch bei *Trennung* der entsprechend abgeänderten Bestandteile $\frac{1}{x-\nu}$ und $\frac{1}{x+\nu}$ *unbedingt* konvergiert. Man hat nämlich identisch:

$$\frac{1}{x-\nu} + \frac{1}{x+\nu} = \left(\frac{1}{x-\nu} + \frac{1}{\nu}\right) + \left(\frac{1}{x+\nu} - \frac{1}{\nu}\right) = \frac{x}{\nu(x-\nu)} - \frac{x}{\nu(x+\nu)}.$$

Dabei bildet jetzt $\frac{x}{\nu(x \pm \nu)}$, wegen $\lim_{\nu \to \infty} \nu^2 \cdot \left|\frac{x}{\nu(x \pm \nu)}\right| = |x|$, das allgemeine Glied einer für jedes nicht ganzzahlige endliche x *unbedingt konvergenten* Reihe[3]). Beachtet man noch, daß:

$$\sum_1^{\infty}{}_{\nu}\left(\frac{1}{x+\nu} - \frac{1}{\nu}\right) = \sum_{-1}^{-\infty}{}_{\nu}\left(\frac{1}{x-\nu} + \frac{1}{\nu}\right), \quad \sum_1^{\infty}{}_{\nu} \frac{x}{\nu(x+\nu)} = -\sum_{-1}^{-\infty}{}_{\nu} \frac{x}{\nu(x-\nu)},$$

so lassen sich, wenn man noch bei den Gliedern mit negativem ν die

---

1) Vgl. auch § 29, Nr. 3 (S. 240),

2) Ganz analog, wie bei dem Sinusprodukt $\prod \left(1 - \frac{x}{\nu}\right)\left(1 + \frac{x}{\nu}\right)$: vgl. S. 488, Fußn. 2.

3) Ist x eine ganze Zahl, etwa $x = n$ (wo $n \gtrless 0$), so hat man nur das eine Glied $\frac{x}{n(x-n)}$ (als für $x = n$ unendlich werdend) aus der Reihe auszuschließen, um die restierende Reihe konvergent zu machen.

Reihenfolge umkehrt, die beiden in Gl. (5a) angegebenen Reihenformen auch durch die beiden folgenden, in gleichem Umfange *unbedingt* und *gleichmäßig* konvergierenden ersetzen:

$$\text{(5b)} \qquad \pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{\nu} \left(\frac{1}{x-\nu} + \frac{1}{\nu}\right) = \frac{1}{x} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{\nu} \frac{x}{\nu(x-\nu)}$$

(wo wieder der Akzent die Ausschließung des Indexwertes $\nu = 0$. anzeigen soll).

3. In analoger Weise, wie die Reihen (5a) vermöge der Beziehung: $\frac{D_x \sin \pi x}{\sin \pi x} = \pi \cdot \cot \pi x$ sich aus dem Sinusprodukte ergeben haben (vgl. § 64, Nr. 3, S. 489) findet man aus den Beziehungen:

$$-\frac{D_x \cos \pi x}{\cos \pi x} = \pi \operatorname{tang} \pi x \quad \text{und:} \quad \cos \pi x = \prod_0^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{4x^2}{(2\nu+1)^2}\right)^{1)}$$

die Entwicklungsformen:

$$\text{(6a)} \qquad \pi \cdot \operatorname{tang} \pi x = -\sum_0^{\infty}{}_{\nu} \frac{8x}{4x^2 - (2\nu+1)^2}$$

$$= -\sum_0^{\infty}{}_{\nu} \left(\frac{2}{2x-(2\nu+1)} + \frac{2}{2x+(2\nu+1)}\right)^{2)},$$

1) S. 493, Gl. (23).

2) Man hätte auch die Entwicklung von $\operatorname{tang} \pi x$ auf Grund der Beziehung: $\operatorname{tang} \pi x = \cot \pi\left(\frac{1}{2} - x\right)$ aus der zweiten Reihenform (5a) durch die Substitution von $\left(\frac{1}{2} - x\right)$ für x herleiten können. Dabei ergibt sich aber eine durch das Auftreten des isolierten Anfangsgliedes $\frac{1}{\frac{1}{2} - x} = -\frac{1}{2x-1}$ und eine entsprechende Verschiebung der zu Paaren zusammengefaßten Partialbrüche eine von der zweiten Reihenform (6a) abweichende Entwicklung, und es bedarf noch einer Umformung (ähnlich, wie sie etwas weiter unten bei der gleichfalls auf der Substitution $\left(\frac{1}{2} - x\right)$ für x beruhenden Entwicklung von $\sec \pi x$ durchgeführt wird), um schließlich zu (6a) zu gelangen.

Übrigens läßt sich die Partialbruchentwicklung von $\operatorname{tang} \pi x$ aus derjenigen von $\cot \pi x$ auch vermittelst der Formel:

$$\operatorname{tang} x = \cot x - 2 \cot \cdot 2x$$

herleiten, welche letztere sich aus der Beziehung ergibt:

$$\operatorname{tang} x - \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = -2 \cot 2x.$$

deren zweite vermittelst der Zusatzglieder $+\frac{2}{2\nu+1}$ und $-\frac{2}{2\nu+1}$ und der Beziehung:

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{2}{2x+(2\nu+1)} - \frac{2}{2\nu+1} = \sum_{0}^{-\infty}{}_{\nu} \left(\frac{2}{2x-(2\nu-1)} + \frac{2}{2\nu-1}\right)$$

$$= \sum_{-1}^{-\infty}{}_{\nu} \left(\frac{2}{2x-(2\nu+1)} + \frac{2}{2\nu+1}\right)$$

die Umformung liefert:

$$\text{(6b)} \qquad \pi \operatorname{tang} \pi x = -\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} \left(\frac{1}{x-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{\nu+\frac{1}{2}}\right)$$

$$= -\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} \frac{4x}{(2\nu+1)(2x-(2\nu+1))}.$$

Zur Herleitung der Partialbruchentwicklung von $\operatorname{cosec} \pi x$ geht man am zweckmäßigsten von der Beziehung aus:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(\cot \frac{x}{2} + \operatorname{tang} \frac{x}{2}\right).$$

Benutzt man die zweite der Reihenformen in Gl. (5a) und (6a), so ergibt sich zunächst:

$$\pi \operatorname{cosec} \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(\frac{1}{x-2\nu} + \frac{1}{x+2\nu}\right) - \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \left(\frac{1}{x-(2\nu+1)} + \frac{1}{x+(2\nu+1)}\right),$$

kürzer geschrieben:

$$\text{(7a)} \quad \pi \operatorname{cosec} \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} (-1)^{\nu} \left(\frac{1}{x-\nu} + \frac{1}{x+\nu}\right) = \frac{1}{x} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} (-1)^{\nu} \cdot \frac{2x}{x^2-\nu^2}.$$

Von der ersten dieser Reihenformen ausgehend gelangt man durch genau dasselbe Verfahren, wie bei der Umformung von (5a) in (5b), zu den folgenden Reihenformen:

$$\text{(7b)} \; \pi \operatorname{cosec} \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{\nu} (-1)^{\nu} \cdot \left(\frac{1}{x-\nu} + \frac{1}{\nu}\right) = \frac{1}{x} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{\nu} (-1)^{\nu} \cdot \frac{x}{\nu(x-\nu)}.$$

Um schließlich die entsprechenden Entwicklungen für $\sec \pi x$ herzustellen, benützen wir die Beziehung $\sec \pi x = \operatorname{cosec} \pi \left(\frac{1}{2} - x\right)$ und finden demgemäß durch Substitution von $\left(\frac{1}{2} - x\right)$ für x in die erste der Reihen (7a):

$$(8\text{a})\quad \pi \sec \pi x = -\frac{2}{2x-1} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}(-1)^{\nu-1}\left(\frac{2}{2x-(2\nu+1)} + \frac{2}{2x+(2\nu-1)}\right)$$

$$= -\frac{2}{2x-1} + \left(\frac{2}{2x+1} + \frac{2}{2x-3}\right) - \left(\frac{2}{2x+3} + \frac{2}{2x-5}\right) + \cdots$$

oder auch, indem man das Schlußglied jeder Klammer mit dem Anfangsgliede der folgenden zusammenfaßt:

$$(8\text{b})\qquad \pi \sec \pi x = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}(-1)^{\nu+1}\left(\frac{2}{2x-(2\nu+1)} - \frac{2}{2x+(2\nu+1)}\right)$$

$$= \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}(-1)^{\nu+1}\cdot\frac{4(2\nu+1)}{4x^2-(2\nu+1)^2}.$$

Dazu ist zu bemerken, daß zwar die Reihe (8a), wie schon aus ihrer Herleitung aus der unbedingt konvergenten Reihe (7a) hervorgeht, *unbedingt*, dagegen die Reihen (8b) nur noch *bedingt* konvergieren (wie die zweite der Reihenformen (8b) unmittelbar erkennen läßt).

Man kann indessen aus (8b) durch Hinzufügung von Zusatzgliedern *unbedingt* konvergierende Entwicklungen herleiten, am zweckmäßigsten in folgender Weise. Setzt man die erste der beiden Reihen (8b) in die Form:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{0}^{n-1}{}_{\nu}(-1)^{\nu-1}\cdot\frac{1}{x-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} + \sum_{1}^{n}{}_{\nu}(-1)^{\nu-1}\cdot\frac{1}{x+\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{-n}^{n-1}{}_{\nu}(-1)^{\nu-1}\cdot\frac{1}{x-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)},$$

so findet man weiter durch Addition und Subtraktion von

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{-n}^{n-1}{}_{\nu}(-1)^{\nu-1}\cdot\frac{1}{\nu+\frac{1}{2}}:$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{-n}^{n-1}{}_{\nu}(-1)^{\nu-1}\cdot\left(\frac{1}{x-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{\nu+\frac{1}{2}}\right) + 2\lim_{n\to\infty}\sum_{-n}^{n-1}{}_{\nu}(-1)^{\nu}\cdot\frac{1}{2\nu+1}.$$

Die *erste* dieser Summen geht für $n\to\infty$ in eine unendliche Reihe über, deren *unbedingte* Konvergenz sofort ersichtlich wird, wenn man die beiden Klammerglieder unter einen Nenner bringt. Für den Grenzwert der *zweiten* ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{-n}^{n-1}{}_{\nu}(-1)^{\nu}\cdot\frac{1}{2\nu+1} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}(-1)^{\nu}\cdot\frac{1}{2\nu+1} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}(-1)^{\nu-1}\cdot\frac{1}{2\nu-1} = \frac{\pi}{2}$$

(s. § 65, Gl. (5), S. 495).

Danach erhält man schließlich:

$$(8c) \qquad \pi \sec \pi x = \pi + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} (-1)^{\nu-1} \left(\frac{1}{x - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{\nu + \frac{1}{2}} \right)$$

$$= \pi + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{4x}{(2\nu+1)(2x-(2\nu+1))}.$$

Die vorstehenden Reihen konvergieren geradeso wie die Reihen für $\pi \cot \pi x$ (Gl. (5a, b)) in jedem endlichen, von den Nullstellen der Nenner befreiten Bereiche *gleichmäßig* und mit Ausnahme der Reihen (8b) auch *unbedingt*.

4. Aus der gleichmäßigen Konvergenz der obigen Partialbruchreihen folgt auf Grund des *Weierstraß*schen Doppelreihensatzes, daß:

$$\cot \pi x - \frac{1}{\pi x}, \quad \operatorname{tang} \pi x, \quad \operatorname{cosec} \pi x - \frac{1}{\pi x}, \quad \sec \pi x,$$

also mittelst Substitution von $\frac{x}{\pi}$ für x auch:

$$\cot x - \frac{1}{x}, \quad \operatorname{tang} x, \quad \operatorname{cosec} x - \frac{1}{x}, \quad \sec x$$

sich in Reihen nach positiven Potenzen von x entwickeln lassen, deren Konvergenzkreise um den Nullpunkt sich bis zur nächsten singulären Stelle d. h. bis zur nächstgelegenen Nullstelle der Partialbruchnenner erstrecken.

Die Reihe für $\cot x$ ist bereits in Gl. (6) und (9) des vorigen Paragraphen (S. 501) enthalten, nämlich:

$$(9) \quad \frac{1}{x} - 2\sum_{1}^{\infty}{}^{\lambda} \frac{1}{\pi^{2\lambda}} \cdot S_{2\lambda} x^{2\lambda-1} = \cot x = \frac{1}{x} - \sum_{1}^{\infty}{}^{\lambda} \frac{2^{2\lambda}}{(2\lambda)!} B_\lambda x^{2\lambda-1} \quad (|x| < \pi).$$

Die entsprechende Entwicklung für $\operatorname{tang} x$ läßt sich hieraus am einfachsten mit Hilfe der am Schlusse von Fußn. 2, S. 508 bereits angeführten Formel:

$$\operatorname{tang} x = \cot x - 2 \cot 2x$$

herleiten. Man findet auf diese Weise:

$$(10a) \quad 2\sum_{1}^{\infty}{}^{\lambda} \frac{2^{2\lambda}-1}{\pi^{2\lambda}} \cdot S_{2\lambda} x^{2\lambda-1} = \operatorname{tang} x = \sum_{1}^{\infty}{}^{\lambda} \frac{2^{2\lambda}(2^{2\lambda}-1)}{(2\lambda)!} B_\lambda x^{2\lambda-1} \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right)$$

oder auch mit Benutzung von Gl. (16) des vorigen Paragraphen (S. 503):

$$(10b) \qquad \operatorname{tang} x = \sum_{1}^{\infty}{}^{\lambda} \frac{2^{2\lambda+1}}{\pi^{2\lambda}} s_{2\lambda} x^{2\lambda-1} = \frac{4}{\pi} \sum_{1}^{\infty}{}^{\lambda} s_{2\lambda} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{2\lambda-1}.$$

Diese Reihen nehmen die besonders zweckmäßige Form an:

$$\text{(10c)} \qquad \operatorname{tang} x = \sum_1^\infty{}^\lambda \frac{1}{(2\lambda-1)!}\, T_\lambda x^{2\lambda-1},$$

wenn gesetzt wird:

$$\text{(11)} \qquad T_\lambda = \frac{1}{\lambda}\cdot 2^{2\lambda-1}(2^{2\lambda}-1)\cdot B_\lambda = (2\lambda-1)!\,\frac{2^{2\lambda+1}}{\pi^{2\lambda}}\cdot s_{2\lambda}.$$

Die gewöhnlich schlechthin als *Tangentenkoeffizienten* bezeichneten Zahlen T_λ (dabei ist offenbar $T_\lambda = \operatorname{tang}^{(2\lambda-1)}(0)$) sind dann *ganze positive* Zahlen, wie sich folgendermaßen zeigen läßt. Multipliziert man Gl. (10c) mit $\cos x$ und setzt für $\cos x$, $\sin x$ die entsprechenden Potenzreihen ein, so folgt:

$$\sum_1^\infty{}^\lambda (-1)^{\lambda-1}\cdot\frac{1}{(2\lambda-1)!}\,x^{2\lambda-1} = \sum_1^\infty{}^\lambda \frac{1}{(2\lambda-1)!}\cdot T_\lambda x^{2\lambda-1}\cdot\sum_0^\infty{}^\lambda (-1)^\lambda\frac{1}{(2\lambda)!}\cdot x^{2\lambda}$$

und hieraus gewinnt man durch Vergleichung der Koeffizienten von $x^{2\lambda-1}$ und Multiplikation mit $(2\lambda-1)!$ die Rekursionsformel[1]):

$$\text{(12)} \quad T_\lambda - (2\lambda-1)_2 T_{\lambda-1} + (2\lambda-1)_4 T_{\lambda-2} - \cdots + (-1)^{\lambda-1}(2\lambda-1)_{2\lambda-2} T_1 = (-1)^{\lambda-1} \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots),$$

welche zeigt, daß T_λ eine *ganze* Zahl ist, falls $T_1, T_2, \ldots, T_{\lambda-1}$ *ganze* Zahlen sind. Da aber $T_1 = 1$, so besteht die fragliche Eigenschaft allgemein. Daß überdies $T_\lambda > 0$ für jedes λ, erkennt man unmittelbar aus der Definitionsgleichung (11). Aus der Rekursionsformel (12) ergibt sich sukzessive:

$$\text{(12a)} \quad T_1 = 1,\; T_2 = 2,\; T_3 = 16,\; T_4 = 272,\; T_5 = 7936,\; T_6 = 353792, \text{ usf.}$$

Die Zahlen lassen vermuten, daß die T_λ mit wachsendem λ außerordentlich schnell zunehmen, was sich ganz allgemein folgendermaßen bestätigen läßt. Aus der Definitionsgleichung (11) folgt zunächst:

$$\text{(13)} \qquad \frac{T_{\lambda+1}}{T_\lambda} = 2\lambda\cdot(2\lambda+1)\cdot\frac{2^2}{\pi^2}\cdot\frac{s_{2\lambda+2}}{s_{2\lambda}},$$

so daß, wegen: $s_{2\lambda+2} > 1$, $s_{2\lambda} \leqq s_2 = \frac{\pi^2}{8}$ (s. § 66, Gl. (16a), S. 503), sich ergibt:

$$\text{(14)} \qquad \frac{T_{\lambda+1}}{T_\lambda} > \frac{64\lambda(2\lambda+1)}{\pi^4} \qquad (\text{wo: } \pi^4 < 100),$$

---

1) Da nach Gl. (11):

$$B_\lambda = \frac{\lambda}{2^{2\lambda-1}(2^{2\lambda}-1)}\cdot T_\lambda,$$

so liefert Gl. (12) zugleich eine Rekursionsformel zur Berechnung der B_λ, welche mit der in § 66, Gl. (18) (S. 502) angegebenen nicht identisch und für die Berechnung etwas bequemer ist.

also ein gleichzeitig mit λ außerordentlich stark wachsendes Zunahmeverhältnis.

Die Potenzreihe für cosec x läßt sich am einfachsten mit Hilfe der schon bei der Partialbruchentwicklung von cosec x benützten Formel (S. 509):

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{2}\left(\cot\frac{x}{2} + \operatorname{tang}\frac{x}{2}\right)$$

aus den bereits zur Verfügung stehenden Reihen für cot x und tang x ableiten. Man findet mit Benutzung der Gl. (9) und (10a) für $|x| < \pi$:

$$(15) \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{2^{2\lambda-1}-1}{2^{2\lambda-2}\pi^{2\lambda}} \cdot S_{2\lambda} x^{2\lambda-1}$$

$$= \frac{1}{x} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{(2^{2\lambda-1}-1)}{(2\lambda)!} B_{\lambda} x^{2\lambda-1}.$$

5 Um schließlich auch die Potenzreihe für sec x herzustellen, gehen wir aus von der Partialbruchentwicklung (8c), also:

$$\pi \cdot \sec \pi x = \pi + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} (-1)^{\nu-1} \left(\frac{1}{x-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{\nu+\frac{1}{2}}\right).$$

Da sodann für $|x| < \frac{1}{2}$ und $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ die Entwicklungen bestehen:

$$\frac{1}{x-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{\nu+\frac{1}{2}} = -\frac{2}{2\nu+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{2x}{2\nu+1}} + \frac{2}{2\nu+1}$$

$$= -\sum_{1}^{\infty}{}_{\varkappa} \left(\frac{2}{2\nu+1}\right)^{\nu+1} \cdot x^{\varkappa},$$

so wird zunächst:

$$(16) \qquad \pi \sec \pi x = \pi + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} (-1)^{\nu} \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_{\varkappa} \left(\frac{2}{2\nu+1}\right)^{\varkappa+1} \cdot x^{\varkappa}$$

$$= \pi + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} 2^{\varkappa+1} \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^{\varkappa+1}}\right) \cdot x^{\varkappa}$$

Da aber:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^{\varkappa+1}} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^{\varkappa+1}} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{(-2\nu+1)^{\varkappa+1}}$$

$$= \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)^{\varkappa+1}} + (-1)^{\varkappa} \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)^{\varkappa+1}},$$

so folgt:

$$(17)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^{\varkappa+1}} = 0 & \text{bei } \textit{ungeradem } \varkappa, \\ \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^{\varkappa+1}} = 2 s'_{\varkappa+1} & \text{bei } \textit{geradem } \varkappa \text{ (inkl. } \varkappa = 0), \end{cases}$$

wenn $s'_\varkappa$ für jedes ganzzahlige $\varkappa \geqq 1$ definiert wird durch die Gleichung:

$$(18)\qquad s'_\varkappa = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)^{\varkappa}}.$$

Diese Reihe konvergiert *unbedingt* sobald $\varkappa > 1$. Für $\varkappa = 1$ geht sie in die lediglich *bedingt* konvergierende *Leibniz*sche Reihe (s. § 65, Gl. (5), S. 495) über, so daß also:

$$(19)\qquad s'_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Mit Benutzung der Gl. (17) und (19) liefert jetzt Gl. (16) für $\sec \pi x$ die folgende Potenzreihe:

$$(20)\qquad \pi \cdot \sec \pi x = \pi + \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} 2^{2\lambda+2} \cdot s'_{2\lambda+1} x^{2\lambda}$$
$$= \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} 2^{2\lambda+2} \cdot s'_{2\lambda+1} x^{2\lambda} \quad \left(|x| < \frac{1}{2}\right)$$

und, wenn man schließlich noch x durch $\frac{x}{\pi}$ ersetzt:

$$(21)\qquad \sec x = 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} 2^{2\lambda+2} \cdot \frac{s'_{2\lambda+1}}{\pi^{2\lambda+1}} \cdot x^{2\lambda}$$
$$= \frac{4}{\pi} \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} s'_{2\lambda+1} \cdot \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{2\lambda} \cdot \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Bezüglich der Reihensummen $s'_\varkappa$ folgt zunächst aus ihrer Definitionsgleichung (18), daß für jedes $\varkappa \geqq 1$:

$$(22)\qquad 1 - \frac{1}{3^\varkappa} < s'_\varkappa < 1 - \frac{1}{3^\varkappa} + \frac{1}{5^\varkappa},$$

also insbesondere

$$(23)\qquad s'_\varkappa < 1 \text{ für jedes } \varkappa \geqq 1, \quad \lim_{\varkappa \to \infty} s'_\varkappa = 1.$$

Ferner ergibt sich:

$$(24)\qquad s'_{\varkappa+1} - s'_\varkappa = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} (-1)^{\nu-1} \cdot \left\{\frac{1}{(2\nu-1)^{\varkappa+1}} - \frac{1}{(2\nu-1)^{\varkappa}}\right\}$$
$$= 2 \sum_{2}^{\infty}{}_{\nu} (-1)^{\nu} \cdot \frac{\nu-1}{(2\nu-1)^{\varkappa+1}}.$$

Die mit alternierenden Vorzeichen behafteten Glieder der letzten Reihe nehmen (unter der gemachten Voraussetzung $\varkappa \geqq 1$) mit wachsendem ν numerisch beständig ab. Man hat nämlich:

$$\frac{\nu-1}{(2\nu-1)^{\varkappa+1}} > \frac{\nu}{(2\nu+1)^{\varkappa+1}} \text{ wegen: } \left(\frac{2\nu+1}{2\nu-1}\right)^{\varkappa+1} \geqq \left(\frac{2\nu+1}{2\nu-1}\right)^2 > \frac{\nu}{\nu-1} \text{ für } \nu \geqq 2.$$

Da aber die Reihe mit einem positiven Gliede beginnt, so folgt, daß:

$$(25) \qquad s'_{\varkappa+1} - s'_\varkappa > 0,$$

d. h. die Folge der Zahlen $s'_\varkappa$ nimmt mit wachsendem $\varkappa$ *beständig zu* (nämlich nach Gl. (19) und (23) mit $s'_1 = \frac{\pi}{4} = 0{,}785\ldots$ beginnend dem Grenzwerte 1 zustrebend).

6. Es läßt sich nun weiter zeigen, daß ähnlich, wie die Reihensummen $S_{2\lambda}$ sich als *rationale Multipla* von $\pi^{2\lambda}$ ergaben, die $s'_{2\lambda+1}$ sich durch *rationale Multipla* von $\pi^{2\lambda+1}$ ausdrücken lassen (während hier für die $s'_{2\lambda}$ geradesowenig irgendwelche nähere Angaben gemacht werden können, wie dort für die $S_{2\lambda+1}$).

Um dieses Ergebnis abzuleiten, hat man lediglich neben der in Gl. (21) enthaltenen Entwicklung von $\sec x$ nach positiven Potenzen von x noch eine andere Form der Koeffizientenbestimmung für diese Entwicklung aufzusuchen, wobei wir uns der Methode der unbestimmten Koeffizienten bedienen. Wir setzen also, da ja die Form der Entwicklung als einer solchen mit ausschließlich *geraden* Potenzen und dem Anfangsgliede 1 nach Gl. (21) bereits feststeht (übrigens auch ohne weiteres aus der Natur von $\sec x \equiv \frac{1}{\cos x}$ gefolgert werden könnte):

$$(26) \qquad \sec x = 1 + \sum_1^\infty{}^\lambda a_\lambda x^{2\lambda}$$

und multiplizieren, um eine Rekursionsformel für die unbekannten Koeffizienten a_λ zu erhalten, diese Gleichung mit der folgenden:

$$\cos x = 1 + \sum_1^\infty{}^\lambda (-1)^\lambda \cdot \frac{1}{(2\lambda)!} \cdot x^{2\lambda},$$

so daß sich nach Vertauschung der beiden Seiten der resultierenden Gleichung ergibt:

$$(27) \qquad \left(1 + \sum_1^\infty{}^\lambda a_\lambda x^{2\lambda}\right)\left(1 + \sum_1^\infty{}^\lambda (-1)^\lambda \cdot \frac{1}{(2\lambda)!} x^{2\lambda}\right) = 1.$$

Führt man die Reihenmultiplikation nach der *Cauchy*schen Regel aus, so

ergibt sich für den Koeffizienten von $x^{2\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, 3, \ldots$) die Beziehung:

$$(28)\quad a_\lambda - \frac{1}{2!}a_{\lambda-1} + \frac{1}{4!}a_{\lambda-2} - \cdots + (-1)^{\lambda-1}\frac{1}{(2\lambda-2)!}a_1 + (-1)^\lambda \frac{1}{(2\lambda)!} = 0.$$

Diese Rekursionsformel nimmt eine noch etwas zweckmäßigere Form an, wenn man statt der Zahlen $a_\lambda, a_{\lambda-1}, \ldots, a_1$ neue Zahlen $E_\lambda, E_{\lambda-1}, \ldots, E_1$ einführt, indem man setzt:

$$(29)\qquad a_\lambda = \frac{E_\lambda}{(2\lambda)!} \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

Hierdurch geht die Rekursionsformel (28), wenn man sie noch mit $(2\lambda)!$ multipliziert, in die folgende über (für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$):

$$(30)\quad E_\lambda - (2\lambda)_2 E_{\lambda-1} + (2\lambda)_4 E_{\lambda-2} - \cdots + (-1)^{\lambda-1}(2\lambda)_{2\lambda-2}E_1 = (-1)^{\lambda-1},$$

welche zeigt, daß E_λ eine *ganze* Zahl, wenn das gleiche für $E_{\lambda-1}, E_{\lambda-2}, \ldots, E_1$ gilt Da aber aus (30) für $\lambda = 1$ folgt: $E_1 = 1$, so besteht die Ganzzahligkeit von E_λ für jedes λ. Daß überdies die E_λ als Entwicklungskoeffizienten von $\sec x$ durchweg *positiv* sind, zeigt die Vergleichung mit der früheren Entwicklungsform (21).

Diese *ganzen positiven* Zahlen E_λ werden als *Sekantenkoeffizienten*, häufiger noch als *Eulersche Zahlen* bezeichnet. Aus der Rekursionsformel (30) findet man sukzessive:

$$(30\text{a})\qquad E_1 = 1,\ E_2 = 5,\ E_3 = 61,\ E_4 = 1385,\ E_5 = 50521,\ E_6 = 2702765, \text{ usf.}$$

Führt man die Zahlen E_λ auf Grund von Gl. (29) als Koeffizienten in die Entwicklung (26) ein, so wird:

$$(31)\qquad \sec x = 1 + \sum_1^\infty{}^\lambda \frac{1}{(2\lambda)!}E_\lambda \cdot x^{2\lambda} \qquad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right)$$

und die Vergleichung mit der früher gefundenen Entwicklung (21) zeigt, daß:

$$(32)\qquad s'_{2\lambda+1} = \frac{E_\lambda}{2^{2\lambda+2}\cdot(2\lambda)!}\cdot \pi^{2\lambda+1} \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots),$$

also:

$$(32\text{a})\qquad s'_3 = \frac{\pi^3}{32},\ s'_5 = \frac{5\pi^5}{1536},\ s'_7 = \frac{61\pi^7}{92160},\ s'_9 = \frac{277\pi^9}{4128768}, \text{ usf.}$$

Die aus Gl. (32) hervorgehende Beziehung:

$$(33)\qquad \frac{E_{\lambda+1}}{E_\lambda} = \frac{4(2\lambda+1)(2\lambda+2)}{\pi^2}\cdot\frac{s'_{2\lambda+3}}{s'_{2\lambda+1}} > \frac{2(\lambda+1)(2\lambda+1)}{\pi}$$

(wegen: $s'_{2\lambda+1} < 1$, $s'_{2\lambda+3} > s'_1 = \frac{\pi}{4}$) läßt erkennen, daß die Eulerschen *Zahlen E_λ beständig,* und zwar *außerordentlich schnell* zunehmen.

7. Durch die Einführung der als *positiv*, *ganzzahlig* und *monoton zunehmend* erkannten *Tangenten-* und *Sekantenkoeffizienten* T_λ und E_λ haben nicht nur die Potenzreihen (10c) und (31) für die *ungerade* Funktion $\operatorname{tang} x$ und die *gerade* Funktion $\sec x$ völlig gleichartige Form angenommen, sondern auch die zur Bestimmung der T_λ und E_λ dienlichen Rekursionsformeln (12) und (30) unterscheiden sich bei sonst vollkommen übereinstimmendem Bau nur dadurch, daß in der ersten wiederum nur *ungerade* Zahlen genau dieselbe Rolle spielen, wie *gerade* Zahlen in der zweiten. Setzt man, um dies noch deutlicher zum Ausdruck zu bringen:

$$(34) \qquad T_\lambda = \tau_{2\lambda-1}, \quad E_\lambda = \tau_{2\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots),$$

so gehen jene beiden Rekursionsformeln in die folgenden über:

$$\tau_{2\lambda-1} - (2\lambda-1)_2 \cdot \tau_{2\lambda-3} + (2\lambda-1)_4 \cdot \tau_{2\lambda-5} - \cdots + (-1)^{\lambda-1}(2\lambda-1)_{2\lambda-2} \cdot \tau_1 = (-1)^{\lambda-1}$$

$$\tau_{2\lambda} - (2\lambda)_2 \cdot \tau_{2\lambda-2} + (2\lambda)_4 \cdot \tau_{2\lambda-4} - \cdots + (-1)^{\lambda-1}(2\lambda)_{2\lambda-2} \cdot \tau_2 = (-1)^{\lambda-1}$$

und lassen sich in die gemeinsame Form bringen:

$$(35) \quad \tau_\mu - (\mu)_2 \cdot \tau_{\mu-2} + (\mu)_4 \cdot \tau_{\mu-4} - \cdots + (-1)^{\mu'} \cdot (\mu)_{2\mu'} \cdot \tau_{\mu-2\mu'} = (-1)^{\mu'} \quad (\mu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo μ' die größte in $\frac{\mu-1}{2}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet $\left(\text{in Zeichen: } \mu' = \left[\frac{\mu-1}{2}\right]\right)$, also: $\mu' = \lambda - 1$, gleichgültig ob $\mu = 2\lambda - 1$ oder $\mu = 2\lambda$.

Während die Formel (35) stets nur solche τ_μ mit *ungeradem* oder nur solche mit *geradem* Index (also lauter T_λ oder lauter E_λ) enthält, so lassen sich durch Kombination von $\operatorname{tang} x$ und $\sec x$ auch Reihenentwicklungen und Rekursionsformeln herstellen, in denen alle möglichen τ_μ der Reihe nach vorkommen. Man hat z. B:

$$\operatorname{tang}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$$
$$= \sec x + \operatorname{tang} x,$$

so daß mit Benutzung der Reihenentwicklungen (10c) und (31), sowie der Gleichungen (34) sich ergibt:

$$(36) \qquad \operatorname{tang}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sum_1^\infty {}_\mu \frac{1}{\mu!} \cdot \tau_\mu x^\mu .$$

Man könnte nun gerade so, wie diese letzte Beziehung unmittelbar durch Addition der Reihen für $\sec x$ und $\operatorname{tang} x$ sich ergeben hat, eine alle möglichen τ_μ enthaltende Rekursionsformel aus der Gleichung (35)

dadurch herleiten, daß man die durch Substitution von $\mu - 1$ für μ daraus hervorgehende zu ihr addiert. Die so entstehende, zwar alle Glieder $\tau_\mu, \tau_{\mu-1}, \ldots \tau_1$ enthaltende Formel würde jedoch insofern ihre dualistische Herkunft nicht verleugnen können, als in bezug auf die Folge der Binomialkoeffizienten noch keine *vollständige* Regelmäßigkeit herrscht, vielmehr je zwei konsekutive, also zu *verschiedenen* Indices gehörende Glieder Binomialkoeffizienten mit *verschiedenem* Argument und *demselben* geraden Index aufweisen. Es läßt sich indessen in unmittelbarem Anschluß an Gl. (36) eine andere, im übrigen ganz ähnlich gebaute Rekursionsformel ableiten, welche von dieser Unvollkommenheit frei ist.

Man hat nämlich $\left(\text{wegen: } \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}\right)$:

$$\operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}} = \frac{1+\cos x+\sin x}{1+\cos x-\sin x}.$$

Durch Einsetzen des letzten Ausdrucks in die Gl. (36) geht sie nach Multiplikation mit $1 + \cos x - \sin x$ in die folgende über:

$$1+\cos x+\sin x = (1+\cos x-\sin x)\left(1+\sum_1^\infty{}^{\mu}\,\frac{1}{\mu!}\tau_\mu x^\mu\right),$$

also, wenn man $\cos x$ und $\sin x$ durch ihre Reihenentwicklungen ersetzt und die beiden Seiten der Gleichung vertauscht:

$$(37)\qquad \left(2+\sum_1^\infty{}^{\mu}(-1)^{\left[\frac{\mu+1}{2}\right]}\frac{1}{\mu!}x^\mu\right)\left(1+\sum_1^\infty{}^{\mu}\frac{1}{\mu!}\tau_\mu x^\mu\right) = 2+\sum_1^\infty{}^{\mu}(-1)^{\left[\frac{\mu}{2}\right]}\frac{1}{\mu!}x^\mu$$

Daraus ergibt sich durch Vergleichung des Koeffizienten von x^μ die gesuchte Rekursionsformel:

$$(38)\quad 2\tau_\mu-(\mu)_1\tau_{\mu-1}-(\mu)_2\tau_{\mu-2}+\cdots+(-1)^{\left[\frac{\mu-1}{2}\right]}(\mu)_{\mu-2}\tau_2+(-1)^{\left[\frac{\mu}{2}\right]}(\mu)_{\mu-1}\tau_1 = (-1)^{\left[\frac{\mu}{2}\right]}+(-1)^{\left[\frac{\mu-1}{2}\right]}.$$

Infolge des in den vorstehenden Entwicklungen zu Tage tretenden durchaus einheitlichen Charakters der *Tangentenkoeffizienten* T_λ und der *Sekantenkoeffizienten (Eulerschen Zahlen)* E_λ findet man bei verschiedenen

Autoren *beide* Arten von Zahlen mit demselben Buchstaben bezeichnet, teilweise wie hier durch $\tau_{2\lambda-1}$, $\tau_{2\lambda}$ (s. Gl. (34)), sonst auch — weniger passend — die E_λ mit $B_{2\lambda}$, dagegen *unsere* B_λ (also gewisse rationale Multipla der T_λ: s. Gl. (11), S. 512) mit $B_{2\lambda-1}$.

8. Die in Nr. 2—6 abgeleiteten Partialbruch- und Potenzreihen für die gebrochenen trigonometrischen Funktionen gehen durch Substitution von $\frac{x}{2\pi i}$ bzw. $\frac{x}{2i}$ für x in die entsprechenden Entwicklungen von Funktionen über, deren Nenner sich dann zweckmäßiger in die Form $1 \pm e^x$ setzen läßt. Man hat (s. Gl. (1), (2)):

$$\cot\frac{x}{2i} = i \cdot \frac{e^x+1}{e^x-1} = i \cdot \left\{\frac{2}{e^x-1} + 1\right\}$$

$$\operatorname{tang}\frac{x}{2i} = -i \cdot \frac{e^x-1}{e^x+1} = i \cdot \left\{\frac{2}{e^x+1} - 1\right\},$$

so daß aus den Formeln (5a) und (6a) (S. 506/8) durch Substitution von $\frac{x}{2\pi i}$ an Stelle von x die folgenden Partialbruchentwicklungen hervorgehen:

$$\frac{1}{e^x-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x} + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{2x}{x^2+4\nu^2\pi^2} \tag{39}$$

$$\frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{2} - \sum_1^\infty{}_\nu \frac{2x}{x^2+(2\nu+1)^2\pi^2}. \tag{40}$$

Ebenso ergeben sich aus den Formeln (9) und (10a, c), wenn man x durch $\frac{x}{2i}$ ersetzt, die Potenzreihenentwicklungen:

$$\frac{1}{e^x-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \sum_1^\infty{}_\lambda (-1)^\lambda \cdot \frac{1}{(2\lambda)!} B_\lambda x^{2\lambda-1} \qquad (|x| < 2\pi) \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^x+1} &= \frac{1}{2} + \sum_1^\infty{}_\lambda (-1)^\lambda \cdot \frac{2^{2\lambda}-1}{(2\lambda)!} B_\lambda x^{2\lambda-1} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_1^\infty{}_\lambda (-1)^\lambda \cdot \frac{1}{2^{2\lambda}(2\lambda-1)!} \cdot T_\lambda x^{2\lambda-1} \qquad (|x| < \pi).\end{aligned} \tag{42}$$

§ 68. Independente Darstellung der Tangentenkoeffizienten bzw. der *Bernoulli*schen Zahlen. — Darstellung von $\sum_1^n{}_\nu \nu^\varkappa$ als Funktion von n mit Hilfe der *Bernoulli*schen Zahlen.

1. Da die *Bernoulli*schen Zahlen, wie bereits bemerkt, in zahlreichen analytischen Entwicklungen (bestimmte Integrale, *Euler-Mac Laurin*sche Summenformel, halbkonvergente Reihen) Anwendung finden, so erscheint

es zweckmäßig, neben den früher mitgeteilten Rekursionsformeln (s. § 66, Gl. (13), S. 502 und § 67, Gl. (12) nebst Fußn. 1, S. 512) auch eine Formel zur independenten Darstellung von B_λ herzustellen. Nun liefert ja jede (wie die vorliegenden) *lineare* Rekursionsformel ein System linearer Gleichungen zur Bestimmung der betreffenden Unbekannten, hier B_λ, und damit nach bekannter Methode diese Unbekannte selbst als Determinantenquotienten, dessen Nenner sich sogar allemal auf das Diagonalglied reduziert (als eine Determinante, die rechts von der Diagonale lauter Nullen enthält: vgl. § 25, Gl. (12), S. 204 und § 41, Gl. (12), S. 311). Dagegen ist die Zählerdeterminante zunächst doch lediglich ein Symbol, das weiterer Ausrechnung bedarf, sofern als das eigentliche Ziel die Zurückführung der Berechnung auf die bloße Anwendung der vier Spezies angesehen wird. Wir wollen daher hier einen anderen Weg einschlagen, der auf der einfachen Tatsache beruht, daß der Koeffizient von x^λ irgendeiner Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ mit $\frac{1}{\lambda!}\mathfrak{P}^{(\lambda)}(0)$ identisch ist.

2. Für die Durchführung dieser Methode erweist es sich als zweckmäßig, zunächst nicht die B_λ, sondern die von diesen nur um einen bestimmten rationalen Faktor verschiedenen T_λ (vgl. S. 512, Gl. (11)) zugrunde zu legen und hierbei auszugehen von der Entwicklung (Gl. (42) des vorigen Paragraphen):

$$(1) \qquad \frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} (-1)^\lambda \cdot \frac{1}{2^{2\lambda}(2\lambda-1)!} \cdot T_\lambda x^{2\lambda-1},$$

welche die Beziehung liefert:

$$(2) \qquad (-1)^\lambda \cdot T_\lambda = 2^{2\lambda}\left(D_x^{2\lambda-1}\frac{1}{e^x+1}\right)_{x=0}.$$

Durch Anwendung der Derivationsregel für Quotienten (s. § 43, Gl. (18), S. 327) findet man sukzessive:

$$D_x\frac{1}{e^x+1} = \frac{-e^x}{(e^x+1)^2}, \quad D_x^2\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{2x}-e^x}{(e^x+1)^3},$$
$$D_x^3\frac{1}{e^x+1} = \frac{-e^{3x}+4e^{2x}-e^x}{(e^x+1)^4}, \quad \ldots$$

und (wie sich leicht durch vollständige Induktion bestätigen läßt) allgemein:

$$(3) \qquad D_x^{2\lambda-1}\frac{1}{e^x+1} = \frac{a_1 e^{(2\lambda-1)x} + a_2 e^{(2\lambda-2)x} + \cdots + a_{2\lambda-1}e^x}{(e^x+1)^{2\lambda}},$$

wo $a_1, a_2, \ldots a_{2\lambda-1}$ noch zu bestimmende ganze Zahlen bedeuten. Man erkennt zunächst, daß die zum Anfang und zum Ende des obigen Ausdrucks symmetrisch liegenden $a_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots 2\lambda-1)$ einander *gleich*

sein müssen. Da nämlich die Entwicklung von $\frac{1}{e^x+1}$ (s. Gl. (1)) nur *ungerade* Potenzen von x enthält, so kann jede Derivierte von *ungerader* Ordnung nur *gerade* Potenzen von x enthalten, bleibt also bei Vertauschung von x mit $(-x)$ ungeändert. Infolgedessen muß neben der Gleichung (3) auch die folgende bestehen:

$$D_x^{2\lambda-1}\frac{1}{e^x+1}=\frac{a_1e^{-(2\lambda-1)x}+a_2e^{-(2\lambda-2)x}+\cdots+a_{2\lambda-1}e^{-x}}{(e^{-x}+1)^{2\lambda}}$$
$$=\frac{a_{2\lambda-1}e^{(2\lambda-1)x}+a_{2\lambda-2}e^{(2\lambda-2)x}+\cdots+a_1e^{+x}}{(e^x+1)^{2\lambda}},$$

so daß durch Vergleichung mit (3) sich ergibt:

$$(4)\qquad a_{2\lambda-\varkappa}=a_\varkappa\qquad(\varkappa=1,2,\ldots\lambda)$$

und die Gleichung (3) durch die folgende einfachere ersetzt werden kann:

$$(5)\qquad (e^x+1)^{2\lambda}\cdot D_x^{2\lambda-1}\frac{1}{e^x+1}=\sum_1^{\lambda-1}{}_\varkappa\, a_\varkappa\left(e^{(2\lambda-\varkappa)x}+e^{\varkappa x}\right)+a_\lambda e^{\lambda x}.$$

Zur weiteren Bestimmung der Koeffizienten $a_\varkappa(\varkappa=1,2,\ldots\lambda)$ benutzen wir die Bemerkung, daß unter der Voraussetzung $|e^{-x}|<1$ (also: $\Re(x)>0$) die Entwicklung besteht:

$$\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\sum_1^\infty{}_\nu(-1)^{\nu-1}e^{-\nu x},$$

und daß daher:

$$(6)\qquad D_x^{2\lambda-1}\frac{1}{e^x+1}=\sum_1^\infty{}_\varkappa(-1)^\varkappa\varkappa^{2\lambda-1}e^{-\varkappa x}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit der folgenden:

$$(e^x+1)^{2\lambda}=\sum_0^{2\lambda}{}_\varkappa(2\lambda)_\varkappa e^{(2\lambda-\varkappa)x},$$

so ergibt sich mit Berücksichtigung von Gl. (5) die Beziehung:

$$\sum_1^{\lambda-1}{}_\varkappa\, a_\varkappa\left(e^{(2\lambda-\varkappa)x}+e^{\varkappa x}\right)+a_\lambda e^{\lambda x}=\sum_0^{2\lambda}{}_\varkappa(2\lambda)_\varkappa e^{(2\lambda-\varkappa)x}\cdot\sum_1^\infty{}_\varkappa(-1)^\varkappa\varkappa^{2\lambda-1}e^{-\varkappa x},$$

und hieraus findet man als Koeffizienten von $e^{(2\lambda-1)x}$ bzw. von $e^{(2\lambda-\varkappa)x}$ (für $\varkappa=2,3,\ldots\lambda$):

$$(7)\begin{cases}a_1=-(2\lambda)_0=-1\\ a_\varkappa=(-1)^\varkappa\{(2\lambda)_0\varkappa^{2\lambda-1}-(2\lambda)_1(\varkappa-1)^{2\lambda-1}+(2\lambda)_2(\varkappa-2)^{2\lambda-1}-\cdots\\ \qquad\cdot+(-1)^{\varkappa-1}(2\lambda)_{\varkappa-1}1^{2\lambda-1}\}.\end{cases}$$

Andererseits liefert Gl. (5) durch Einsetzen von $x = 0$ den Ausdruck:

$$(8) \qquad 2^{2\lambda}\left(D_x^{2\lambda-1}\frac{1}{e^x+1}\right)_{x=0} = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{\lambda-1}) + a_\lambda,$$

so daß aus Gl. (2) mit Benutzung von (7) und (8) die folgende Formel zur Berechnung von T_λ hervorgeht:

$$\begin{aligned}(9) \quad (-1)^\lambda \cdot T_\lambda = & -2 + 2(2^{2\lambda-1} - (2\lambda)_1 1^{2\lambda-1}) \\ & - 2(3^{2\lambda-1} - (2\lambda)_1 2^{2\lambda-1} + (2\lambda)_2 1^{2\lambda-1}) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (-1)^{\lambda-1} 2((\lambda-1)^{2\lambda-1} - (2\lambda)_1(\lambda-2)^{2\lambda-1} + \cdots \\ & \qquad + (-1)^{\lambda-2}(2\lambda)_{\lambda-2} 1^{2\lambda-1}) \\ & + (-1)^\lambda(\lambda^{2\lambda-1} - (2\lambda)_1(\lambda-1)^{2\lambda-1} + \cdots \\ & \qquad + (-1)^{\lambda-2}(2\lambda)_{\lambda-2} 2^{2\lambda-1} + (-1)^{\lambda-1}(2\lambda)_{\lambda-1} 1^{2\lambda-1}).\end{aligned}$$

Faßt man jedesmal alle Glieder zusammen, welche einen der Faktoren $\lambda^{2\lambda-1}$, $(\lambda-1)^{2\lambda-1}$, $\ldots 2^{2\lambda-1}$, $1^{2\lambda-1}$ gemein haben, so nimmt die letzte Gleichung nach Multiplikation mit $(-1)^\lambda$ und unter Hinweis auf die zwischen den T_λ und B_λ bestehende Beziehung (vgl. § 67, Gl. (11), S. 512) die folgende Endform an:

$$\begin{aligned}(10) \qquad T_\lambda = & \frac{2^{2\lambda-1}(2^\lambda-1)}{\lambda} \cdot B_\lambda \\ = \lambda^{2\lambda-1} & - 2(1 + \tfrac{1}{2}(2\lambda)_1) \cdot (\lambda-1)^{2\lambda-1} \\ & + 2(1 + (2\lambda)_1 + \tfrac{1}{2}(2\lambda)_2) \cdot (\lambda-2)^{2\lambda-1} \\ & - 2(1 + (2\lambda)_1 + (2\lambda)_2 + \tfrac{1}{2}(2\lambda)_3) \cdot (\lambda-3)^{2\lambda-1} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (-1)^\lambda 2(1 + (2\lambda)_1 + (2\lambda)_2 + \cdots + (2\lambda)_{\lambda-2} + \tfrac{1}{2}(2\lambda)_{\lambda-1}) \cdot 1^{2\lambda-1}.\end{aligned}$$

3. Die *Bernoulli*schen Zahlen B_λ wurden in § 66, Nr. 1 (S. 501) von uns eingeführt auf Grund ihrer Beziehung zu den $S_{2\lambda}$, d. h. zu den *Potenzsummen der natürlichen Zahlen* mit *negativem* (übrigens geradzahligem) *Exponenten*. Sie stehen aber auch in einer sehr merkwürdigen Beziehung zu den *Potenzsummen einer beliebigen Anzahl konsekutiver natürlicher Zahlen mit positivem ganzzahligem Exponenten,* und zwar war es gerade das Problem, jene Summen als Funktionen ihrer Gliederzahl darzustellen bzw. berechnen zu können[1]), welches *Jacob Bernoulli* den Anlaß zur Einführung der später nach ihm benannten Zahlen gegeben hat. Wegen des historischen, aber auch rein sachlichen Interesses, welches

1) Ähnlich, wie für den Fall des Exponenten 1 die Beziehung besteht:

$$\sum_1^n \nu = \frac{n(n+1)}{2}.$$

das fragliche (der Lehre von den arithmetischen Reihen höherer Ordnung angehörige) Problem beanspruchen darf, wollen wir zeigen, wie dasselbe mit Benutzung der hier vorliegenden Hilfsmittel gelöst werden kann, während seine ursprüngliche Lösung aus arithmetisch-kombinatorischen Betrachtungen hervorgegangen war.

Setzt man:

$$f(x) = \sum_{0}^{n-1}{}_{\nu}\, e^{\nu x}, \tag{11}$$

so ergibt sich:

$$f'(x) = \sum_{1}^{n-1}{}_{\nu}\, \nu \cdot e^{\nu x}, \quad f''(x) = \sum_{1}^{n-1}{}_{\nu}\, \nu^{2} \cdot e^{\nu x}, \quad \cdots f^{(\varkappa)}(x) = \sum_{1}^{n-1}{}_{\nu}\, \nu^{\varkappa} \cdot e^{\nu x}$$

und daher:

$$\sum_{1}^{n-1}{}_{\nu}\, \nu^{\varkappa} \equiv 1^{\varkappa} + 2^{\varkappa} + \cdots + (n-1)^{\varkappa} = f^{(\varkappa)}(0). \tag{12}$$

Um nun $f^{(\varkappa)}(0)$ noch in andrer Weise darzustellen, entwickeln wir $f(x)$ nach Potenzen von x. Man hat zunächst:

$$f(x) = \sum_{0}^{n-1}{}_{\nu}\, (e^{x})^{\nu} = \frac{e^{nx}-1}{e^{x}-1} = \frac{e^{nx}-1}{x} \cdot \frac{x}{e^{x}-1}. \tag{13}$$

Ersetzt man in dem ersten Faktor e^{nx} durch die entsprechende Potenzreihe und benutzt zur Entwicklung des zweiten die aus Gl. (41) des vorigen Paragraphen hervorgehende Beziehung:

$$\frac{x}{e^{x}-1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, (-1)^{\lambda-1} \cdot \frac{1}{(2\lambda)!} \cdot B_{\lambda} x^{2\lambda},$$

so geht die Gleichung (13) in die folgende über:

$$f(x) = \Big(\sum_{0}^{\infty}{}_{\varkappa}\, \frac{n^{\varkappa+1}}{(\varkappa+1)!} \cdot x^{\varkappa}\Big) \cdot \Big(1 - \frac{x}{2} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, (-1)^{\lambda-1} \cdot \frac{1}{(2\lambda)!} B_{\lambda} x^{2\lambda}\Big) \tag{14}$$

und hieraus ergibt sich für den Koeffizienten von $x^{\varkappa}$ die Beziehung:

$$\frac{f^{(\varkappa)}(0)}{\varkappa!} = \frac{n^{\varkappa+1}}{(\varkappa+1)!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{n^{\varkappa}}{\varkappa!} + \frac{n^{\varkappa-1}}{(\varkappa-1)!} \cdot \frac{B_1}{2!} - \frac{n^{\varkappa-3}}{(\varkappa-3)!} \cdot \frac{B_2}{4!} + \cdots \tag{15}$$

$$+ \cdots \begin{cases} + (-1)^{\lambda-1} \cdot \dfrac{n^{1}}{1!} \cdot \dfrac{B_{\lambda}}{(2\lambda)!}, & \text{wenn: } \varkappa = 2\lambda \\ + (-1)^{\lambda-1} \cdot \dfrac{n^{2}}{2!} \cdot \dfrac{B_{\lambda}}{(2\lambda)!}, & \text{wenn: } \varkappa = 2\lambda + 1. \end{cases}$$

Die beiden den Einzelfällen $\varkappa = 2\lambda$ und $\varkappa = 2\lambda + 1$ entsprechenden Formen des Schlußgliedes lassen sich auch folgendermaßen zusammenfassen:

$$(-1)^{\lambda-1} \cdot \frac{n^{\varkappa-2\lambda+1}}{(\varkappa-2\lambda+1)!} \cdot \frac{B_{\lambda}}{(2\lambda)!}, \quad \text{wo: } \lambda = \left[\frac{\varkappa}{2}\right].$$

Mit Benutzung dieser Schreibweise und nach Multiplikation mit $\varkappa!$ nimmt Gl. (15) die Form an:

$$(16)\quad f_\varkappa(0) = \frac{n^{\varkappa+1}}{\varkappa+1} - \frac{1}{2}n^\varkappa + (\varkappa)_1 \cdot n^{\varkappa-1} \cdot \frac{B_1}{2} - (\varkappa)_3 \cdot n^{\varkappa-3} \cdot \frac{B_2}{4} + \cdots$$
$$+ (-1)^{\lambda-1} \cdot (\varkappa)_{2\lambda-1} \cdot n^{\varkappa-2\lambda+1} \cdot \frac{B_\lambda}{2\lambda}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gl. (12) ein und addiert noch auf beiden Seiten das Glied $n^\varkappa$, so ergibt sich schließlich als die gesuchte Formel:

$$(17)\quad \sum_1^n{}_\nu\, \nu^\varkappa = \frac{n^{\varkappa+1}}{\varkappa+1} + \frac{n^\varkappa}{2} + (\varkappa)_1 \cdot \frac{B_1}{2} \cdot n^{\varkappa-1} - (\varkappa)_3 \cdot \frac{B_2}{4} \cdot n^{\varkappa-3}$$
$$+ (\varkappa)_5 \cdot \frac{B_3}{6} \cdot n^{\varkappa-5} - \cdots + (-1)^{\lambda-1} \cdot (\varkappa)_{2\lambda-1} \cdot \frac{B_\lambda}{2\lambda} n^{\varkappa-2\lambda+1},$$

$\left(\text{wo: } \lambda = \left[\frac{\varkappa}{2}\right],\ \varkappa = 1, 2, 3, \ldots\right)$. Es läßt sich also die Summe der $\varkappa$ten Potenzen von $1, 2, \ldots n$ als ganze Funktion $(\varkappa+1)$ten Grades von n darstellen.

Man findet z. B. für $\varkappa = 1, 2, 3$:

$$\sum_1^n{}_\nu\, \nu^1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_1^n{}_\nu\, \nu^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + 2\frac{B_1}{2} n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \left(\text{wegen: } B_1 = \frac{1}{6}\right)$$

$$\sum_1^n{}_\nu\, \nu^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + 3\frac{B_1}{2} n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\,^{1)} \qquad \text{usf.}$$

Durch Spezialisierung von n lassen sich aus Gl. (17) verschiedene Rekursionsformeln für B_λ ableiten. Insbesondere ergeben sich für $n = 1$ und $\varkappa = 2\lambda$ bzw. $\varkappa = 2\lambda + 1$ nach Multiplikation mit $(2\lambda+1)$ bzw. $(2\lambda+2)$ die folgenden Beziehungen:

$$(18)\quad \begin{cases} (2\lambda+1)_2 B_1 - (2\lambda+1)_4 B_2 + \cdots + (-1)^{\lambda-1} \cdot (2\lambda+1)_{2\lambda} B_\lambda = \frac{2\lambda-1}{2} \\ (2\lambda+2)_2 B_1 - (2\lambda+2)_4 B_2 + \cdots + (-1)^{\lambda-1} \cdot (2\lambda+2)_{2\lambda} B_\lambda = \lambda, \end{cases}$$

deren erste nach Multiplikation mit $(-1)^{\lambda-1}$ und mit Berücksichtigung der Relation: $(2\lambda+1)_{2\nu} = (2\lambda+1)_{2\lambda+1-2\nu}$ mit der Rekursionsformel (13), S. 502 zusammenfällt.

---

1) Es besteht also die merkwürdige Beziehung:

$$\sum_1^n{}_\nu\, \nu^3 = \left(\sum_1^n{}_\nu\, \nu\right)^2.$$

Kapitel VII.

Umkehrung von Potenzreihen und elementare Umkehrungsfunktionen.

§ 69. Umkehrung einer Potenzreihe. — Formeln für die Koeffizienten der umgekehrten Reihe. — Die *Lagrange*sche Reihe.

1. Es sei die Funktion $y = f(x)$ *regulär* an der Stelle $x = x_0$. Ist sodann: $f(x_0) = y_0$, so besteht für eine gewisse Umgebung von x_0 eine Entwicklung von der Form:

$$(1) \qquad y = y_0 + \sum_1^\infty{}^\nu A_\nu (x - x_0)^\nu.$$

Es handelt sich jetzt um die Beantwortung der Frage nach der „*Umkehrbarkeit*" dieser Potenzreihe, d. h.: Welches ist die *notwendige und hinreichende* Bedingung dafür, daß umgekehrt x als Funktion von y, welche für $y = y_0$ den Wert $x = x_0$ annimmt, für eine gewisse Umgebung der Stelle y_0 sich in der Form:

$$(2) \qquad x = x_0 + \sum_1^\infty{}^\nu B_\nu (y - y_0)^\nu$$

darstellen läßt?[1])

Man findet zunächst mit Leichtigkeit eine *notwendige* Bedingung, welche sich dann schließlich auch als *hinreichend* erweist.

Aus Gl. (1) folgt nämlich zunächst:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = A_1 + \sum_2^\infty{}^\nu A_\nu (x - x_0)^{\nu - 1}, \text{ also: } \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = A_1.$$

Soll andererseits eine Beziehung von der Form (2) bestehen, so ergibt sich analog:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{x - x_0}{y - y_0} = B_1$$

d. h., wegen $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{x - x_0}{y - y_0} = \left(\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{y - y_0}{x - x_0}\right)^{-1}$:

$$B_1 = \frac{1}{A_1},$$

und es muß somit A_1 nicht nur eine bestimmte Zahl, sondern insbesondere *von Null verschieden* sein.

---

1) Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, daß die folgenden Erörterungen gültig bleiben, wenn die Potenzreihe sich auf eine *ganze rationale Funktion* reduziert.

Da übrigens $A_1 = f'(x_0)$, so bildet also die Beziehung $f'(x_0) \neq 0$ eine *notwendige* Bedingung dafür, daß zu der für $x = x_0$ *regulären* und daselbst den Wert y_0 annehmenden Funktion $y = f(x)$ eine für $y = y_0$ *reguläre* und daselbst den Wert x_0 annehmende *Umkehrung* (also *Auflösung* von Gl. (1) nach x) von der Form (2) gehört.

Zur Durchführung des Beweises dafür, daß die obige Bedingung zugleich auch *hinreichend* ist, erscheint es zweckmäßig, die Gl. (1) auf eine etwas einfachere Form zu bringen. Dividiert man sie durch A_1 (was nur infolge der ausdrücklichen Voraussetzung $A_1 \neq 0$ gestattet ist) und macht die Substitutionen:

$$\frac{y - y_0}{A_1} = y', \qquad x - x_0 = x',$$

so wird zunächst:

$$y' = x' + \sum_{2}^{\infty}{}' \frac{A_\nu}{A_1} \cdot x'^{\nu},$$

und wenn man noch die Bezeichnung einführt:

$$\frac{A_\nu}{A_1} = a_{\nu-1},$$

außerdem der Einfachheit halber wieder x, y statt x', y' schreibt, so tritt an die Stelle von Gl. (1) die folgende:

$$\text{(1a)} \qquad y = x + x \sum_{1}^{\infty}{}' a_\nu x^\nu.$$

Da jetzt $x = 0$ und $y = 0$ ein zusammengehöriges Wertepaar bilden, so wäre also zu zeigen, daß x für eine gewisse Umgebung der Stelle $y = 0$ durch eine für $y = 0$ verschwindende, somit die Form $y \cdot \mathfrak{P}_1(y)$ besitzende Reihe darstellbar ist.

Wegen der prinzipiellen Wichtigkeit des vorliegenden Satzes geben wir dafür zwei verschiedene Beweise, einen auf möglichst elementaren Rechnungsoperationen beruhenden und einen in gewisser Beziehung etwas weiter tragenden funktionentheoretischen. Für den ersteren ist die Kenntnis eines besonderen Falles des (erst späterhin — s. § 73, Nr. 3 — in seiner allgemeinsten Form zu beweisenden[1]) *binomischen Satzes* erforderlich, dessen Beweis wir zunächst vorausschicken.

2. Hilfssatz. *Versteht man unter* $(1 + x)^{\frac{1}{2}}$ *den Hauptwert*[2]) *von* $\sqrt{1 + x}$, *so besteht für* $|x| \leqq 1$ *die absolut konvergente Reihenentwicklung:*

1) Für negative ganze Exponenten vgl. § 46, Nr. 1, S. 346.

2) d. h. denjenigen mit *positivem* reellen Teil (eventuell den *positiv* imaginären): s. I_3, § 70, Nr. 4, S. 539.

$$(3) \qquad (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{0}^{\infty} {}^{\nu} \left(\frac{1}{2}\right)_{\nu} x^{\nu},$$

wo $\left(\frac{1}{2}\right)_{\nu}$ *den* ν^{ten} *Binomialkoeffizienten für den Exponenten* $\frac{1}{2}$ *bedeutet, nämlich:*

$$(4) \qquad \left(\frac{1}{2}\right)_0 = 1, \quad \left(\frac{1}{2}\right)_1 = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_{\nu+1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{1\cdot 2\cdots(\nu+1)}$$

$$= (-1)^{\nu}\cdot\frac{1\cdot 3\cdots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdots(2\nu+2)} \quad (\nu \geqq 1).$$

Beweis. Setzt man versuchsweise:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{0}^{\infty} {}^{\nu} c_{\nu} x^{\nu} \quad (\text{wo: } c_0 = 1, \text{ wegen: } (1+x)^{\frac{1}{2}}_{x=0} = 1,$$

so folgt, daß die fragliche Reihe der Beziehung zu genügen hätte:

$$(5) \qquad \left(\sum_{0}^{\infty} {}^{\nu} c_{\nu} x^{\nu}\right)^2 = 1 + x.$$

Die Anwendung der *Cauchy*schen Multiplikationsregel auf die linke Seite und darauffolgende Koeffizientenvergleichung würde Formeln für die unbekannten Koeffizienten c_{ν} ergeben, die sich aber für deren Berechnung als unzweckmäßig erweisen. Um eine brauchbarere Rekursionsformel zu erhalten, bilden wir nach Vertauschung der beiden Seiten von Gl. (5) durch Derivation die Gleichung:

$$1 = 2\sum_{0}^{\infty} {}^{\nu} c_{\nu} x^{\nu} \cdot \sum_{1}^{\infty} {}^{\nu} \nu c_{\nu} x^{\nu-1} \quad (\text{s. § 43, Gl. (17), S. 327})$$

und hieraus durch Multiplikation mit Gl. (5) und Weglassung des beiden Seiten gemeinsamen Faktors $\sum_{0}^{\infty} {}^{\nu} c_{\nu} x^{\nu}$:

$$\sum_{0}^{\infty} {}^{\nu} c_{\nu} x^{\nu} = 2(1+x)\sum_{1}^{\infty} {}^{\nu} \nu c_{\nu} x^{\nu-1},$$

anders geschrieben:

$$1 + \sum_{1}^{\infty} {}^{\nu} c_{\nu} x^{\nu} = 2\sum_{1}^{\infty} {}^{\nu} \nu c_{\nu} x^{\nu-1} + 2\sum_{1}^{\infty} {}^{\nu} \nu c_{\nu} x^{\nu}$$

$$= 2c_1 + 2\sum_{1}^{\infty} {}^{\nu} \{(\nu+1)c_{\nu+1} + \nu c_{\nu}\} x^{\nu}.$$

Durch Koeffizientenvergleichung findet man:

$$2c_1 = 1, \quad 2(\nu+1)c_{\nu+1} + 2\nu c_\nu = c_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

also:

$$(6) \qquad c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_{\nu+1} = -\frac{2\nu-1}{2(\nu+1)} \cdot c_\nu = \frac{\frac{1}{2}-\nu}{\nu+1} \cdot c_\nu$$

und durch fortgesetzte Anwendung dieser Rekursionsformel:

$$(7) \qquad c_{\nu+1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{1\cdot 2\cdots(\nu+1)},$$

zunächst gültig für $\nu \geqq 1$, aber wie die erste der Gl. (6) zeigt, auch noch für $\nu = 0$.

Wegen: $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left|\frac{c_{\nu+1}}{c_\nu}\right| \equiv \lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{\nu-\frac{1}{2}}{\nu+1} = 1$ ergibt sich, daß die Reihe $\sum c_\nu x^\nu$ für $|x| < 1$ absolut konvergiert. Das gleiche gilt aber auch noch für $|x| = 1$, wie unmittelbar mit Hilfe des *Raabe*schen Kriteriums (s. I_3, § 54, Nr. 6, S. 385) erkannt wird, übrigens auch bei früherer Gelegenheit für den allgemeineren Fall, daß an die Stelle des Exponenten $\frac{1}{2}$ eine beliebige komplexe Zahl a mit positivem $\Re(a)$ tritt, ausdrücklich festgestellt wurde (I_3, § 76, Ungl. (35 a), S. 591).

Es bleibt noch zu zeigen, daß die gefundene Reihe $\sum c_\nu x^\nu$ auch wirklich der Gl. (5) genügt.[1] Die Anwendung der *Cauchy*schen Multiplikationsregel auf Gl. (5) liefert

als Koeffizienten von x^0: c_0^2, also: 1,

" " " x^1: $2c_0c_1$ " 1,

für $n \geqq 2$ " " " x^n: $\sum\limits_0^n c_\nu c_{n-\nu}$.

Es ist also nur noch nachzuweisen, daß:

$$\sum_0^n c_\nu c_{n-\nu} = 0 \qquad (\text{für } n \geqq 2).$$

Man findet zunächst für $n = 2$:

$$\sum_0^2 c_\nu c_{2-\nu} \equiv 2c_0c_2 + c_1^2 = 2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

1) Dieser Nachweis wird entbehrlich, wenn man von vornherein die *Existenz* der fraglichen Entwicklung aus dem *Cauchy-Taylor*schen Satze (§ 52, Nr. 1, II, S. 386) folgert. Um für den folgenden elementaren Beweis des Hauptsatzes nur die denkbar einfachsten Hilfsmittel in Anspruch zu nehmen, wurde auch beim Beweise des vorliegenden Hilfssatzes auf die Benutzung des obigen funktionentheoretischen Ergebnisses verzichtet.

Das weitere ergibt sich dann durch vollständige Induktion. Wir gehen aus von der Identität:

$$(1-n)\cdot\sum_{0}^{n}{}^{\nu} c_\nu c_{n-\nu} = \sum_{0}^{n}{}^{\nu}\left\{\left(\tfrac{1}{2}-\nu\right)c_\nu c_{n-\nu} + \left(\tfrac{1}{2}-(n-\nu)\right)c_\nu c_{n-\nu}\right\}.$$

Wird die Rekursionsformel (6), rückwärts gelesen, im ersten Gliede der rechten Seite auf c_ν, im zweiten auf $c_{n-\nu}$ angewendet, so wird:

$$(1-n)\cdot\sum_{0}^{n}{}^{\nu} c_\nu c_{n-\nu} = \sum_{0}^{n}{}^{\nu}\{(\nu+1)c_{\nu+1}c_{n-\nu} + (n-\nu+1)c_\nu c_{n-\nu+1}\}$$

$$= \sum_{1}^{n+1}{}^{\nu} \nu c_\nu c_{n-\nu+1} + \sum_{0}^{n}{}^{\nu}(n-\nu+1)c_\nu c_{n-\nu+1}$$

und, da es freisteht, der ersten Summe das Glied: $(\nu c_\nu c_{n-\nu+1})_{\nu=0} = 0$, der zweiten das Glied: $((n-\nu+1)c_\nu c_{n-\nu+1})_{\nu=n+1} = 0$ hinzuzufügen:

$$(1-n)\cdot\sum_{0}^{n}{}^{\nu} c_\nu c_{n-\nu} = (n+1)\cdot\sum_{0}^{n+1}{}^{\nu} c_\nu c_{n+1-\nu}.$$

Ist also für irgend ein $n \geqq 2$: $\sum_{0}^{n}{}^{\nu} c_\nu c_{n-\nu} = 0$, so gilt auch:

$$\sum_{0}^{n+1}{}^{\nu} c_\nu c_{n+1-\nu} = 0.$$

Die fragliche Beziehung gilt somit für jedes $n > 2$, da ihre Richtigkeit für $n = 2$ bereits feststeht.

3. Hauptsatz. *Ist für eine gewisse Umgebung von $x = 0$:*

$$\text{(1a)}\qquad y = x + x\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu x^\nu,$$

so gibt es eine und nur eine für eine angebbare Umgebung $|y| < \sigma$ konvergierende Potenzreihe:

$$\text{(8)}\qquad x = y\cdot\mathfrak{P}_1(y),$$

welche die Gl. (1a) identisch befriedigt; mit anderen Worten, es existiert eine gewisse Umgebung von $y = 0$, für welche x eine gleichzeitig mit y verschwindende[1]) *Funktion regulären Verhaltens ist.*

1) Aus Gl. (1a) folgt nämlich zunächst, daß $y = 0$ nicht nur für $x = 0$, sondern auch für solche x, für die:

$$1 + \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu x^\nu = 0.$$

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die $|a_\nu|$ unter einer endlichen Schranke bleiben. Wäre dies nämlich von vornherein nicht der Fall und bedeutet $x_1 \neq 0$ irgendeine Zahl, für welche $\sum a_\nu x_1^\nu$ konvergiert, so sind die $|a_\nu x_1^\nu|$ sicher *beschränkt*. Setzt man: $a_\nu x_1^\nu = a'_\nu$ und $\frac{x}{x_1} = x'$, $\frac{y}{x_1} = y'$, so wird: $\sum a_\nu x^\nu = \sum a'_\nu x'^\nu$, wo jetzt die a'_ν die fragliche Eigenschaft besitzen, außerdem: $\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}$ (was mit Rücksicht auf die unmittelbar folgende Bemerkung wichtig ist).

Da aus Gl. (1a) folgt: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{y}{x} = 1$, also auch, da x gleichzeitig mit y verschwinden soll: $\lim\limits_{y \to 0} \frac{x}{y} = 1$, so muß, wenn überhaupt eine Entwicklung von x nach Potenzen von y bestehen soll, diese mit dem Gliede y beginnen, also $\mathfrak{P}_1(y)$ von der Form sein:

$$\mathfrak{P}_1(y) = 1 + b_1 y + \cdots + b_\nu y^\nu + \cdots \tag{9}$$

Bringt man sodann Gl. (1a) auf die Form:

$$x - y = \sum_1^\infty {}' a'_\nu x^{\nu+1}, \quad \text{wo: } a'_\nu = -a_\nu, \tag{1b}$$

so müßte auf Grund der an Gl. (8) geknüpften Behauptung mit Berücksichtigung von Gl. (9) für alle y einer gewissen Umgebung von $y = 0$ die Beziehung bestehen:

$$b_1 y^2 + b_2 y^3 + \cdots + b_\nu y^{\nu+1} + \cdots = \sum_1^\infty {}' a'_\nu y^{\nu+1} \mathfrak{P}_1(y)^{\nu+1}. \tag{10}$$

Gibt es nun überhaupt eine Potenzreihe von der Form $y \cdot \mathfrak{P}_1(y)$, welche dieser Gleichung genügt, so steht es nach § 40, Nr. 3 (Fall 1), S. 307 frei, für eine gewisse Umgebung von $y = 0$ die rechte Seite nach Potenzen von y zu ordnen. Ergeben sich dann durch Koeffizientenvergleichung *eindeutig* bestimmte Werte für die b_ν, welche eine Reihe $\sum b_\nu y^\nu$ *mit von Null verschiedenem Konvergenzradius* liefern, so gibt es in der Tat eine und *nur* eine Potenzreihe der verlangten Art.

Wir bringen zunächst Gl. (10) durch Division mit y^2 auf die Form:

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 y + \cdots + b_\nu y^{\nu-1} + \cdots\cdots \\ = a'_1 \mathfrak{P}_1(y)^2 + a'_2 y \mathfrak{P}_1(y)^3 + \cdots + a'_{\nu+1} y^\nu \mathfrak{P}_1(y)^{\nu+2} + \cdots \end{aligned} \tag{10a}$$

Durch Anwendung der *Cauchy*schen Multiplikationsregel ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_1(y)^2 &= 1 + 2b_1 y + (2b_2 + b_1^2) y^2 + \cdots + (2b_\nu + 2b_1 b_{\nu-1} + \cdots) y^\nu + \cdots\cdots \\ &= 1 + c_1^{(2)} y + c_2^{(2)} y^2 + \cdots + c_\nu^{(2)} y^\nu + \cdots\cdots \end{aligned}$$

und entsprechend allgemein:

$$\mathfrak{P}_1(y)^\lambda = 1 + c_1^{(\lambda)} y + c_2^{(\lambda)} y^2 + \cdots + c_\nu^{(\lambda)} y^\nu + \cdots\cdots,$$

wo $c_\nu^{(\lambda)}$ bei beliebigem ganzzahligem $\lambda \geqq 2$ eine *ganze* Funktion von $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$[1]) mit *positiven* (ganzzahligen) Koeffizienten. Wird also die rechte Seite von Gl. (10) nach Potenzen von y geordnet, so resultiert durch Koeffizientenvergleichung das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_1' \\
b_2 &= a_1' c_1^{(2)} + a_2' \\
b_3 &= a_1' c_2^{(2)} + a_2' c_1^{(3)} + a_3' \\
&\cdots\cdots\cdots \\
b_\nu &= a_1' c_{\nu-1}^{(2)} + a_2' c_{\nu-2}^{(3)} + \cdots + a_{\nu-1}' c_1^{(\nu)} + a_\nu' \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

und dieses nimmt durch Einsetzen der für $b_1, b_2, \ldots, b_{\nu-1}$ sukzessive sich ergebenden Werte in die rechten Seiten die Form an:

$$(11)\qquad \begin{cases}
b_1 = a_1' \equiv g_1(a_1') \\
b_2 = 2a_1'^2 + a_2' \equiv g_2(a_1', a_2') \\
b_3 = g_3(a_1', a_2', a_3') \\
\cdots\cdots\cdots \\
b_\nu = g_\nu(a_1', a_2', \ldots, a_\nu') \\
\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{cases}$$

wo die $g_1, g_2, \ldots, g_\nu \ldots$ *ganze* Funktionen ihrer Argumente mit *positiven* (ganzzahligen) Koeffizienten bedeuten. Daraus folgt zunächst (wegen $|a_\nu'| = |a_\nu|$), daß:

$$|b_\nu| \leqq g_\nu(|a_1'|, |a_2'|, \ldots, |a_\nu'|) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

und, da die $|a_\nu|$ beschränkt sind, etwa:

$$|a_\nu'| \leqq A,$$

um so mehr:

$$(12)\qquad |b_\nu| \leqq g_\nu(\underbrace{A}_{1}, \underbrace{A}_{2}, \ldots, \underbrace{A}_{\nu}).$$

Die Vergleichung von $g_\nu(A, A, \ldots, A)$ mit der Bedeutung von $g_\nu(a_1', a_2', \ldots, a_\nu')$ kennzeichnet diesen Ausdruck als den Koeffizienten von $y^{\nu+1}$ in der Entwicklung von x nach Potenzen von y, welcher an die Stelle von b_ν tritt, wenn sämtliche a_ν' (d. h. $-a_\nu$) durch A ersetzt werden, wenn also zwischen x und y statt der Gl. (1a) die folgende besteht:

$$\begin{aligned}
y &= x - x\sum_1^\infty A x^\nu \quad \text{(mit dem Zusatze: } x = 0 \text{ für } y = 0) \\
(13)\qquad &= x - \frac{Ax^2}{1-x} = \frac{x-(1+A)x^2}{1-x}.
\end{aligned}$$

1) $b_{\nu+1}$ kommt schon in $c_\nu^{(\lambda)}$ nicht vor, da $b_{\nu+1}$ in $\mathfrak{P}_1(y)$ mit $y^{\nu+1}$ behaftet ist (s. Gl (9)).

Hier läßt sich aber die in Frage kommende Entwicklung von x nach Potenzen von y auf direkterem Wege ausführen und da nach dem oben Gesagten nur eine einzige derartige Entwicklung möglich ist, so muß sie mit derjenigen von der Form $y + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\, g_\nu(A, A, \ldots, A) y^{\nu+1}$ identisch sein.

Aus Gl. (13) folgt zunächst:

$$(1 + A)x^2 - (1 + y)x + y = 0,$$

und als *einzige für $y = 0$ verschwindende* Lösung x dieser Gleichung findet man:

$$x = \frac{1}{2(1+A)}\left(1 + y + (y^2 - 2(1 + 2A)y + 1)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{14}$$

(die gebrochene Potenz als Hauptwert verstanden).

Setzt man zur Abkürzung:

$$y^2 - 2(1 + 2A)y + 1 \equiv f(y) \tag{15}$$

und bezeichnet, um die fragliche Entwicklung von $f(y)^{\frac{1}{2}}$ in eine $\mathfrak{P}(y)$ herzustellen, die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$f(y) = 0$$

mit σ, σ', nämlich:

$$\begin{cases} \sigma = 1 + 2A - ((1 + 2A)^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \\ \sigma' = 1 + 2A + ((1 + 2A)^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{16}$$

(also σ, σ' beide *positiv* und $\sigma < \sigma'$), so wird:

$$f(y) = (y - \sigma)(y - \sigma') = \left(1 - \frac{y}{\sigma}\right)\left(1 - \frac{y}{\sigma'}\right)$$

(wegen: $\sigma\sigma' = 1$) und daher mit Benutzung des Satzes von Nr. 2:

$$\begin{aligned} f(y)^{\frac{1}{2}} &= \left(1 - \frac{y}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{y}{\sigma'}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \left(\tfrac{1}{2}\right)_{\nu} \left(\frac{-y}{\sigma}\right)^{\nu}\right) \cdot \left(\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \left(\tfrac{1}{2}\right)_{\nu} \left(\frac{-y}{\sigma'}\right)^{\nu}\right), \end{aligned} \tag{17}$$

wobei die erste dieser beiden Reihen für $|y| \leqq \sigma$, die zweite für $|y| \leqq \sigma'$ *absolut konvergiert*. Unter Beschränkung auf den *kleineren* Konvergenzbereich $|y| \leqq \sigma$, wo übrigens σ auch in die Form gesetzt werden kann:

$$\sigma = \frac{1}{1 + 2A + ((1 + 2A)^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} > \frac{1}{2(1 + 2A)}, \tag{16a}$$

ergibt sich sodann durch Anwendung der *Cauchy*schen Multiplikationsregel eine absolut konvergente Entwicklung von der Form:

$$f(y)^{\frac{1}{2}} = \mathfrak{P}(y). \tag{17a}$$

Mindestens in demselben Umfange besteht die absolute Konvergenz auf Grund von Ungl. (12) auch für die Reihe: $x = y\left(1 + \sum_1^\infty {}^{\nu} b_\nu y^\nu\right)$ [1], womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

4. Für den oben angekündigten zweiten Beweis unseres *Hauptsatzes* geben wir diesem die folgende noch etwas verschärfte Fassung:

Ist für eine gewisse Umgebung von $x = 0$:

$$(1\text{a}) \qquad y = \mathfrak{P}(x) \equiv x + x \sum_1^\infty {}^{\nu} a_\nu x^\nu,$$

so gibt es positive Zahlen ϱ von der Beschaffenheit, daß die für $|x| \leqq \varrho$ aus Gl. (1a) hervorgehenden y einen die Stelle $y = 0$ umgebenden, einfach zusammenhängenden und abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}_y$ vollständig erfüllen und daß umgekehrt zu jedem dieser y ein und nur ein $x = \varphi(y)$ des Bereiches $|x| \leqq \varrho$ gehört. Dabei ist $\varphi(y)$ an jeder Stelle von $\mathfrak{B}_y$ und insbesondere für eine gewisse Umgebung $|y| \leqq \sigma < \varrho$ regulär.

Beweis. Bedeutet x_0 irgendeine Zahl, für welche außer $\mathfrak{P}(x_0)$ auch die Reihe:

$$\mathfrak{P}'(x_0) \equiv 1 + \sum_1^\infty {}^{\nu} (\nu + 1) a_\nu x_0^\nu$$

absolut konvergiert (was ja allemal der Fall wäre, wenn x_0 dem *Innern* des Konvergenzbereiches von $\mathfrak{P}(x)$ angehört), so läßt sich nach Annahme einer beliebigen positiven Zahl $\alpha < 1$ ein positives $\varrho \leqq |x_0|$ so fixieren, daß:

$$(18) \qquad \sum_1^\infty {}^{\nu} (\nu + 1) |a_\nu| \varrho^\nu \leqq \alpha.$$

Alsdann folgt zunächst, daß:

$$(19) \qquad |\mathfrak{P}'(x)| \geqq 1 - \sum_1^\infty {}^{\nu} (\nu + 1) |a_\nu| \varrho^\nu \geqq 1 - \alpha \quad \text{für: } |x| \leqq \varrho.$$

Des weiteren ergibt sich, wenn auch $|x'| \leqq \varrho$ beliebig, nur von x verschieden angenommen wird:

---

1) Mit anderen Worten: die Reihe $|y| + \sum_1^\infty {}^{\nu} g_\nu(A, A, \ldots A) |y|^{\nu+1}$ ist eine *Majorante* der Reihe $y + \sum_1^\infty {}^{\nu} b_\nu y^{\nu+1}$ (vgl. § 29, Nr. 3, Fußn. 2, S. 289)

$$\mathfrak{P}(x) - \mathfrak{P}(x') = (x - x') + \sum_1^\infty{}_\nu a_\nu (x^{\nu+1} - x'^{\nu+1})$$

$$= (x - x')\left\{1 + \sum_1^\infty{}_\nu a_\nu\, (x^\nu + x^{\nu-1}x' + \cdots + x'^\nu)\right\}$$

und daher

$$(20) \qquad |\mathfrak{P}(x) - \mathfrak{P}(x')| \begin{cases} \geqq |x - x'| \cdot \left\{1 - \sum_1^\infty{}_\nu (\nu + 1)|a_\nu|\varrho^\nu\right\} \\ \leqq |x - x'| \cdot \left\{1 + \sum_1^\infty{}_\nu (\nu + 1)|a_\nu|\varrho^\nu\right\}. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich, wenn nach Analogie von Gl. (1a) $\mathfrak{P}(x') = y'$ gesetzt wird, mit Berücksichtigung von Ungl. (18) die doppelte Ungleichung:

$$(21) \quad (1 - \alpha)|x - x'| \leqq |y - y'| \leqq (1 + \alpha)|x - x'| \qquad \left(\begin{matrix}|x|\\|x'|\end{matrix}\right\} \leqq \varrho\Big),$$

aus deren erstem Teile hervorgeht, daß, solange $|x| \leqq \varrho$, zu *verschiedenen* x stets auch *verschiedene* y gehören. Es entspricht daher jedem einzelnen dieser y nur ein *einziges* dem Bereiche $|x| \leqq \varrho$ angehöriges x; anders ausgesprochen, für die durch Gl. (1a) und die Bedingung $|x| \leqq \varrho$ definierte Punktmenge $\{y\}$ existiert als Umkehrung (= Auflösung nach x) der Gl. (1a) *eine* und *nur* eine *eindeutige* und, wie wiederum aus dem ersten Teile von Ungl. (21) hervorgeht, *stetige* Funktion $x = \varphi(y)$. Die in Frage kommende Punktmenge $\{y\}$ ist infolge der Stetigkeit von $y = \mathfrak{P}(x)$ für $|x| \leqq \varrho$ jedenfalls *zusammenhängend* und *abgeschlossen*, bildet also ein (übrigens die Stelle $y = 0$ enthaltendes) *Gebiet* $\mathfrak{B}_y$. Wir wollen nachweisen, daß dieses letztere einen die Stelle $y = 0$ vollständig *umgebenden*, einfach zusammenhängenden Bereich bildet.

Den Punkten des Kreises $|x| = \varrho$ entsprechen *umkehrbar eindeutig* die Punkte y einer *einfach geschlossenen* Kurve $\mathfrak{C}_\varrho$, nämlich derjenigen die y-Ebene in zwei getrennte Gebiete zerlegenden *Jordan*schen Kurve, deren Koordinaten aus der Gl. (1a) für $x = \varrho e^{\vartheta i}$, nämlich:

$$y = \varrho e^{\vartheta i} + \sum_1^\infty{}_\nu a_\nu \varrho^{\nu+1} e^{(\nu+1)\vartheta i} \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi)$$

durch Trennung des Reellen und Imaginären hervorgehen. Jedem anderen Kreise $|x| = \varrho' < \varrho$ entspricht eine Kurve ähnlicher Art $\mathfrak{C}_{\varrho'}$. Wegen der *Eindeutigkeit* von $x = \varphi(y)$ können zwei solche Kurven $\mathfrak{C}_{\varrho'}$ weder miteinander noch mit $\mathfrak{C}_\varrho$ einen Punkt gemein haben. Auch müssen, da jedem zusammenhängenden Teile des Bereiches $|x| \leqq \varrho$ ein zusammenhängender Teil des Gebietes $\mathfrak{B}_y$ entspricht die Bildkurven $\mathfrak{C}_{\varrho'}$ der gesamten Kreis-

schar $0 < |x| = \varrho' < \varrho$ durchweg dem Innern oder durchweg dem Äußern von $\mathfrak{C}_\varrho$ angehören. Bezeichnet man mit x_ϱ, $x_{\varrho'}$ irgendein auf demselben *Radius* liegendes Punktepaar der beiden Kreise $|x| = \varrho$ und $|x| = \varrho'$, mit y_ϱ, $y_{\varrho'}$ das entsprechende (also zu dem nämlichen Parameterwerte ϑ gehörende) Punktepaar auf $\mathfrak{C}_\varrho$ und $\mathfrak{C}_{\varrho'}$, so hat man, wegen $|x_\varrho - x_{\varrho'}| = \varrho - \varrho'$, nach dem zweiten Teile von Ungl. (21):

$$|y_\varrho - y_{\varrho'}| \leqq (1 + \alpha)(\varrho - \varrho') < 2(\varrho - \varrho'),$$

so daß also der Abstand der Punkte y_ϱ, $y_{\varrho'}$ gleichzeitig mit $\varrho - \varrho'$ beliebig klein wird und die Kurve $\mathfrak{C}_{\varrho'}$ in ihrem ganzen Verlaufe (d. h. für $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$) sich *gleichmäßig* beliebig nahe an $\mathfrak{C}_\varrho$ anschmiegen muß. Verliefe nun $\mathfrak{C}_{\varrho'}$ *außerhalb* der Kurve $\mathfrak{C}_\varrho$, so müßte sie also die letztere beliebig eng *umschließen*. Das analoge würde nach Annahme von $\varrho'' < \varrho'$ bei hinlänglich kleinem $\varrho' - \varrho''$ bezüglich der Kurven $\mathfrak{C}_{\varrho''}$ und $\mathfrak{C}_{\varrho'}$ gelten. Daraus würde schließlich folgen, daß bei veränderlichem positiven $\varrho' < \varrho$ die Kurve $\mathfrak{C}_\varrho$ von *allen möglichen* $\mathfrak{C}_{\varrho'}$ umschlossen werden müßte. Nun liefert aber Ungl. (21) für $|x| = \varrho$ und $x' = 0$ (also auch $y' = 0$) die Beziehung:

$$(1 - \alpha)\varrho \leqq |y_\varrho| \leqq (1 + \alpha)\varrho, \tag{21a}$$

aus deren erstem Teile folgen würde, daß *jede* Kurve $\mathfrak{C}_{\varrho'}$ solche Punkte $y_{\varrho'}$ enthalten müßte, für welche $|y_{\varrho'}| \geqq (1 - \alpha)\varrho$ ausfällt. Letzteres ist aber *unmöglich*. Denn aus dem zweiten Teil von Ungl. (21a), wenn man daselbst ϱ durch ϱ' ersetzt, ergibt sich, daß:

$$|y_{\varrho'}| \leqq (1 + \alpha)\varrho',$$

also $|y_{\varrho'}|$ gleichzeitig mit ϱ' (sc. für alle $y_{\varrho'}$) *beliebig klein* wird.

Hiernach verlaufen also die der Kreisschar $0 < |x| = \varrho' < \varrho$ entsprechenden y-Kurven $\mathfrak{C}_{\varrho'}$ sich stetig aneinander schließend sämtlich im *Innern* von $\mathfrak{C}_\varrho$ und *erfüllen* nach Hinzunahme von $y = 0$ (als Bildpunkt von $x = 0$) das Innere von $\mathfrak{C}_\varrho$ *vollständig* (da ja bereits feststeht, daß die Punktmenge $\{y\}$ eine *abgeschlossene* ist). Das oben mit $\mathfrak{B}_y$ bezeichnete Gebiet besteht also in der Tat aus einem *einfach zusammenhängenden*, den Punkt $y = 0$ *umschließenden* Bereich, der von der Kurve $\mathfrak{C}_\varrho$ begrenzt wird.

In dem genannten Bereich ist die oben mit $x = \varphi(y)$ bezeichnete *eindeutige* Funktion auch *stetig differenzierbar*. Denn man findet:

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{-1} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1} = \frac{1}{\mathfrak{P}'(x)}$$

und somit nach Ungl. (19) für $|x| \leqq \varrho$

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| \leqq \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Da insbesondere der Kreis mit dem Radius $(1 - \alpha)\varrho$ nach dem ersten

Teile von Ungl. (21) dem Gebiete $\mathfrak{B}_y$ angehört, so ist $x = \varphi(y)$ für $|y| \leqq (1-\alpha)\varrho = \sigma$ *regulär.*

5. Der vorstehende Beweis zeigt nur die *Existenz* der umgekehrten Reihe: $x = y + \sum_1^\infty{}_\nu b_\nu y^{\nu+1}$, liefert aber kein Mittel zur Berechnung der Koeffizienten b_ν. Hierzu würde zunächst wieder die beim ersten Beweise angewendete Methode der unbestimmten Koeffizienten zur Verfügung stehen. Ein anderes Mittel liefert die Auffassung der fraglichen Reihe als *Mac Laurin*sche Reihe (s. § 42, Nr. 1, Gl. (9), S. 318). Danach hat man zunächst:

$$b_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{d^{n+1}x}{dy^{n+1}}\right)_{y=0} = \frac{1}{(n+1)!}\left(D_y\frac{d^n x}{dy^n}\right)_{y=0},$$

also mit Benützung der Differentiationsformel von § 43, Nr. 4, Gl. (27) (S. 328), der Beziehung: $\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$ und des Umstandes, daß $x = 0$ für $y = 0$:

$$(22)\quad b_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(\left(D_x\frac{d^n x}{dy^n}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}\right)_{x=0} = \frac{1}{(n+1)!}\left(\left(D_x\frac{d^n x}{dy^n}\right)\cdot\frac{1}{\mathfrak{P}'(x)}\right)_{x=0}$$

(wegen: $y = \mathfrak{P}(x)$ nach Gl. (1a)).

Man findet auf diese Weise z. B.:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \left(D_x\frac{dx}{dy}\right)\cdot\frac{1}{\mathfrak{P}'(x)} = -\frac{\mathfrak{P}''(x)}{\mathfrak{P}'(x)^3}$$

$$\frac{d^3x}{dy^3} = \left(D_x\frac{d^2x}{dy^2}\right)\cdot\frac{1}{\mathfrak{P}'(x)} = -\frac{\mathfrak{P}'(x)\mathfrak{P}'''(x) - 3\mathfrak{P}''(x)^2}{\mathfrak{P}'(x)^5}\ \text{usf.}$$

Da aus Gl. (1a) sich ergibt:

$$\mathfrak{P}'(0) = 1,\quad \mathfrak{P}''(0) = 2a_1,\quad \mathfrak{P}'''(0) = 6a_2,\ \ldots$$

so folgt schließlich:

$$(22\text{a})\qquad b_1 = -a_1,\quad b_2 = -a_2 + 2a_1^2,\ \text{usf.}$$

6. Eine elegantere Formel zur Berechnung der Koeffizienten b_ν gewinnt man auf folgende Weise. Setzt man die Reihe (8) für x mit Benutzung von Gl. (9) in die Form:

$$(8\text{a})\qquad x = \sum_0^\infty{}_\nu b_\nu y^{\nu+1}\quad (\text{wo also: } b_0 = 1),$$

so folgt durch Einsetzen der gegebenen Reihe $y = \mathfrak{P}(x)$:

$$(23)\qquad x = \sum_0^\infty{}_\nu b_\nu \mathfrak{P}(x)^{\nu+1}$$

und hieraus durch Differentiation:

$$1 = \sum_0^\infty{}^\nu (\nu + 1) b_\nu \mathfrak{P}(x)^\nu \cdot \mathfrak{P}'(x)$$

$$(24) \qquad = \sum_0^{n-1}{}^\nu (\nu + 1) b_\nu \mathfrak{P}(x)^\nu \cdot \mathfrak{P}'(x) + (n+1) b_n \mathfrak{P}(x)^n \cdot \mathfrak{P}'(x) + \mathfrak{Q}_n(x),$$

wo:

$$\mathfrak{Q}_n(x) = \sum_{n+1}^\infty{}^\nu (\nu + 1) b_\nu \mathfrak{P}(x)^\nu \cdot \mathfrak{P}'(x)$$

$$= \mathfrak{P}(x)^{n+1} \cdot \left\{ \mathfrak{P}'(x) \sum_1^\infty{}^\nu (\nu + n + 1) b_{\nu+n} \mathfrak{P}(x)^{\nu-1} \right\}$$

$$(24\text{a}) \qquad = \mathfrak{P}(x)^{n+1} \cdot \mathfrak{S}_n(x).$$

Dabei ist $\mathfrak{S}_n(x)$, wegen $\mathfrak{P}(x) = 0$ für $x = 0$, für hinlänglich kleine $|x|$ nach positiven Potenzen von x entwickelbar.

Durch Einsetzen des letzten Ausdruckes in Gl. (24), nimmt diese nach Division mit $\mathfrak{P}(x)^{n+1}$ die Form an:

$$\frac{1}{\mathfrak{P}(x)^{n+1}} = \sum_0^{n-1}{}^\nu (\nu + 1) b_\nu \frac{\mathfrak{P}'(x)}{\mathfrak{P}(x)^{n+1-\nu}} + (n+1) b_n \frac{\mathfrak{P}'(x)}{\mathfrak{P}(x)} + \mathfrak{S}_n(x)$$

und geht mit Berücksichtigung der für $\nu \leqq n - 1$ geltenden Beziehung:

$$D_x \frac{1}{\mathfrak{P}(x)^{n-\nu}} = -(n - \nu) \cdot \frac{\mathfrak{P}'(x)}{\mathfrak{P}(x)^{n+1-\nu}}$$

und Vertauschung der Reihenfolge von Summation und Differentiation in die folgende über:

$$(25) \quad \frac{1}{\mathfrak{P}(x)^{n+1}} = -D_x \sum_0^{n-1}{}^\nu \frac{\nu+1}{n-\nu} b_\nu \frac{1}{\mathfrak{P}(x)^{n-\nu}} + (n+1) b_n \frac{\mathfrak{P}'(x)}{\mathfrak{P}(x)} + \mathfrak{S}_n(x).$$

Wird jetzt $\mathfrak{P}(x)$ in die Form gesetzt (s. Gl. (1a)):

$$(26) \quad \mathfrak{P}(x) = x \cdot \mathfrak{P}_0(x) \quad (\text{wo also: } \mathfrak{P}_0(x) = 1 + a_1 x + \cdots + a_\nu x^\nu + \cdots),$$

so daß:

$$\mathfrak{P}'(x) = \mathfrak{P}_0(x) + x \mathfrak{P}_0{}'(x), \quad \text{also: } \frac{\mathfrak{P}'(x)}{\mathfrak{P}(x)} = \frac{1}{x} + \frac{\mathfrak{P}_0{}'(x)}{\mathfrak{P}_0(x)},$$

so folgt aus Gl. (25) nach Multiplikation mit x^{n+1}:

$$(27) \quad \frac{1}{\mathfrak{P}_0(x)^{n+1}} = -x^{n+1} D_x \sum_0^{n-1}{}^\nu \frac{\nu+1}{n-\nu} b_\nu \frac{1}{x^{n-\nu} \mathfrak{P}_0(x)^{n-\nu}}$$

$$+ (n+1) b_n x^n + x^{n+1} \left((n+1) b_n \frac{\mathfrak{P}_0{}'(x)}{\mathfrak{P}_0(x)} + \mathfrak{S}_n(x) \right) \cdot$$

Da $\mathfrak{P}_0(0) = 1$, also $\frac{1}{\mathfrak{P}_0(x)}$ *regulär* für $x = 0$, ebenso auch $\mathfrak{S}_n(x)$, so sind beide Seiten von Gl. (27) nach positiven Potenzen von x entwickel-

bar. Die Funktion unter dem Summenzeichen enthält zwar (vermöge des Faktors $x^{n-\nu}$ im Nenner) auch *negative* Potenzen von x, welche (bei $\nu = 0$) bis zu x^{-n} also nach der Differentiation bis $x^{-(n+1)}$ ansteigen, jedoch durch den Faktor x^{n+1} ausnahmslos beseitigt werden. Nun kann die *Derivierte* einer nach ganzen Potenzen von x fortschreitenden Reihe *niemals* ein Glied mit x^{-1} enthalten, es kann daher der *erste* Teil der rechten Seite von Gl. (27) *kein* Glied mit x^n enthalten. Das nämliche gilt von dem *letzten* Teile, da die Klammergröße *regulär* ist, die Entwicklung dieses Teiles also mindestens mit x^{n+1} beginnt. Somit erscheint rechts das Glied $(n+1)b_n x^n$ als das *einzige* mit x^n behaftete. Somit muß $(n+1)b_n$ gleich sein dem Koeffizienten von x^n in der Entwicklung der *linken* Seite nach Potenzen von x. Wendet man hierzu die *Mac Laurin*sche Reihenform an, so ergibt sich also:

$$b_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(D_x^n \mathfrak{P}_0(x)^{-(n+1)}\right)_{x=0}. \tag{28}$$

Die Reihe (8a) (also die umgekehrte Reihe von $y = x \cdot \mathfrak{P}_0(x)$) *mit dieser Koeffizientenbestimmung* wird als *Lagrange*sche Reihe bezeichnet.

7. Eine allerdings nur unter ganz speziellen Voraussetzungen brauchbare, aber gerade bei mehreren wichtigen Anwendungen sich bewährende überaus einfache Methode der Koeffizientenbestimmung ergibt sich folgendermaßen.

Sei wiederum gegeben:

$$y = \mathfrak{P}(x),$$

wo $\mathfrak{P}(0) = 0$, $\mathfrak{P}'(0) \neq 0$, also auch $\mathfrak{P}'(x) \neq 0$ für eine gewisse Umgebung von $x = 0$, so folgt aus:

$$\frac{dy}{dx} = \mathfrak{P}'(x)$$

für eine gewisse Umgebung von $y = 0$:

$$\frac{dx}{dy} = \mathfrak{P}'(x)^{-1}.$$

Angenommen nun, es gelinge $\mathfrak{P}'(x)^{-1}$ durch $\mathfrak{P}(x)$, also durch y auszudrücken und nach ganzen positiven Potenzen von y zu entwickeln, etwa:

$$\frac{dx}{dy} = \sum_0^\infty{}_\nu\, c_\nu y^\nu, \tag{29}$$

so findet man, mit Berücksichtigung des Umstandes, daß $x = 0$ für $y = 0$, hieraus unmittelbar:

$$x = \sum_0^\infty{}_\nu\, \frac{1}{\nu+1} c_\nu y^{\nu+1}. \tag{30}$$

Beispiel. Sei gegeben die für $x = 0$ reguläre und mit $x = 0$ verschwindende Funktion:

$$y = \operatorname{tang} x \tag{31}$$

also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$$

so folgt:

$$\frac{dx}{dy} = \cos^2 x.$$

Nun findet man aber:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

und daher:

$$\frac{dx}{dy} = \sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu y^{2\nu} \quad \text{für: } |y| < 1,$$

woraus sich unmittelbar ergibt:

$$x = \sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu \cdot \frac{1}{2\nu + 1} y^{2\nu+1}. \tag{32}$$

Wir kommen auf diese Reihe im § 71 noch zurück.

Andere Beispiele für die Anwendung der vorliegenden Methode siehe im folgenden Paragraphen Nr. 4 und § 74, Nr. 1.

Der im vorstehenden noch ganz außer Betracht gebliebene Fall, daß die für die eindeutige Umkehrbarkeit einer für eine Stelle x_0 *regulären* Funktion $f(x)$ als notwendig und hinreichend erkannte Bedingung, nämlich die Beziehung $f'(x_0) \neq 0$, *nicht* erfüllt ist, wird in § 73, Nr. 6 erledigt werden.

§ 70. Der (natürliche) Logarithmus als Umkehrung der Exponentialfunktion und als analytische Funktion. — Der Hauptwert $\lg x$ und die unendlich vieldeutige Funktion $\operatorname{Lg} x$. — Die logarithmische Reihe.

1. Bedeutet x eine *positive* Zahl so hat die Gleichung:

$$e^y = x \tag{1}$$[1])

stets eine und *nur* eine *reelle* (für $x > 1$ positive, für $x < 1$ negative) Lösung y (s I_1, § 32, S. 195), welche als *natürlicher Logarithmus* von x

1) Da in diesem und den folgenden Paragraphen es sich wesentlich um das Studium der *„umgekehrten"* Funktionen handelt, so haben wir gegenüber den im vorigen Paragraphen benützten Bezeichnungen die Bedeutung der Buchstaben x und y vertauscht, so daß also jetzt x als *unabhängige* Veränderliche für die *umgekehrte* Funktion auftritt.

bezeichnet wurde (s. I_1, § 34, S. 206), in Zeichen:

$$y = \lg x. \tag{2}$$

Versteht man jetzt unter x eine beliebige *komplexe* Zahl mit Ausschluß der Null, so hat die Gl. (1) nach § 61, Nr. 2 (S. 383) *unendlich viele* durch additive ganze Multipla von $2\pi i$ sich unterscheidende Lösungen, deren *jede* wir als einen (sc. natürlichen[1])) *Logarithmus* von x bezeichnen wollen, in Zeichen:

$$y = \operatorname{Lg} x \quad (\text{also: } e^{\operatorname{Lg} x} = x). \tag{3}$$

Setzt man:

$$y = \varphi + \psi i, \tag{4}$$

so ist unter den Lösungen von Gl. (1) *eine* und *nur* eine, welche den Bedingungen genügt (s. a. a. O. Gl. (7)):

$$\begin{cases} -\infty < \varphi < +\infty \\ -\pi < \psi \leqq +\pi. \end{cases} \tag{5}$$

Diese bezeichnen wir als den *Hauptwert* von $\operatorname{Lg} x$; und da dieser *Hauptwert* von $\operatorname{Lg} x$ im Falle eines *reellen positiven* x mit demjenigen zusammenfällt[2]), für den bisher das Zeichen (2) benützt wurde, so wollen wir das letztere von jetzt ab für *beliebige* x zur Bezeichnung des *Hauptwertes* beibehalten. $y = \lg x$ ist dann die *einzige* Umkehrung der Gl. (1), für welche $x = 1$ und $y = 0$ zusammengehörige Werte sind. Zwischen allen möglichen Werten der *unendlich-vieldeutigen Funktion* $\operatorname{Lg} x$ und ihrem *Hauptwert* $\lg x$ besteht (mit Einschluß des letzteren) die Beziehung:

$$\operatorname{Lg} x = \lg x + 2n\pi i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{6}$$

Hieran anknüpfend wollen wir den durch irgendein festes n *eindeutig* charakterisierten Wert („*Zweig*") von $\operatorname{Lg} x$ mit $\operatorname{Lg}_n x$ bezeichnen (so daß also insbesondere: $\operatorname{Lg}_0 x \equiv \lg x$).

Die Einführung der Bezeichnung (4) ergibt sodann:

$$\lg x = \varphi + \psi i, \quad \text{also} \quad x = e^{\varphi + \psi i}, \quad |x| = e^{\varphi}, \quad \varphi = \lg |x|$$

und daher:

$$\begin{cases} \lg x = \lg |x| + \psi i \qquad (-\pi < \psi \leqq \pi)^{3)} \\ \operatorname{Lg}_n x = \lg |x| + (\psi + 2n\pi) i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{cases} \tag{7}$$

2. Wie die Gl. (7) zeigen, stimmt der *reelle* Teil *jedes* $\operatorname{Lg} x$ mit demjenigen von $\lg x$ überein. Er ist also für jedes von *Null* verschiedene

---

1) Wir werden dieses Beiwort von jetzt ab weglassen.

2) Die zweite der Bedingungen (5) nimmt in diesem Falle die Form an: $\psi = 0$

3) Man hat also speziell: $\lg(-1) = \pi i$, $\lg i = \frac{\pi i}{2}$, $\lg(-i) = -\frac{\pi i}{2}$.

endliche x (trotz der unendlichen Vieldeutigkeit von $\mathrm{Lg}\, x$) eine *eindeutige* und überdies *stetige* Funktion von x. Ist nämlich: $x' \neq x$ und etwa: $|x'| > |x| \geqq \varrho > 0$, so hat man: $\lg|x'| > \lg|x|$ (s. I_1, § 32, Ungl. (17), S. 197) und sodann (s. I_1, § 34, Ungl. (3), S. 206):

$$\lg|x'| - \lg|x| = \lg\left|\frac{x'}{x}\right| = \lg\left(1 + \frac{|x'| - |x|}{|x|}\right)$$

$$(8) \qquad < \frac{|x'| - |x|}{|x|} \leqq \frac{|x' - x|}{\varrho},$$

diese Differenz wird also gleichzeitig mit $|x' - x|$ *beliebig klein* (während sie in dem zunächst ausgeschlossenen Falle: $|x'| = |x|$ geradezu verschwindet).

Die *Stetigkeit* kommt auch dem *imaginären* Teile von $\lg x$ bzw. $\mathrm{Lg}_n x$ zu, doch sind hier nicht nur die beiden Stellen $x = 0$ und $x = \infty$, sondern das ganze Gebiet der *negativen* Zahlen (also die Punkte der *negativen* Abszissenachse) *auszunehmen*, obschon daselbst $\lg x$ und $\mathrm{Lg}_n x$ bestimmte Zahlen sind. Bedeutet nämlich r eine beliebige *positive* Zahl, so besteht für $(-r)$ die (den Bedingungen (5) genügende) „Hauptdarstellung" (vgl. § 62, Nr. 6, S. 470)[1]):

$$-r = r \cdot e^{\pi i},$$

so daß daraus folgt:

$$(9) \qquad \lg(-r) = \lg r + \pi i, \quad \mathrm{Lg}_n(-r) = \lg r + (2n+1)\pi i$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Sei jetzt (s. Gl. (7)):

$$(7\mathrm{a}) \qquad \lg x = \lg|x| + \psi i,$$

wo x weder *Null*, noch *reell* und *negativ*, so daß man setzen kann:

$$|x| \geqq \varrho > 0, \qquad |\psi| = \pi - \varepsilon < \pi$$

und sei x' von *Null* verschieden, sonst beliebig, also:

$$(7\mathrm{b}) \qquad \lg x' = \lg|x'| + \psi' i, \quad \text{wo: } |x'| \geqq \varrho' > 0, \ -\pi < \psi' \leqq \pi.$$

Dann ist zur Begründung der oben ausgesprochenen Behauptung nur zu zeigen, daß $\psi' - \psi$ für $x' \to x$ nach *Null* konvergiert. Nun folgt aus

---

1) Aus der Hauptdarstellung:

$$x = |x| \cdot e^{\psi i}$$

folgt allgemein:

$$-x = |x| \cdot e^{(\psi \pm \pi) i}.$$

Dabei hat man das Vorzeichen von π, um die Hauptdarstellung zu erhalten, so zu wählen, daß $\psi \pm \pi$ in das Intervall $[-\pi(\text{exkl.}), +\pi]$ fällt, d. h. es ist zu nehmen $+\pi$, wenn $\psi \leqq 0$ (also $\eta \leqq 0$, falls: $x = \xi + \eta i$), dagegen $-\pi$, wenn $\psi > 0$ (also $\eta > 0$). In demselben Sinne findet man sodann:

$$\lg(-x) = \lg x \pm \pi i.$$

(7a, b):

(10) $$x = |x| \cdot e^{\psi i}, \quad x' = |x'| \cdot e^{\psi' i}$$

und daher:

$$e^{(\psi' - \psi) i} = \left|\frac{x}{x'}\right| \cdot \frac{x'}{x} = \left|1 - \frac{x' - x}{x'}\right| \cdot \left(1 + \frac{x' - x}{x}\right),$$

also:

(11) $$\lim_{x \to x'} e^{(\psi' - \psi) i} = 1.$$

Da andererseits: $|\psi' - \psi| \leqq |\psi'| + |\psi| < 2\pi - \varepsilon$, so folgt, daß der Gl. (11) *nur* genügt wird, wenn: $\lim\limits_{x' \to x} (\psi' - \psi) = 0$.

Damit ist die *Stetigkeit* auch des *imaginären* Teiles von $\lg x$ und somit allgemein von $\mathrm{Lg}_n\, x$ bewiesen für jede nicht der Halbachse $\overline{0, -\infty}$ angehörige Stelle x. Für jede dieser Halbachse angehörige (von 0 und $-\infty$ verschiedene) Stelle x hat der imaginäre Teil von $\lg x$ den Wert πi (s. Gl. (7)), während er für jede in hinlänglicher Nähe *unterhalb* der Halbachse gelegene Stelle dem Werte $(-\pi i)$ beliebig nahe kommt.

Durch Zusammenfassung der vorstehenden Ergebnisse findet man, daß $\lg x$ *„im Innern"* des von der Halbachse $\overline{0, -\infty}$ *begrenzten* Bereiches, den wir von jetzt ab schlechthin als den Bereich $\mathfrak{B}$ bezeichnen wollen eine *eindeutige* und *stetige* Funktion von $x = \xi + \eta i$ ist, die auch noch *stetig* bleibt, wenn η bei $\xi < 0$ von der *positiven* (= oberen) Seite gegen *Null* konvergiert, dagegen beim *Überschreiten* bzw. *Verlassen* jener Grenzgeraden in der Richtung nach *unten* einen *Stetigkeitssprung* um $(-2\pi i)$ erleidet (bei gleichzeitiger Stetigkeit des reellen Teiles). Das gleiche gilt für jeden der Zweige $\mathrm{Lg}_n\, x$.

Für $x = 0$ und $x = \infty$ ist $\lg x$ zunächst *nicht definiert*. Da aber $\lg |x|$ mit $|x|$ unbegrenzt zunimmt und andererseits $\lg |x| = -\lg \left|\frac{1}{x}\right|$ ist, so hat man:

$$\lim_{x \to 0} \lg |x| = -\infty, \quad \lim_{x \to \infty} \lg |x| = +\infty$$

und daher auf Grund der in § 15, Nr. 3 getroffenen Festsetzungen (siehe insbesondere Gl. (8a), (9b), S. 144):

(12) $$\begin{cases} \lg 0 = \infty \text{ und allgemein: } \mathrm{Lg}_n\, 0 = \infty \\ \lg \infty = \infty \quad \text{„} \qquad \text{„} \qquad \mathrm{Lg}_n\, \infty = \infty. \end{cases}$$

Die Stellen $x = 0$ und $x = \infty$ sind also jedenfalls *singuläre* für $\mathrm{Lg}\, x$, übrigens, wie sich noch zeigen wird, die einzigen singulären.

3. Aus (s. Gl. (7)):

$$\begin{matrix} \lg x = \lg |x| + \psi i \\ \lg x' = \lg |x'| + \psi' i \end{matrix} \quad \left(-\pi < \begin{Bmatrix} \psi \\ \psi' \end{Bmatrix} \leqq +\pi\right)$$

folgt:

$$\lg x + \lg x' = \lg |x x'| + (\psi + \psi') i.$$

Die *rechte* Seite dieser Gleichung stellt auf Grund der in Nr. 1 (s. Gl. (3)) gegebenen Definition, wegen:

$$e^{\lg x + \lg x'} = e^{\lg x} \cdot e^{\lg x'} = xx'$$

sicher einen der Werte von $\operatorname{Lg} xx'$ dar, aber nur dann den *Hauptwert*, wenn $\psi + \psi'$ denselben Grenzbedingungen, wie ψ und ψ' genügt, d. h. man hat:

$$(13) \qquad \lg xx' = \lg x + \lg x', \quad \text{falls: } -\pi < \psi + \psi' \leqq +\pi,[1]$$

(während im Falle $\psi + \psi' \leqq -\pi$ bzw. $\psi + \psi' > \pi$ durch Addition jener beiden Logarithmen $\operatorname{Lg}_{-1} xx'$ bzw. $\operatorname{Lg}_1 xx'$ zum Vorschein kommt, also umgekehrt $\lg xx' = \lg x + \lg x' \pm 2\pi i$ wird).

Durch wiederholte Anwendung dieser Schlußweise findet man, daß:

$$(13\text{a}) \qquad \lg x^n = n \lg x$$

nur dann, wenn: $-\pi < n\psi \leqq \pi$.

Analog ergibt sich:

$$(14) \qquad \lg \frac{x}{x'} = \lg x - \lg x', \; \textit{falls: } -\pi < \psi - \psi' \leqq +\pi$$

(gilt also insbesondere, wenn x *nahe* genug bei x' liegt, außer wenn x und x' durch die Halbachse $\overline{0, -\infty}$ getrennt sind oder eine der beiden Stellen *auf* dieser Halbachse, die andere *unterhalb* liegt).

Da hiernach andererseits:

$$\lg \frac{x'}{x} = \lg x' - \lg x, \; \textit{falls: } -\pi < \psi' - \psi \leqq +\pi, \text{ also: } -\pi \leqq \psi - \psi' < +\pi,$$

so gilt die Beziehung:

$$(15) \qquad \lg \frac{x'}{x} = -\lg \frac{x}{x'} \; \textit{falls: } -\pi < \psi - \psi' < +\pi,$$

nicht mehr für: $\psi - \psi' = \pm \pi$, also wenn: $\frac{x'}{x} = \left|\frac{x'}{x}\right| \cdot e^{\mp \pi i} = -\left|\frac{x'}{x}\right|$, d. h. *reell und negativ* (wie sich auch unmittelbar verifizieren läßt)[2]. Insbesondere hat man:

$$(15\text{a}) \qquad \lg \frac{1}{x} = -\lg x \text{ nur für: } -\pi < \psi < +\pi,$$

also mit Ausschluß von $x = |x| \cdot e^{\pm \pi i}$, d. h. *rein negativer* x (in welchem Falle $\lg \frac{1}{x} = -\lg |x| + \pi i = -\lg x + 2\pi i$ wird).

---

1) Dagegen gilt offenbar *ohne* Einschränkung:

$$\operatorname{Lg} xx' = \operatorname{Lg} x + \operatorname{Lg} x'.$$

2) Auch hier gilt wiederum *ohne* Einschränkung:

$$\operatorname{Lg} \frac{x}{x'} = \operatorname{Lg} x - \operatorname{Lg} x'$$
$$= -\operatorname{Lg} \frac{x'}{x}.$$

4. Wir zeigen jetzt, daß $\lg x$ (bzw. $\operatorname{Lg}_n x$) für jede *im Innern* von $\mathfrak{B}$ gelegene Stelle x_0 sich *regulär* verhält.

Da $\lg x$ diejenige *einzige* Umkehrung der Gl. (1), nämlich:

$$x = e^y, \quad \text{anders geschrieben:} \quad x - 1 = \sum_1^\infty \nu \frac{1}{\nu!} \cdot y^\nu$$

darstellt, für welche $x - 1$ und y gleichzeitig verschwinden, so besteht nach dem Hauptsatze des vorigen Paragraphen für eine gewisse Umgebung von $x = 1$ eine Entwicklung von der Form:

$$(16) \qquad y \equiv \lg x = \mathfrak{P}(x-1), \quad \text{wo: } \mathfrak{P}(x-1)_{x=1} = 0.$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten erweist sich die Methode von Nr 7 des vorigen Paragraphen als zweckdienlich. Durch Differentiation der ursprünglichen Gleichung findet man:

$$\frac{dx}{dy} = e^y$$

und hieraus:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} = \sum_0^\infty \nu (-1)^\nu (x-1)^\nu \text{ für } |x-1| < 1,$$

folglich mit Berücksichtigung von $y = 0$ für $x = 1$:

$$(17) \qquad y \equiv \lg x = \sum_0^\infty \nu (-1)^\nu \frac{1}{\nu+1} (x-1)^{\nu+1}$$

$$= \sum_1^\infty \nu (-1)^{\nu-1} \frac{1}{\nu} (x-1)^\nu$$

zunächst für $|x-1| < 1$.

Die obige Reihe *konvergiert* jedoch, abgesehen von der Stelle $x = 0$, wo sie nach $(-\infty)$ *divergiert*, noch (bedingt) für $|x-1| = 1$ (nach § 31, Nr. 2, S. 249) und liefert nach dem *Abel*schen Grenzwertsatze (§ 32, Nr. 5, S. 257) in diesem Umfange noch den Wert der *stetigen* Funktion $\lg x$[1]) (was übrigens im Sinne des Satzes von § 32, Nr. 7 sogar noch für die *Divergenz*stelle $x = 0$ gilt).

Es verdient bemerkt zu werden, daß die Existenz der Formel (17) sich auch ohne Benutzung des Hauptsatzes von § 69 erweisen läßt. Aus

1) Insbesondere findet man für $x = 2$:

$$\lg 2 = \sum_1^\infty \nu \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu},$$

wie sich bereits bei früherer Gelegenheit (s. I_2, S. 415, Gl. (9)) auf anderem Wege ergeben hat.

der Forderung, eine (wegen: $\lg 1 = 0$) für $x = 1$ verschwindende Potenzreihe herzustellen, welche der Gleichung genügt:

$$e^{\mathfrak{P}(x-1)} = x, \tag{18}$$

folgt (die Lösbarkeit dieser Aufgabe vorausgesetzt) durch Differentiation:

$$\mathfrak{P}'(x-1) \cdot e^{\mathfrak{P}(x-1)} = 1,$$

und wenn man diese Gleichung durch die vorhergehende dividiert:

$$\mathfrak{P}'(x-1) = \frac{1}{x} = \sum_0^\infty {}^{\nu} (-1)^\nu (x-1)^\nu \quad (\text{für } |x-1| < 1), \tag{19}$$

also übereinstimmend mit Gl. (17):

$$\mathfrak{P}(x-1) = \sum_1^\infty {}^{\nu} (-1)^{\nu-1} \frac{1}{\nu} (x-1)^\nu. \tag{20}$$

Damit ist zunächst nur gezeigt: wenn es überhaupt eine der Forderung (18) genügende Reihe $\mathfrak{P}(x-1)$ gibt, so muß sie die Form (20) besitzen. Es bleibt noch die wirkliche Existenz der Beziehung (18) zu erweisen. Ordnet man die beständig konvergierende Reihe:

$$e^{\mathfrak{P}(x-1)} \equiv \sum_0^\infty {}^{\nu} \frac{1}{\nu!} (\mathfrak{P}(x-1))^\nu$$

nach Potenzen von $x-1$, so mag sich ergeben:

$$e^{\mathfrak{P}(x-1)} = \sum_0^\infty {}^{\nu} c_\nu (x-1)^\nu \quad (\text{wo: } c_0 = 1). \tag{21}$$

Um die c_ν für $\nu \geqq 1$ zu bestimmen, bilden wir durch Differentiation:

$$\mathfrak{P}'(x-1) \cdot e^{\mathfrak{P}(x-1)} = \sum_1^\infty {}^{\nu} \nu c_\nu (x-1)^{\nu-1}$$

und durch Einsetzen von Gl. (19) und (21) in die linke Seite dieser Gleichung:

$$\left(\sum_0^\infty {}^{\nu} (-1)^\nu (x-1)^\nu\right)\left(\sum_0^\infty {}^{\nu} c_\nu (x-1)^\nu\right) = \sum_0^\infty {}^{\nu} (\nu+1) c_{\nu+1} (x-1)^\nu.$$

Durch Anwendung der *Cauchy*schen Multiplikationsregel und Koeffizientenvergleichung findet man hieraus (mit Berücksichtigung von $c_0 = 1$) zunächst:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0$$

und sodann durch vollständige Induktion: $c_\nu = 0$ auch für jedes $\nu > 2$, somit schließlich durch Einsetzen in Gl. (21):

$$e^{\mathfrak{P}(x-1)} = 1 + (x-1) = x, \text{ q. e. d}$$

5. Nun sei x_0 eine ganz beliebige Stelle *im Innern* von $\mathfrak{B}$. Dann findet man mit Benutzung von Gl. (17) die konvergente Entwicklung:

$$(22)\quad \lg\frac{x}{x_0} = \sum_1^{\infty}{}^{\nu}(-1)^{\nu-1}\frac{1}{\nu}\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\nu} \quad \textit{für:}\quad |x-x_0| \leqq |x_0| \ \textit{exkl.}\ x=0,$$

d. h. im Innern und auf der Peripherie eines durch den Nullpunkt gehenden Kreises um den Punkt x_0 mit Ausschluß der Stelle $x = 0$ (wo die Reihe wiederum nach $(-\infty)$ divergiert).

Andererseits besteht, solange x in passender Nähe von x_0 liegt, nach Gl. (14) die Beziehung:

$$(23)\qquad \lg\frac{x}{x_0} = \lg x - \lg x_0,$$

so daß zunächst *für eine gewisse Umgebung von* x_0 die Gl. (22) durch die folgende ersetzt werden kann:

$$(24)\qquad \lg x = \lg x_0 + \mathfrak{P}_{\lg}(x|x_0) \quad (= \lg x_0 + \mathfrak{P}_{\lg}(x-x_0)),$$

wenn für die dort auftretende Potenzreihe die vorliegende Bezeichnung eingeführt, diese letztere also definiert wird durch die Formel:

$$(25)\quad \mathfrak{P}_{\lg}(x|x_0) \equiv \sum_1^{\infty}{}^{\nu}(-1)^{\nu-1}\frac{1}{\nu}\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\nu} \quad (\textit{für:}\ |x-x_0| \leqq x_0 \ \text{exkl.}\ x=0).$$

Die Gl. (24) zeigt, daß die im Innern von $\mathfrak{B}$ eindeutige Funktion $\lg x$ daselbst durchweg *regulär* und somit nach dem Hauptsatze von § 48, Nr. 4 (S. 366) ebenda eine eindeutige *monogene analytische* Funktion von x ist.

Das gleiche gilt für jeden der im Innern von $\mathfrak{B}$ gleichfalls eindeutigen Zweige $\mathrm{Lg}_n\, x$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, und zwar findet man wegen:

$$\mathrm{Lg}_n\, x = \lg x + 2n\pi i, \quad \text{also:}\ \lg x_0 + 2n\pi i = \mathrm{Lg}_n\, x_0$$

aus der Reihenentwicklung (24) die damit vollkommen analoge (für $n = 0$ mit ihr zusammenfallende):

$$(24\text{a})\qquad \mathrm{Lg}_n\, x = \mathrm{Lg}_n\, x_0 + \mathfrak{P}_{\lg}(x|x_0).$$

Die Beziehungen (24), (24a) gelten sodann nicht nur für jene „gewisse Umgebung" der Stelle x_0, sondern für das ganze *an diese Umgebung sich unmittelbar anschließende Konvergenzgebiet* von $\mathfrak{P}_{\lg}(x|x_0)$, soweit dasselbe ein dem *Innern* von $\mathfrak{B}$ angehöriges *zusammenhängendes* Stück bildet, also die Grenzgerade $\overline{0, -\infty}$ *nicht überschreitet.* Ist das letztere der Fall, was allemal dann und nur dann eintritt, wenn $\xi_0 \equiv \Re(x_0) < 0$, also $x_0 = \xi_0 + \eta_0 i$ der *linken* Halbebene angehört, so gilt Gl. (24) bzw. (24a) nur für den die Stelle x_0 enthaltenden (größeren) Teil des Konvergenzgebietes, und zwar auf Grund der Stetigkeitsbetrachtung von Nr. 2 *mit Einschluß* der in die Gerade $\overline{0, -\infty}$ fallenden begrenzenden *Sehne* (exkl. $x = 0$), falls

x_0 dem *oberen* Teile der linken Halbebene angehört. *Jenseits* dieser trennenden Sehne und, falls x_0 dem *unteren* Teile der linken Halbebene angehört, schon *längs* derselben erleidet $\lg x$ einen *Stetigkeitssprung*, während $\mathfrak{P}_{\lg}(x|x_0)$ *stetig* bleibt, die weitere Gültigkeit der Beziehung (24) also ausgeschlossen erscheint. Andererseits kann aber die auf Grund von Gl. (24) zunächst für eine gewisse Umgebung von x_0 vorhandene Beziehung:

$$e^{\lg x_0 + \mathfrak{P}_{\lg}(x|x_0)} = x$$

nur bestehen, wenn ihre *linke* Seite nach Potenzen von x entwickelt mit der *rechten geradezu identisch* ist: sie muß daher gültig bleiben, solange diese Entwickelbarkeit besteht, d. h. schließlich, solange $\mathfrak{P}_{\lg}(x|x_0)$ *konvergiert.* In demselben Umfange muß also der Ausdruck $y = \lg x_0 + \mathfrak{P}_{\lg}(x|x_0)$ als eine Lösung der Gleichung $e^y = x$ *irgendeinen* der Werte von $\mathrm{Lg}\, x$ darstellen. Das kann aber *jenseits* bzw. *längs* jener das Konvergenzgebiet von $\mathfrak{P}_{\lg}(x|x_0)$ zerschneidenden Sehne nur ein solcher sein, der sich *stetig* an $\lg x$ anschließt. Da im Falle $\eta_0 > 0$ der imaginäre Teil von $\lg x$ bei $\eta \to +0$ und für $\eta = 0$ den Wert πi annimmt, andererseits der imaginäre Teil von $\mathrm{Lg}_1 x = \lg x + 2\pi i$ bei $\eta \to -0$ nach πi konvergiert, so bildet $\mathrm{Lg}_1 x$ längs jener Sehne die *stetige* und somit nach dem Gesagten *analytische* Fortsetzung von $\lg x$. In ähnlicher Weise würde im Falle $\eta_0 < 0$ der imaginäre Teil von $\lg x$ bei $\eta \to -0$ nach $-\pi i$ konvergieren und sodann $\lg x$ für $\eta \geqq 0$ in $\mathrm{Lg}_{-1} x$ seine analytische Fortsetzung finden.[1])

Die Anwendung der gleichen Schlußweise auf Gl. (24a) zeigt, daß $\mathrm{Lg}_n x$, wenn x die trennende Sehne überschreitet, in $\mathrm{Lg}_{n+1} x$ bzw. $\mathrm{Lg}_{n-1} x$ übergeht, je nachdem x_0 dem oberen oder unteren Teile der linken Halbebene angehört.

6. Zur besseren Veranschaulichung des im vorstehenden geschilderten Zusammenhanges zwischen den verschiedenen Zweigen:

$$\mathrm{Lg}_n x \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

denke man sich längs der Halbachse $\overline{0, -\infty}$ einen *Schnitt* in der Weise geführt, daß die Strecke $\overline{0, -\infty}$ mit der *oberen* linken Halbebene verbunden bleibt, diese selbst also durch die erstere *abgeschlossen* wird, während die *untere* linke Halbebene *offen* bleibt. In der so *zerschnittenen Ebene*, welche nunmehr die Rolle des zuvor mit $\mathfrak{B}$ bezeichneten Bereiches

1) Wird x_0 auf der Geraden $\overline{0, -\infty}$ (also rein negativ) angenommen, so hat die Summe der Reihe $\lg x_0 + \mathfrak{P}_{\lg}(x|x_0)$ in dem *oberen* Halbkreise des Konvergenzkreises (mit dem Mittelpunkte x_0 und dem Radius $|x_0|$) einschließlich des begrenzenden Durchmessers den Wert $\lg x$, in dem *unteren* Halbkreise den Wert $\lg x + 2\pi i = \mathrm{Lg}_1 x$.

spielt, ist jeder Zweig $\text{Lg}_n\, x$ eine *eindeutige monogene analytische Funktion*, die sich für jede nicht auf dem *Schnitte* gelegene Stelle *regulär* verhält und auf dem letzteren noch *stetig* bleibt.

Denkt man sich jetzt die zerschnittene Ebene längs des Schnittes wieder zusammengeheftet, übrigens unter Beibehaltung der kurzen Bezeichnung *Schnitt* (= ehemaliger Schnitt) für die Halbachse $\overline{0, -\infty}$, so erscheint $\text{Lg}\, x$ in der ungeschnittenen Ebene als eine zwar *unendlich vieldeutige*, nichtsdestoweniger *monogene analytische Funktion*, die an jeder von 0 und ∞ verschiedenen Stelle sich *regulär* verhält und deren *gesamter Wertvorrat* aus jedem einzelnen ihrer Funktionselemente durch analytische Fortsetzung hergeleitet werden kann.

Geht man von einer nicht gerade auf dem Schnitte liegenden, sonst ganz beliebig gewählten Stelle x_0 aus und denkt sich die in deren Umgebung nach Gl. (24) bestehende Entwicklung:

$$\lg x = \lg x_0 + \mathfrak{P}_{\lg}(x \mid x_0)$$

längs eines den Punkt x_0 und den *Nullpunkt* im *Innern* enthaltenden einfach geschlossenen Weges etwa in positiver[1]) Umlaufsrichtung so lange analytisch fortgesetzt, bis wieder eine Entwicklung nach Potenzen von $x - x_0$, etwa mit Benutzung der Zwischenstellen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zum Vorschein kommt, so ergibt sich, da hierbei der *Schnitt einmal* überschritten wird, als Endresultat:

$$\begin{aligned}\lg x_0 + \mathfrak{P}_{\lg}(x \mid x_0, x_1, \;\ldots x_n, x_0) &= \text{Lg}_1(x)\\ &= \text{Lg}_1(x_0) + \mathfrak{P}_{\lg}(x \mid x_0)\,.\end{aligned}$$

Bei einem zweiten Umlauf dieser Art resultiert dann $\text{Lg}_2\, x$, beim $n$ten: $\text{Lg}_n\, x$ usf. Wird die analytische Fortsetzung in entgegengesetzter Umlaufsrichtung vollzogen, so kommen in analoger Weise $\text{Lg}_{-1}x$, $\text{Lg}_{-2}x$, .. zum Vorschein. Da aus den vorangehenden Betrachtungen unzweideutig hervorgeht, daß diese unbegrenzt fortsetzbare „*Verzweigung*" des Logarithmus ausschließlich auf dem Einfluß beruht, welchen der Nullpunkt durch seine Lage im *Innern* des Fortsetzungsweges ausübt, so bezeichnen wir ihn als *Verzweigungspunkt*, und zwar als einen *logarithmischen* oder auch mit Rücksicht auf die Unbegrenztheit des Verzweigungsprozesses als einen solchen *von unendlich hoher Ordnung*. Das gleiche gilt übrigens für den Punkt $x = \infty$, wegen:

$$(\lg x)_{x=\infty} = \left(\lg \frac{1}{x'}\right)_{x'=0} = -(\lg x')_{x'=0}\,.$$

Will man ferner die Veränderung feststellen, die irgendein Zweig $\text{Lg}_\nu\, x$ erleidet, wenn x von einer nicht auf dem Schnitte liegenden

1) Vgl. § 9, Nr. 9, Zusatz (S. 79).

Stelle x_0 ausgehend längs eines *stetigen* Weges variiert, der den Schnitt nur eine endliche Anzahl von Malen *durchsetzt*[1]), so hat man lediglich zu beachten, wie oft ein solches Durchsetzen stattfindet, mit der Unterscheidung, ob dies in *positiver* Richtung, d. h. von *oben* nach *unten*, oder in *negativer*, d. h. von *unten* nach *oben*, geschieht. Bei jeder *positiv* gerichteten Durchsetzung erleidet $\operatorname{Lg}_\nu x$ einen Zuwachs von $+2\pi i$, bei jeder *negativen* einen solchen von $-2\pi i$. Wenn der Weg den Schnitt nur *erreicht*, (ohne ihn zu durchsetzen), so hat dies keinerlei Einfluß, wenn es in *positiver* Richtung geschieht Ist die Richtung die *negative*, so bringt das *Erreichen* des Schnittes einen Zuwachs von $-2\pi i$, der aber sofort verschwindet, wenn der Weg den Schnitt wieder verläßt[2]), nur erhalten bleibt, wenn er auf dem Schnitte endigt. Hieraus ergibt sich, daß bei p Durchsetzungen in *positiver* und n solchen in *negativer* Richtung als Endergebnis $\operatorname{Lg}_\nu x + 2(p-n)\pi i$ erscheint, gleichgültig wie oft der Weg außerdem den Schnitt *erreichen* mag, *ohne* ihn zu durchsetzen. Nur wenn er von *unten* her kommend auf dem Schnitte *endigt*, ändert sich das obige Resultat noch um $-2\pi i$. — Etwas ähnliches würde stattfinden, wenn der *Ausgangspunkt* x_0 auf dem Schnitte angenommen wird. Dies hat auf das Endresultat gar keinen Einfluß, wenn der Weg zunächst nach *oben* führt, liefert jedoch zur Endsumme den Beitrag $+2\pi i$, sowie der Weg den Schnitt in der Richtung nach *unten* verläßt.

Der zuvor festgestellte Zusammenhang zwischen den verschiedenen eindeutigen Zweigen von $\operatorname{Lg} x$ zeigt, daß es freisteht, diese Zweige auf unendlich viele andere Arten voneinander zu *trennen*, indem man an die Stelle des *Schnittes* $\overline{0, -\infty}$ irgendeinen anderen treten läßt, der nicht einmal geradlinig zu sein braucht, sondern in einer beliebigen vom Nullpunkt ins Unendliche sich erstreckenden, offenen *Jordan*schen Kurve bestehen kann.

7. Ersetzt man in Gl. (17) bzw. (24) x durch $x+1$, so ergibt sich:

$$(26)\qquad \lg(1+x) = \sum_1^\infty {}^\nu (-1)^{\nu-1} \frac{1}{\nu} x^\nu \equiv \mathfrak{P}_{\lg}(x) \quad (|x| \leqq 1, \text{ exkl. } x = -1),$$

eine Reihe, welche gewöhnlich schlechthin als die *logarithmische* bezeichnet wird. Da $1+x$ *reell* und $\leqq 0$, wenn x *reell* und $\leqq -1$, so übernimmt die Stelle $x = -1$ die früher vom Nullpunkt gespielte Rolle,

1) Wir sagen „durchsetzt", nicht: „schneidet", um die Möglichkeit offen zu lassen, daß der Weg auch stückweise mit dem Schnitte zusammenfallen kann.

2) sc. in der Richtung nach *unten*: es sollte ja im vorliegenden Falle gerade *kein* Durchsetzen stattfinden.

$\lg(1+x)$ ist daher eindeutig definiert und regulär im Innern desjenigen Bereiches, welcher begrenzt wird durch den *Schnitt* $\overline{-1, -\infty}$, und wird in diesem Umfange durch die analytischen Fortsetzungen der Reihe $\mathfrak{P}_{\lg}(x)$ dargestellt, soweit deren Konvergenzkreise (die sämtlich durch den Punkt -1 gehen) den *Schnitt* nicht überschreiten.

Ersetzt man in Gl. (26) x durch $-x$, so folgt:

$$\lg(1-x) = -\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu} x^{\nu} \quad (|x| \leqq 1, \text{ exkl. } x = 1), \tag{27}$$

und hier gelten die analogen Bemerkungen, wie die zuletzt an Gl. (26) geknüpften, mit dem einzigen Unterschiede, daß jetzt die Strecke $\overline{1, +\infty}$ als *Schnitt* zu gelten hat.

Aus Gl. (26), (27) folgt:

$$\frac{1}{2}\{\lg(1+x) - \lg(1-x)\} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1} \quad (|x| \leqq 1, \text{ exkl. } x = \pm 1).$$

Da für *reelle* x bei $|x| < 1$ die beiden Logarithmen *reell* ausfallen und somit ihre Differenz ohne weiteres durch $\lg\frac{1+x}{1-x}$ ersetzt werden kann, so läßt sich zunächst für solche reelle x die vorstehende Gleichung durch die folgende ersetzen:

$$\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1} \tag{28}$$

Da andererseits die linke Seite im Innern des *von den beiden Schnitten*[1]) $\overline{-1, -\infty}$ und $\overline{1, +\infty}$ begrenzten Bereiches eindeutig definiert und regulär ist, so gilt Gl. (28) für den ganzen Konvergenzbereich der betreffenden Reihe, d. h. für $|x| \leqq 1$ mit Ausnahme der Stellen ± 1, für welche eigentliche Divergenz nach $+\infty$ bzw. $-\infty$ stattfindet $\left(\text{wiederum in Übereinstimmung mit } \lim\limits_{x\to 1} \lg\frac{1+x}{1-x} \text{ bzw. } \lim\limits_{x\to -1} \lg\frac{1+x}{1-x}\right)$.

---

1) Auf diesen beiden Schnitten, also für reelle x mit absoluten Beträgen > 1 wird $\frac{1+x}{1-x}$ *rein negativ*

§ 71. Der Arcustangens und seine Beziehungen zum Logarithmus. — Reihenentwicklungen für den Hauptwert arctg x. — Die unendlich vieldeutige Funktion Arctg x. — Endgültige Lösung der Aufgabe, jede beliebige komplexe Zahl x in der Form $|x| \cdot e^{\psi i}$ darzustellen. — Der reelle und imaginäre Teil des Logarithmus und der logarithmischen Reihe.

1. Aus § 69, Nr. 7, Gl. (31), (32) ergibt sich durch Vertauschung von x und y, daß die Gleichung:

$$x = \operatorname{tang} y, \tag{1}$$

die in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Umkehrung besitzt:

$$y = \sum_0^\infty (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1}. \tag{2}$$

Im übrigen muß ja die Umkehrung von Gl. (1) eine *unendlich vieldeutige* Funktion sein, da alle möglichen $y + n\pi (n = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots)$ bei festgehaltenem y das gleiche x erzeugen, also umgekehrt zu jedem x unendlich viele *verschiedene* y gehören, nämlich alle von einem beliebig unter ihnen ausgewählten um ein ganzes Multiplum von π verschiedenen und *nur* diese. Aus: tang y' = tang y, anders geschrieben:

$$\frac{1}{i} \cdot \frac{e^{y'i} - e^{-y'i}}{e^{y'i} + e^{-y'i}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{e^{yi} + e^{-yi}}$$

oder auch:

$$\frac{e^{2y'i} - 1}{e^{2y'i} + 1} = \frac{e^{2yi} - 1}{e^{2yi} + 1}$$

folgt nämlich nach Wegschaffung der Nenner:

$$e^{2y'i} - e^{2yi} = e^{2yi} - e^{2y'i},$$

also:

$$e^{2y'i} = e^{2yi} \text{ und somit: } y' = y + n\pi$$

(ohne jede andere Möglichkeit).

Diese unendlich vieldeutige Umkehrung y von Gl. (1) heißt *Arcustangens* von x, in Zeichen:

$$y = \operatorname{Arctg} x. \tag{3}$$

Wird analog wie beim Logarithmus aus ihrem gesamten Wertvorrat ein bestimmter *eindeutiger Zweig* als *Hauptwert* ausgewählt und mit arctg x bezeichnet, so sind alle möglichen Werte in der Form enthalten:

$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{4}$$

Jener fragliche *Hauptwert* soll nun zunächst durch die Reihe (2) defi-

niert werden, soweit diese letztere *konvergiert*, so daß also:

$$(5)\qquad \operatorname{arctg} x = \sum_0^\infty {}_\nu (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1} \quad \textit{für: } |x| \leqq 1 \text{ exkl. } x = \pm i.$$

Für $x = \pm i$ findet eigentliche Divergenz in der Weise statt, daß die vom Faktor i befreite Reihe nach $\pm\infty$ divergiert. Da sodann (nach dem Satze von § 32, Nr. 7, S. 259): $\lim\limits_{x \to \pm i} \operatorname{arctg} x = \infty$, so erweisen sich die beiden Stellen $x = \pm i$ als *singuläre* für $\operatorname{arctg} x$.

Für $x = 1$ geht die Reihe (5) in die *Leibniz*sche: $\sum_0^\infty {}_\nu (-1)^\nu \frac{1}{2\nu+1} = \frac{\pi}{4}$ (vgl § 65, Gl. (5), S. 495) über, so daß also:

$$(5\text{a})\qquad \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

wie man (mit Berücksichtigung der aus Gl. (5) für arctg 1 sich ergebenden Schranken: $0 < \operatorname{arctg} 1 < 1$, die für keinen anderen Wert von Arctg 1 passen) auch unmittelbar aus der Beziehung: $\operatorname{tang} \frac{\pi}{4} = 1$ hätte erschließen und sodann im Anschluß an Gl. (5) zur *Summation* der *Leibniz*schen Reihe benützen können.

2. Die Vergleichung der Reihe (5) mit derjenigen in Gl. (28) des vorigen Paragraphen zeigt, daß sie aus der letzteren durch Substitution von xi an Stelle von x und Division mit i hervorgeht. Infolgedessen ergibt sich:

$$(6)\qquad \operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \lg \frac{1+xi}{1-xi}$$

zunächst für $|x| \leqq 1$, und diese Beziehung kann dann dazu dienen, um den *Hauptwert* von $\operatorname{Arctg} x$ für die ganze Ebene zu definieren $\Big($wie sich auch unmittelbar ergeben würde, wenn man vor der Auflösung von Gl. (1) nach y die rechte Seite in die Form setzt: $\operatorname{tang} y = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2yi}-1}{e^{2yi}+1}\Big)$.

Infolge der Substitution von xi für x in § 70, Gl. (28) treten an die Stelle der dort eingeführten *Schnitte* $\overline{-1, -\infty}$ und $\overline{1, +\infty}$ die folgenden: $\overline{i, \infty i}$ und $\overline{-i, -\infty i}$ (das soll bedeuten: die beiden Stücke der imaginären Achse, die sich von i bzw. $-i$ in positiver bzw. negativer Richtung ins Unendliche erstrecken). Im Innern des von diesen Schnitten begrenzten Bereiches ist $\operatorname{arctg} x$ durchweg regulär, eine monogene analytische Funktion.

Da der imaginäre Teil jedes Hauptlogarithmus in den Grenzen $-\pi i$ (*exkl.*) und $+\pi i$ (*inkl.*) liegt, so folgt aus Gl. (6), daß:

$$(7)\qquad -\frac{\pi}{2} < \Re(\operatorname{arctg} x) \leqq +\frac{\pi}{2}$$

(konform mit der in der Trigonometrie für reelle x üblichen Festsetzung). Wir wollen zeigen, daß zugleich $\Re(\operatorname{arctg} x)$ *positiv* bzw. *negativ* ausfällt, je nachdem x der *rechten* oder *linken* Halbebene angehört (im ersteren Falle sogar einschließlich der begrenzenden imaginären Achse mit Ausnahme der Strecke $\overline{-i, +i}$). Setzt man:

$$x = re^{\psi i}, \quad \frac{1+xi}{1-xi} = r'e^{\psi' i} \qquad \left(-\pi < \begin{Bmatrix}\psi \\ \psi'\end{Bmatrix} \leqq +\pi\right),$$

so wird:

$$\lg \frac{1+xi}{1-xi} = \lg r' + \psi' i$$

und daher nach Gl. (6):

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{arctg} x = \tfrac{1}{2}\psi' - \tfrac{i}{2}\lg r', \quad \text{also:} \ \Re(\operatorname{arctg} x) = \tfrac{1}{2}\psi'.$$

Nun findet man:

$$r' \cdot e^{\psi' i} = \frac{1 + ire^{\psi i}}{1 - ire^{\psi i}} \cdot \frac{1 + ire^{-\psi i}}{1 + ire^{-\psi i}} = \frac{1 - r^2 + 2ir\cos\psi}{1 + r^2 + 2r\sin\psi}$$

und hieraus:

$$r' \sin\psi' = \frac{2r\cos\psi}{1 + r^2 + 2r\sin\psi}.$$

Der *Nenner* dieses Ausdrucks wird im Intervall $-\pi < \psi \leqq +\pi$ nur *Null* für $\psi = -\frac{\pi}{2}$, wenn zugleich $r = 1$, in jedem andern Falle ist er *größer* als $(1-r)^2$, also *positiv*. Der *Zähler* wird *Null* für $\psi = \pm\frac{\pi}{2}$. Somit hat $\sin\psi'$ nach Ausschluß von $\psi = \pm\frac{\pi}{2}$ *dasselbe Vorzeichen*, wie $\cos\psi$, so daß also:

$$\sin\psi' > 0 \quad \text{für} \quad |\psi| < \frac{\pi}{2}, \qquad \sin\psi' < 0 \quad \text{für} \quad |\psi| > \frac{\pi}{2}.$$

Da andererseits ψ' bei $0 < |\psi'| < \pi$ dasselbe Vorzeichen hat wie $\sin\psi'$, so folgt schließlich mit Berücksichtigung von Gl. (8), daß wie behauptet:

$$\text{(10)} \qquad \Re(\operatorname{arctg} x) \begin{cases} > 0 & \textit{für} \quad |\psi| < \frac{\pi}{2}, \quad \textit{also für} \quad \xi > 0 \\ < 0 & \text{,,} \quad |\psi| > \frac{\pi}{2}, \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \xi < 0. \end{cases}$$

Für den hierbei noch ausgeschlossenen Fall $\psi = \pm\frac{\pi}{2}$, d. h. wenn x der *imaginären Achse* angehört, also von der Form $x = \eta i$ ist, hat man (nach Ausscheidung der hier nicht in Betracht kommenden singulären Stellen $x = \pm i$) zu unterscheiden, ob $|\eta| < 1$ oder $|\eta| > 1$. Im ersteren Falle gehört ja das in Frage kommende Stück $\overline{-i, +i}$, abgesehen von den Grenzen $\pm i$, dem Regularitätsbereich von $\operatorname{arctg} x$ an (s. Gl. (5)) und da $\Re(\operatorname{arctg} x)$, wie eben bewiesen, zu beiden Seiten jener Strecke *verschiedene*

Vorzeichen hat, so muß infolge der Stetigkeit

$$\text{(11a)} \qquad \mathfrak{R}(\operatorname{arctg} \eta i) = 0 \qquad (|\eta| < 1)$$

sein. In der Tat findet man für $|\eta| < 1$:

$$\text{(12a)} \qquad \operatorname{arctg} \eta i = \frac{1}{2i} \lg \frac{1-\eta}{1+\eta}, \text{ d. h. } \textit{rein imaginär}.$$

Nimmt man dagegen $|\eta| > 1$, so wird:

$$\text{(12b)} \quad \operatorname{arctg} \eta i = \frac{1}{2i} \lg \frac{1-\eta}{1+\eta} = \frac{1}{2i}\left(\lg \frac{\eta-1}{\eta+1} + \pi i\right) = \frac{1}{2i} \lg \frac{\eta-1}{\eta+1} + \frac{\pi}{2}$$

und daher:

$$\text{(11b)} \qquad \mathfrak{R}(\operatorname{arctg} \eta i) = \frac{\pi}{2} \qquad (|\eta| > 1).$$

3. Daß $\operatorname{arctg} x$ eine *ungerade* Funktion, also:

$$\text{(13)} \qquad \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x,$$

folgt für $|x| \leqq 1$ unmittelbar aus der Reihenentwicklung (5), gilt dann aber ohne weiteres für den ganzen Regularitätsbereich von $\operatorname{arctg} x$, d. h. in der ganzen Ebene mit Ausnahme der beiden *Schnitte* $x = \eta i$ $(|\eta| \geqq 1)$. Aus Gl. (12b) folgt für $|\eta| > 1$:

$$\operatorname{arctg}(-\eta i) = \frac{1}{2i} \lg \frac{\eta+1}{\eta-1} + \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2i} \lg \frac{\eta-1}{\eta+1} + \frac{\pi}{2}$$

und daher mit nochmaliger Benutzung von Gl. (12b):

$$\text{(13a)} \qquad \operatorname{arctg}(-\eta i) = -\operatorname{arctg} \eta i + \pi \qquad (|\eta| > 1).$$

Ersetzt man ferner in Gl. (6) x durch $\frac{1}{x}$, so ergibt sich[1]):

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{1}{2i} \lg \frac{x+i}{x-i} = \frac{1}{2i} \lg\left(-\frac{1-xi}{1+xi}\right)$$
$$= \frac{1}{2i}\left(-\lg \frac{1+xi}{1-xi} \pm \pi i\right)^{2)}$$

und durch nochmalige Anwendung von Gl. (6) auf die rechte Seite dieser Gleichung:

$$\text{(14)} \qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \pm \frac{\pi}{2}$$

---

1) Statt $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ schreibt man auch: $\operatorname{arccot} x$ Aus:

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \text{ also: } \frac{1}{x} = \operatorname{tang} y,$$

folgt nämlich:

$$x = \cot y$$

und daher:

$$y = \operatorname{arccot} x,$$

wenn man nach Analogie der bisherigen Bezeichnungen den Hauptwert der Umkehrung von $x = \cot y$ mit $\operatorname{arccot} x$ bezeichnet.

2) Vgl. Fußn. 1, S. 541.

d. h. die links stehende Summe ist *konstant*, zum mindesten in jedem zusammenhängenden Gebiete, in welchem sie *stetig* ist. Da $\operatorname{arctg} x$ diese Eigenschaft in der ganzen Ebene mit Ausnahme der beiden Schnitte $\overline{i, \infty i}$, $\overline{-i, -\infty i}$ besitzt, diese letzteren aber durch Substitution von $\frac{1}{x}$ auf die Strecken $\overline{-i, 0}$, $\overline{i, 0}$ abgebildet werden und somit $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ *regulär*, also auch *stetig* ist für jede nicht der Strecke $\overline{-i, +i}$ angehörige Stelle, so *zerfällt* der *Stetigkeitsbereich* der obigen Summe in die beiden durch die imaginäre Achse getrennten *Teilgebiete*, d. h. die betreffenden beiden *Halbebenen*. Nun hat man mit Benutzung von Gl. (5a) und (13):

$$\left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)_{x=1} = \frac{\pi}{2}, \qquad \left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)_{x=-1} = -\frac{\pi}{2}$$

und somit allgemein:

$$(15) \qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} \begin{cases} = \frac{\pi}{2} & \text{für } \xi > 0 \\ = -\frac{\pi}{2} & \text{„ } \xi < 0. \end{cases}$$

Im Falle $\xi = 0$, also für $x = \eta i$ bleibt (abgesehen von den singulären Stellen $x = \pm i$) noch die *erste* der beiden Formeln gültig. Sei etwa: $|\eta| > 1$, also $\left|\frac{1}{\eta}\right| < 1$, so findet man:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}\frac{1}{\eta i} &= \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\eta} i\right) = -\operatorname{arctg}\frac{1}{\eta} i \text{ (nach Gl. (13))} \\ &= -\frac{1}{2i}\lg\frac{\eta-1}{\eta+1} \text{ (nach Gl. (12a))} \\ &= -\operatorname{arctg}\eta i + \frac{\pi}{2} \text{ (nach Gl. (12b))} \end{aligned}$$

und daher:

$$(15\text{a}) \qquad \operatorname{arctg}\eta i + \operatorname{arctg}\frac{1}{\eta i} = \frac{\pi}{2}$$

zunächst für $|\eta| > 1$, aber infolge der Symmetrie der linken Seite in bezug auf ηi und $\frac{1}{\eta i}$ ohne weiteres auch für $|\eta| < 1$ (überdies, wie bereits bemerkt, in Übereinstimmung mit der *ersten* der Formeln (15)).

4. Die Beziehungen (15) können dazu dienen, um $\operatorname{arctg} x$ für $x \geqq 1$ (exkl $x = \pm i$) nach *negativen* Potenzen von x zu entwickeln. Man findet zunächst aus Gl. (5) durch Substitution von $\frac{1}{x}$ an Stelle von x:

$$(16) \quad \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \sum_0^\infty{}^{\nu} (-1)^\nu \frac{x^{-(2\nu+1)}}{2\nu+1} \quad \textit{für } |x| \geqq 1 \ (\textit{exkl. } x = \pm i)^{1})$$

---

1) Daß hiernach $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ an der Stelle $x = \infty$ sich *regulär* verhält, ist ja in Wahrheit nur eine andere Ausdrucksweise dafür, daß $\operatorname{arctg} x$ für $x = 0$ *regulär* ist.

und daher mit Benutzung der Gl. (15), (15a) für $|x| \geqq 1$ (exkl. $x = \pm i$):

$$(17)\qquad \operatorname{arctg} x \begin{cases} = \dfrac{\pi}{2} - \sum\limits_0^\infty{}' (-1)^\nu \dfrac{x^{-(2\nu+1)}}{2\nu+1} & \textit{falls: } \xi \geqq 0 \\ = -\dfrac{\pi}{2} - \sum\limits_0^\infty{}' (-1)^\nu \dfrac{x^{-(2\nu+1)}}{2\nu+1} & \text{„} \quad \xi < 0. \end{cases}$$

Hieraus würde für $x \to \infty$ folgen, daß:

$$(17\text{a})\qquad \lim_{x \to \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \text{ bzw. } = -\frac{\pi}{2},$$

je nachdem x innerhalb der rechten oder der linken Halbebene dem Unendlichen zustrebt, und daß im Falle $x = \eta i$ für $\eta \to \pm \infty$ noch die *erste* Formel gilt. Da andererseits $\operatorname{arctg} \infty$ *nicht definiert* ist, wollen wir, um die *Eindeutigkeit* des Hauptwertes $\operatorname{arctg} x$ auch für $x = \infty$ zu erhalten, mit Rücksicht auf Ungl. (7) definitionsweise die Festsetzung treffen:

$$(18)\qquad \operatorname{arctg} \infty = \frac{\pi}{2}.$$

Die in (17) unter dem Summenzeichen stehende Reihensumme ist auf den beiden *Schnitten* $x = \eta i$ ($|\eta| > 1$) *rein imaginär* und nach der rechten, wie linken Seite hin *stetig*. Man findet daher aus den Gl. (17) (immer $|\eta| > 1$ vorausgesetzt) für $\xi \to \pm 0$:

$$(19)\qquad \lim_{x \to +0+\eta i} \Re(\operatorname{arctg} x) = +\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to -0+\eta i} \Re(\operatorname{arctg} x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Da andererseits nach Gl. (11b):

$$\Re(\operatorname{arctg} \eta i) = +\frac{\pi}{2} \qquad (|\eta| > 1),$$

so ist bei Annäherung von x an jeden der beiden Schnitte von *rechts* her für $\operatorname{arctg} x$ noch *Stetigkeit* vorhanden, während beim Verlassen des Schnittes in der Richtung nach *links* $\operatorname{arctg} x$ einen Stetigkeitssprung von der Größe $-\pi$ erleidet. Dagegen nimmt die *erste* rechte Seite der Formel (17) beim Überschreiten eines jeden der beiden Schnitte *stetig* bleibend den Wert $\operatorname{arctg} x + \pi$ an, geht also in einen neuen *Zweig* der unendlich vieldeutigen Funktion $\operatorname{Arctg} x$ über, der mit $\operatorname{Arctg}_1 x$ zu bezeichnen wäre, wenn wir nach Analogie der beim Logarithmus eingeführten Bezeichnungsweise setzen:

$$(20)\qquad \operatorname{arctg} x + n\pi = \operatorname{Arctg}_n x \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Jener $\operatorname{Arctg}_1 x$ ist dann wieder im Innern des von den beiden Schnitten begrenzten Bereiches *eindeutig* und *regulär*. Bei *stetiger*, d. h. in dem vorliegenden Falle *analytischer* Fortsetzung über einen der beiden Schnitte in der Richtung von *rechts* nach *links* geht er dann in $\operatorname{Arctg}_2 x$ über usf.

Analog würde die *analytische* Fortsetzung des arctg x von der *linken* auf die *rechte* Seite eines jeden der beiden Schnitte den Wert $\text{Arctg}_{-1}\, x$ erzeugen (mit dem Unterschiede, daß hier dieser Wert schon *auf* dem Schnitte selbst zum Vorschein kommt), in gleicher Weise $\text{Arctg}_{-1}\, x$ in $\text{Arctg}_{-2}\, x$ übergehen usf.

Es besitzt hiernach Arctg x den Charakter einer zwar unendlich vieldeutigen, aber monogenen, also mit ihrem gesamten Wertvorrat aus einem beliebigen ihrer Elemente durch analytische Fortsetzung hervorgehenden Funktion.

Bedeutet x_0 irgendeine der *rechten* Halbebene angehörige Stelle und wird $\text{arctg}\, x \equiv \mathfrak{P}(x \mid x_0)$ längs eines *einfach geschlossenen* Weges, der nur *einen* der beiden Schnitte *einmal* von *rechts* nach *links* überschreitet, analytisch fortgesetzt, bis die Entwicklung wieder in eine solche nach Potenzen von $x - x_0$ zurückkehrt, so ist $\mathfrak{P}(x \mid x_0)$ in $\mathfrak{P}(x \mid x_0) + \pi$ übergegangen, erscheint dagegen unverändert, wenn der Weg *jeden* der beiden Schnitte *einmal* überschreitet. Da ein Weg der ersten Art stets eine und nur eine der beiden singulären Stellen $\pm i$ im *Innern* enthält und, wie aus den vorangehenden Betrachtungen hervorgeht, die in diesem Falle eintretende *Verzweigung* (von arctg x in $\text{Arctg}_1\, x$) ausschließlich auf diesem Umstande beruht, so spielen die Stellen $\pm i$ hier die Rolle von *Verzweigungspunkten* (und zwar *logarithmischen*, wie ja unmittelbar aus der Formel (6) hervorgeht). Zugleich zeigt das Verhalten bei Anwendung eines Fortsetzungsweges der zweiten Art, welcher ja *beide* Stellen $\pm i$ umschließen muß, daß diese letzteren in ihrer Wirkung sich gegenseitig aufheben.

Das vorstehende Ergebnis läßt sich leicht dahin verallgemeinern, daß ein *einfach geschlossener* Fortsetzungsweg dann und nur dann eine Verzweigung hervorbringt, wenn die Zahl, welche angibt, wie oft er *die beiden Schnitte zusammengenommen*[1]) *durchsetzt*[2]), eine *ungerade* ist.

Weiter ergibt sich sodann, daß bei Wiederholung des Fortsetzungsverfahrens längs eines Weges der eben bezeichneten Art $\text{Arctg}_2\, x$ zum Vorschein kommt, ebenso, wenn die Fortsetzungsrichtung von vornherein umgekehrt wird, $\text{Arctg}_{-1}\, x$, usf.

Schließlich erkennt man, daß bei analytischer Fortsetzung von arctg x längs eines ganz beliebigen stetigen Weges zwischen zwei Stellen x_0 und x (die man mit unerheblicher (d. h. leicht zu erledigender) Beschränkung der Allgemeinheit[3]) als nicht auf einem der Schnitte liegend, eventuell auch als zusammenfallend annehmen kann) als Endresultat erscheint:

---

1) In dieser Aussage ist selbstverständlich auch der Fall enthalten, daß einer der beiden Schnitte überhaupt nicht durchsetzt wird

2) Vgl. Fußn. 1, S. 549.

3) Vgl. die analogen Betrachtungen in Nr. 6 des vorigen Paragraphen (S. 547/9).

$\operatorname{arctg} x + (p - n)\pi$, wenn der fragliche Weg die beiden Schnitte zusammengenommen $p$mal in *„positiver“* Richtung (d. h. von *rechts* nach *links*), $n$mal in *„negativer“* (d. h. von *links* nach *rechts*) durchsetzt.

5. Die Einführung der Funktion Arctg x und der zu ihrer Berechnung verwendbaren Reihenentwicklungen bietet die Möglichkeit, eine wesentliche, an markanter Stelle noch bestehende Lücke nunmehr auszufüllen. Es handelt sich dabei um die Darstellung jeder beliebigen komplexen Zahl $x = \xi + \eta i$ in der *transzendenten* oder *trigonometrischen* Form: $x = |x| \cdot e^{\psi i} = |x| (\cos\psi + i \sin\psi)$. Das *Vorhandensein* solcher Darstellungen, insbesondere einer durch die Bedingung $-\pi < \psi \leqq \pi$ eindeutig charakterisierten sog. *Hauptdarstellung* wurde zwar in § 61, Nr. 2 (S. 457) und § 62, Nr. 6 (S. 470) außer Zweifel gesetzt, dagegen fehlte es bisher an einem Wege, das *„Argument“* oder die *„Amplitude“* ψ (vgl. § 62, Fußn. 2, S. 470) als Funktion von ξ und η explizite darzustellen bzw. zu berechnen.

Aus der Identität:

$$\xi + \eta i = |\xi + \eta i| \cdot \left(\frac{\xi}{|\xi + \eta i|} + \frac{\eta i}{|\xi + \eta i|}\right)$$

folgt, daß ψ den beiden Gleichungen zu genügen hat:

$$\cos\psi = \frac{\xi}{|\xi + \eta i|}, \quad \sin\psi = \frac{\eta}{|\xi + \eta i|}.$$

Wird vorläufig der Fall $\xi = 0$ ausgeschlossen, so ergibt sich weiter:

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\eta}{\xi}$$

und daher:

$$\psi = \operatorname{Arctg}\frac{\eta}{\xi},$$

wobei schließlich nur noch festzustellen ist, welche Werte von $\operatorname{Arctg}\frac{\eta}{\xi}$ als Lösung der vorliegenden Aufgabe in Betracht kommen. Da bereits feststeht, daß es stets eine und nur eine dem Intervall $[-\pi$ (exkl.), $+\pi]$ angehörige Zahl ψ gibt, welche eine Darstellung der verlangten Art, nämlich die Hauptdarstellung, liefert, so ist für dieses ψ ein *eindeutig bestimmter*, dem obigen Intervall angehöriger Wert von $\operatorname{Arctg}\frac{\eta}{\xi}$ zu nehmen, den wir als *erweiterten Hauptwert* des *Arcustangens* und durch die Schreibweise $\operatorname{arctg}(\eta | \xi)$ bezeichnen wollen und der nur dann mit dem *gewöhnlichen Hauptwert* $\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}$ zusammenfallen wird, wenn die Zahl ψ dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}\right.$ (exkl.), $\left.+\frac{\pi}{2}\right]$ angehört, d. h. wenn $\xi > 0$ ist (da ja der Fall $\xi = 0$ vorläufig ausgeschlossen wurde).

Ist dagegen $\xi < 0$, $\eta \geqq 0$ und daher: $\cos\psi < 0$, $\sin\psi \geqq 0$, so findet man: $\frac{\pi}{2} < \psi \leqq \pi$, also hat man für (den im 2ten Quadranten liegenden Bogen) ψ zu nehmen: $\operatorname{arctg}(\eta\,|\,\xi) = \operatorname{arctg}\frac{-\eta}{-\xi} + \pi = \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi} + \pi$.

Ist schließlich $\xi < 0$, $\eta < 0$ und daher: $\cos\psi < 0$, $\sin\psi < 0$, so findet man:

$$-\pi < \psi < -\frac{\pi}{2} \text{ (3ter Quadrant), also: } \operatorname{arctg}(\eta\,|\,\xi) = \operatorname{arctg}\frac{-\eta}{-\xi} - \pi$$
$$= \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi} - \pi.$$

Zusammenfassend ergibt sich somit:

$$\xi + \eta i = |\xi + \eta i| \cdot e^{\operatorname{arctg}(\eta\,|\,\xi)} \tag{21}$$

wo:

$$\operatorname{arctg}(\eta\,|\,\xi) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}, & \text{wenn } \xi > 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi} + \pi, & \text{„} \quad \xi < 0,\ \eta \geqq 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi} - \pi, & \text{„} \quad \xi < 0,\ \eta < 0. \end{cases} \tag{22}$$

In dem noch ausgeschlossenen Falle $\xi = 0$ $\left(\text{in welchem } \frac{\eta}{\xi} \text{ sinnlos wird}\right)$ findet man ohne weiteres aus den Gleichungen für $\cos\psi$, $\sin\psi$ (übereinstimmend mit der geometrischen Anschauung):

$$\begin{cases} \text{wenn } \eta > 0:\ \psi = \frac{\pi}{2} & \left(= \lim\limits_{\xi \to 0} \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}\right) \\ \text{wenn } \eta < 0:\ \psi = -\frac{\pi}{2} & \left(= \lim\limits_{\xi \to 0} \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi} - \pi\right). \end{cases} \tag{22a}$$

Als *allgemeinste* Lösung ψ ergibt sich schließlich:

$$\psi = \operatorname{arctg}(\eta\,|\,\xi) + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{23}$$

wo in den unter (22a) angeführten Fällen $\operatorname{arctg}(\eta\,|\,\xi)$ durch $\frac{\pi}{2}$ bzw. $-\frac{\pi}{2}$ zu ersetzen ist.

6. Die Beziehung (21) liefert auch ohne weiteres die noch fehlende explizite Darstellung des *imaginären* Teiles von $\lg(\xi + \eta i)$, nämlich:

$$\lg(\xi + \eta i) = \frac{1}{2}\lg(\xi^2 + \eta^2) + i \cdot \operatorname{arctg}(\eta\,|\,\xi), \tag{24}$$

wo wiederum im Falle $\xi = 0$ der Koeffizient von i durch $\pm\frac{\pi}{2}$ zu ersetzen ist, je nachdem $\eta \gtrless 0$.

Setzt man:

$$\xi + \eta i = 1 + re^{\vartheta i} = 1 + r\cos\vartheta + ir\sin\vartheta \quad (-\pi < \vartheta \leqq +\pi),$$

so wird:

$$(25)\quad \lg(1+re^{\vartheta i}) = \frac{1}{2}\lg(1+r^2+2r\cos\vartheta) + i\,\mathrm{arctg}\,(r\sin\vartheta \mid 1+r\cos\vartheta)$$

Andererseits hat man nach Gl. (26) des vorigen Paragraphen (S. 549):

$$(26)\quad \lg(1+re^{\vartheta i}) = \sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1}\frac{1}{\nu} r^\nu e^{\nu\vartheta i} = \sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1}\frac{\cos\nu\vartheta}{\nu}\cdot r^\nu + i\sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1}\frac{\sin\nu\vartheta}{\nu}\cdot r^\nu$$

und daher durch Vergleichung mit (25):

$$(27)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\lg(1+r^2+2r\cos\vartheta) = \sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1}\frac{\cos\nu\vartheta}{\nu}\cdot r^\nu \\ \mathrm{arctg}\,(r\sin\vartheta \mid 1+r\cos\vartheta) = \sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1}\frac{\sin\nu\vartheta}{\nu}\cdot r^\nu. \end{cases}$$

Diese für $r < 1$ unbedingt konvergierenden Entwicklungen gelten noch als bedingt konvergent für $r = 1$ mit Ausschluß von $\vartheta = \pi$, also für: $-\pi < \vartheta < +\pi$. Bei dieser Einschränkung ist ausnahmslos $1 + r\cos\vartheta > 0$ und daher kann nach der *ersten* der Formeln (22') der *erweiterte* Hauptwert $\mathrm{arctg}\,(r\sin\vartheta \mid 1 + r\cos\vartheta)$ ohne weiteres durch den *gewöhnlichen* ersetzt werden. Da sodann: $\mathrm{arctg}\,(r\sin\vartheta \mid 1 + r\cos\vartheta) = \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tang}\,\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{\vartheta}{2}$ und außerdem: $2 + 2\cos = 4\cos^2\frac{\vartheta}{2}$ wird, so gehen die Gl. (27) für $r = 1$ in die folgenden über:

$$(28)\quad \left.\begin{aligned} \lg\left(2\cos\frac{\vartheta}{2}\right) &= \sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1}\frac{\cos\nu\vartheta}{\nu} \\ \frac{\vartheta}{2} &= \sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1}\frac{\sin\nu\vartheta}{\nu} \end{aligned}\right\}\ (-\pi < \vartheta < +\pi).$$

Für $\vartheta = \pm\pi$ wird die *erste* der beiden Reihen *divergent*[1]), die zweite *konvergiert* zwar in diesem Falle nach *Null*, diese ihre Summe erweist sich aber als *unstetig*, da aus der für $|\vartheta| < \pi$ geltenden Summationsformel folgt:

$$\lim_{\vartheta\to\pi}\sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1}\frac{\sin\nu\vartheta}{\nu} = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{\vartheta\to-\pi}\sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1}\frac{\sin\nu\vartheta}{\nu} = -\frac{\pi}{2}.$$

---

1) Sie divergiert übrigens nach $-\infty$ übereinstimmend mit dem Grenzwerte von $\lg\left(2\cos\frac{\vartheta}{2}\right)$ für $\vartheta \to \pm\pi$ (vgl. den Satz von § 32, Nr. 7, S 259).

Gerade wegen dieser Eigenschaft kommt der obigen Reihe eine ganz besondere historische Bedeutung zu: es ist dies nämlich gerade diejenige Reihe, an welcher *Abel* zuerst die *Unrichtigkeit* der *Cauchy*schen Behauptung von der *Stetigkeit* jeder konvergierenden Reihe *stetiger* Funktionen feststellte und daran anknüpfend durch den Beweis des nach ihm benannten Stetigkeitssatzes für Potenzreihen an der Konvergenzgrenze (s. § 32, Nr. 1, S. 252) die Grundlage für den fundamentalen, die gesamte moderne Analysis beherrschenden Begriff der *gleichmäßigen* Konvergenz geschaffen hat.

§ 72. Notwendigkeit einer grundsätzlich eindeutigen Definition des Potenzsymbols b^a. — Die allgemeine Potenz $(\!(b)\!)^a$ und deren Hauptwert b^a. — Die Rechnungsregeln für allgemeine Potenzen und deren Hauptwerte. — Der Hauptwert $b^{\frac{1}{n}}$ von $(\!(b)\!)^{\frac{1}{n}} \equiv \sqrt[n]{b}$. — Primitive Einheitswurzeln. — Die Punktmenge $(\!(1)\!)^\alpha$ bei reellem irrationalen α.

1. Nachdem die charakteristische Form des ursprünglich für die *Potenz* mit ganzzahligem Exponenten geschaffenen Symbols für die *Exponentialfunktion* in Anspruch genommen worden ist und hiernach das Zeichen e^x für jeden beliebigen komplexen „Exponenten“ x eine *eindeutig* bestimmte Zahl vorstellt, so würde es zu bedenklicher Verwirrung führen, wenn man ganz analog gebaute Symbole, bei denen an Stelle der Zahl e irgendeine andere Zahl steht, als *mehrwertig* verwendete.[1] Es müßte doch innerhalb eines konsequent durchgebildeten Zeichensystems als ein kaum erträglicher Widerspruch erscheinen, wenn z. B. $a^{\frac{1}{2}}$ bei $a \neq e$ *jede* der beiden durch das Zeichen $\sqrt{a}$ zusammengefaßten Wurzeln der Gleichung $x^2 = a$ bedeuten sollte, während auf Grund der nun einmal getroffenen Festsetzung unter $e^{\frac{1}{2}}$ niemals etwas anderes verstanden werden kann, als $|\sqrt{e}|$ (wegen: $\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2 = e$ und $e^{\frac{1}{2}} > 0$). Oder, um dieses einfache Beispiel noch etwas weiter auszuführen: wollte man etwa unter $x^{\frac{1}{2}}$ die sonst als $\sqrt{x}$ bezeichnete *zweiwertige* Umkehrung y der Gleichung: $x = y^2$ verstehen, so würde der Zweig mit *negativ*-reellem Teil (vgl. § 18, Nr. 4, S. 169) an der Stelle $x = e$, da nun einmal an der Beziehung $e^{\frac{1}{2}} > 0$ nichts zu ändern ist, eine gänzlich unmotivierte, lediglich einer unglücklichen Bezeichnungsweise entspringende Stetigkeitsunterbrechung erleiden.

1) Manche Autoren versuchen diesem Dilemma dadurch zu entgehen, daß sie das Symbol e^x je nach Bedarf bald als *eindeutig*, bald als *vieldeutig* verwenden. Mir erscheint dieses sonderbare Auskunftsmittel nicht empfehlenswert. Andere Autoren ersetzen das seit *Eulers „Introductio“* (1748) für die *Exponentialfunktion* nun doch einmal allgemein üblich gewordene Symbol e^x durch das wenig anmutige: $\exp(x)$.

Hiernach müssen geeignete Festsetzungen getroffen werden, vermöge deren ein Symbol von der Form b^a immer nur eine *eindeutig* bestimmte Zahl vorstellt, und zwar, nachdem dasselbe für ganzzahlige a bei beliebig *komplexem* b, sodann für $b = e$ bei beliebig *komplexem* a bereits existiert, gleich in dem Umfange, daß sowohl a als b beliebige *komplexe* Zahlen bedeuten sollen.

2. Als zweckmäßiger Ausgangspunkt für die Definition von b^a dient die Darstellung von b (unter der Voraussetzung $b \neq 0$) in der *Exponentialform*, und zwar fürs erste die sogenannte *Hauptdarstellung*:

$$b = e^{\lg b} = e^{\lg |b| + \psi i}, \quad \text{wo: } -\pi < \psi \leqq \pi,$$

vermöge deren b^a zunächst in der Form $(e^{\lg b})^a$ angeschrieben werden kann. Das ist nun freilich noch keine Definition, weist aber sofort einen gangbaren Weg zu einer solchen. Da nämlich bereits feststeht (s. § 59, Gl. (19), S. 445), daß für ein *ganzzahliges* n:

$$(e^{\lg b})^n = e^{n \lg b},$$

so *definieren* wir analog (immer unter der Voraussetzung $b \neq 0$):

$$(1) \qquad b^a \equiv (e^{\lg b})^a = e^{a \lg b} \quad \left(= \sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!}(a \lg b)^\nu\right)$$

und bezeichnen die auf diese Weise *eindeutig* definierte Zahl als den *Hauptwert* der *allgemeinen* a^{ten} *Potenz* von b.

Um jedes Mißverständnis auszuschließen, sei ausdrücklich hervorgehoben, daß wir *nicht* etwa allgemein die Definition einführen:

$$(1 \text{ bis}) \qquad (e^{b'})^a = e^{a b'}\,!$$

Vielmehr soll diese Beziehung (abgesehen von dem oben angeführten Fall eines *ganzzahligen* $a = n$) *nur* gelten für den in Gl. (1) vorliegenden Fall, daß $e^{b'}$ den Charakter einer *Hauptdarstellung* besitzt, d. h. daß der *imaginäre* Teil von b' der Bedingung genügt:

$$-\pi < \Re\left(\frac{b'}{i}\right) \leqq \pi.$$

Ist dies nicht der Fall, so läßt sich b' in die Form setzen:

$$b' = \overline{|b'|} + 2k\pi i,$$

wo jetzt $\overline{|b'|}$, der „*reduzierte*" Wert von b', der Bedingung:

$$-\pi < \Re\left(\frac{1}{i}\overline{|b'|}\right) \leqq \pi$$

genügt und k eine *eindeutig bestimmte ganze* Zahl bedeutet $\left(k > 0 \text{ bzw.} < 0, \text{ je nachdem } \Re\left(\frac{b'}{i}\right) > \pi \text{ bzw.} \leqq -\pi\right)$. Alsdann gilt also in Über-

einstimmung mit Gl. (1) die folgende Definitionsgleichung:

$$(2) \qquad (e^{b'})^a = (e^{\overline{b'}|})^a = e^{ab'} \cdot e^{-2ka\pi i},$$

welche (abgesehen von dem Falle, daß ka, insbesondere also a selbst, eine *ganze* Zahl) nur für $k = 0$, also $\overline{b'}| \equiv b'$ in die Gl. (1 bis) übergeht.[1])

Da für die Zahl b *unendlich viele* Exponentialdarstellungen existieren, nämlich alle möglichen von der Form:

$$e^{\mathrm{Lg}_\nu b} = e^{\lg b} \cdot e^{2\nu\pi i} \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

so führen wir als *allgemeine* a^{te} *Potenz* von b nach Analogie von (1) den Ausdruck $e^{a\,\mathrm{Lg}\, b}$, ausführlicher geschrieben: $e^{a\,\mathrm{Lg}_\nu b}$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ ein[2]) und bezeichnen ihn nach dem Vorgange von *Cauchy* mit dem Symbol[3]): $(\!(b)\!)^a$, so daß dieses definiert wird durch die Gleichung:

$$(3) \qquad \left.\begin{aligned}(\!(b)\!)^a = e^{a\,\mathrm{Lg}\, b} &= e^{a\,\mathrm{Lg}_\nu b} \\ &= b^a \cdot e^{2\nu a\pi i}\end{aligned}\right\}(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

und im allgemeinen *unendlich viele verschiedene* Zahlen vorstellt, die sich nur dann auf eine *endliche* Anzahl periodisch wiederkehrender bzw. *eine einzige* reduzieren, wenn a eine *rationale* bzw. *ganze* Zahl.

3. Da die Gleichung (1) eine *neue* Definition des Symbols b^a enthält, so ist vor allem festzustellen, daß diese mit den *bisherigen*, auf be-

---

1) Auf die bezüglich der Gültigkeit von Gl. (1 bis) gemachte Einschränkung bezieht sich die in § 59, Nr 2 an die Gl. (21 b) (S 446) geknüpfte Bemerkung. Die betreffende Gleichung

$$(e^x)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{x}{n}}$$

gilt nur, wenn $\Re\left(\frac{x}{i}\right)$ der im Text angegebenen Einschränkung genügt, während sie andernfalls (mit Benutzung der im Text erklärten Schreibweise) durch die folgende zu ersetzen wäre:

$$(e^x)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\overline{x}|} = e^{\frac{x}{n}} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{n}}.$$

2) Wir vermeiden hier im Gegensatz zu Gl. (1) absichtlich die Zwischendefinition $(e^{\mathrm{Lg}\, b})^a$, denn dieses Symbol würde nach der über die Bedeutung von Gl. (1 bis) getroffenen Verfügung nichts anderes bedeuten, als $(e^{\lg b})^a$.

3) Man findet an Stelle der etwas unbequemen Doppelklammer auch die Schreibweise $(^*b)^a$. Keinesfalls aber würde es genügen, die obige *allgemeine* Potenz zum Unterschiede von ihrem *Hauptwerte* b^a etwa mit $(b)^a$ zu bezeichnen. Denn, tritt an die Stelle der Basis b ein aus *mehreren* Buchstaben bestehender Ausdruck, z. B $b + b'$, so läßt sich schon der *Hauptwert* der a^{ten} Potenz nicht anders als in der Form $(b + b')^a$ anschreiben. Hierin liegt auch der Grund, warum unter $(e^{b'})^a$ nichts anderes als der *Hauptwert* der a^{ten} Potenz von $e^{b'}$ verstanden werden kann und die bezüglich der Gültigkeit von Gl. (1 bis) gemachte Beschränkung zur Vermeidung von Widersprüchen sich als notwendig erweist.

sondere Auswahl der Zahlen a, b sich beziehenden Definitionen nicht im Widerspruch steht. Es handelt sich hierbei um die folgenden drei Fälle:

1) *b reell* und *positiv, a reell.* Auf Grund der früher aufgestellten Definitionen einer solchen Potenz b^a (s. I_1, § 13, Nr. 1; § 23, Nr. 6; § 29, Nr. 5, 6; § 31, Nr. 5, 6), sowie des natürlichen Logarithmus einer positiven Zahl b (§ 32, Nr. 2; § 34, Nr. 1) findet man:

$$b^a \equiv (e^{\lg b})^a .$$

Nun besteht aber auf Grund eines ausdrücklich bewiesenen Satzes (a. a. O. § 31, Gl. (19), S. 191) die Beziehung:

$$(e^{\lg b})^a = e^{a \lg b}$$

und somit ergibt sich:

$$b^a = e^{a \lg b},$$

genau übereinstimmend mit unserer jetzigen Definitionsgleichung (1).

2) *b beliebig komplex, $a = n$,* d. h. *reell* und *ganzzahlig.* Auch hier besteht zunächst die Identität:

$$b^n \equiv (e^{\lg b})^n ,$$

sodann aber nachweislich die Beziehung:

$$(e^{\lg b})^n = e^{n \lg b},$$

auf welche ja oben geradezu als *Vorbild* für die Definitionsgleichung (1) hingewiesen wurde, womit dieser Fall erledigt ist.

3) *$b = e$, a beliebig komplex.* Da:

$$e^a \equiv e^{a \cdot 1} = e^{a \lg e},$$

so genügt auch e^a der Definitionsgleichung (1).

4. Die Definitionen (1) und (3) erweisen sich als ausreichend, um festzustellen, inwieweit die Grundregeln für das Rechnen mit Potenzen im ursprünglichen Sinne[1]) auf die neuen *Hauptwerte* bzw. die *vieldeutigen allgemeinen Potenzen* übertragbar sind.

Man findet zunächst nach Gl. (1):

$$b^a \cdot b^{a'} = e^{a \lg b} \cdot e^{a' \lg b} = e^{(a + a') \lg b},$$

1) Es handelt sich dabei um die drei in I_1, § 13 (S. 78) als Gl. (2), (4), (5) bezeichneten (auf rationale A und ganzzahlige positive m, n bezüglichen) Formeln:

$$A^m \cdot A^n = A^{m+n}$$

$$(A^m)^n = A^{mn}$$

$$A^m \cdot B^n = (A B)^n .$$

also schließlich:

(4) $$b^{a} \cdot b^{a'} = b^{a+a'}$$

(genau wie in den Fällen 1)—3) der vorigen Nummer). [1])

Dagegen folgt aus Definitionsgleichung (3):

(5) $$((b))^{a} \cdot ((b))^{a'} = e^{a\,\mathrm{Lg}_\nu b} \cdot e^{a'\,\mathrm{Lg}_{\nu'} b}$$
$$= b^{a+a'} \cdot e^{2(\nu a + \nu' a')\pi i}$$

und, wenn λ eine vorläufig beliebig zu denkende *ganze* Zahl bedeutet:

(5a) $$((b))^{a} \cdot ((b))^{a'} = b^{a+a'} \cdot e^{2\lambda(a+a')\pi i} \cdot e^{2((\nu-\lambda)a + (\nu'-\lambda)a')\pi i}$$
$$= ((b))^{a+a'} \cdot e^{2((\nu-\lambda)a+(\nu'-\lambda)a')\pi i}.$$

Daraus ergibt sich, daß *dann* und *nur* dann:

(5b) $$((b))^{a} \cdot ((b))^{a'} = ((b))^{a+a'},$$

wenn der letzte Exponentialfaktor in Gl. (5a) sich auf die Einheit reduziert, d. h. wenn zu jedem ν, ν' ein ganzzahliges λ existiert, derart, daß:

$$(\nu-\lambda)a + (\nu'-\lambda)a' \quad \textit{eine ganze Zahl } \mu,$$

also:

(5') $$\nu a + \nu' a' = \lambda(a + a') + \mu.$$

Es läßt sich aber zeigen, daß diese Bedingung schon für jedes ν, ν' erfüllt ist, wenn sie nur für $\nu = 1$, $\nu' = 0$ besteht, wenn also:

(5'') $$a = \lambda(a + a') + \mu,$$

anders geschrieben:

$$a' = (1-\lambda)(a + a') - \mu.$$

Daraus folgt nämlich für beliebiges ν, ν':

$$\nu a + \nu' a' = (\nu\lambda + \nu'(1-\lambda))(a + a') + (\nu - \nu')\mu,$$

so daß die *ganzen Zahlen* $\nu\lambda + \nu'(1-\lambda)$ und $\nu - \nu'$ die Stelle der in Gl. (5') mit λ, μ bezeichneten übernehmen. Die Bedingung (5'') erweist sich also als *notwendig* und *hinreichend* für die Gültigkeit von Gl. (5b).

Die Gleichung (5b) gilt hiernach nur *in gewissen Fällen*. Dagegen zeigt sich die auf den ersten Blick überraschende Erscheinung, daß man ohne jede Schwierigkeit eine bedingungslos gültige Gleichung erhält, wenn man bei deren Bildung statt von der *linken* Seite der Gl. (5b) von der *rechten* Seite ausgeht. Man findet nämlich in diesem Falle:

(5c) $$((b))^{a+a'} = e^{(a+a')\,\mathrm{Lg}_\nu b} = e^{a\,\mathrm{Lg}_\nu b} \cdot e^{a'\,\mathrm{Lg}_\nu b} = ((b))^{a} \cdot ((b))^{a'}.$$

---

1) Ersetzt man in Gl. (4) a' durch $-a'$ und beachtet, daß:

$$b^{-a'} = e^{-a'\lg b} = \frac{1}{e^{a'\lg b}} = \frac{1}{b^{a'}},$$

so folgt:

$$\frac{b^{a}}{b^{a'}} = b^{a-a'}$$

Die Vergleichung mit Gl. (5) nnd (5a) zeigt, daß hier infolge der Wahl des Ausgangspunktes von vornherein die Beschränkung $\nu' = \nu = \lambda$ eingeführt wird und auf diese Weise Gl. (5c) zum Vorschein kommt. Dagegen steht es, wie ein Blick auf Gl. (5a) zeigt, offenbar *nicht* frei, die beiden Seiten der Gl. (5c) zu *vertauschen*.

Damit hat es die folgende Bewandnis. Stellt jedes von irgend zwei Zeichen A und B eine *einzige* Zahl vor, so besagt die Beziehung:

$$A = B,$$

daß A und B *dieselbe* Zahl vorstellen, und dieser Sachverhalt kann mit gleichem Rechte auch durch die Beziehung:

$$B = A$$

ausgedrückt werden.

Stellt aber mindestens eins der Zeichen A und B mehrere (auch unendlich viele) Zahlen vor, so gibt man der Beziehung:

$$A = B$$

die folgende Bedeutung: *Jedes* A ist gleich einem B, d. h. jede der unter dem Zeichen A zu verstehenden Zahlen kommt auch unter den mit B bezeichneten vor.

Wenn nun *umgekehrt* auch *jede* der Zahlen B unter den Zahlen A enthalten ist, so besteht in dem nämlichen Sinne, wie die Gleichung $A = B$ auch die folgende:

$$B = A,$$

die beiden Seiten der Gleichung sind dann also *vertauschbar*[1]), und die Gleichung selbst wird dann als eine *vollkommene* bezeichnet. Ihre *beiden* Seiten stellen dann zwar nicht *ein und dieselbe Zahl*, wohl aber genau denselben *Zahlenvorrat* dar.

Umfaßt aber das Zeichen B auch solche Zahlen, welche *nicht* unter den mit A bezeichneten enthalten sind, so steht es nicht mehr frei, die Gleichung $A = B$ durch $B = A$ zu ersetzen, ihre Seiten sind also *nicht vertauschbar*, sie selbst heißt eine *unvollkommene*.

Dem letzteren Typus gehört also insbesondere die Gl. (5c) an.[2])

---

1) Z. B.: $\sqrt[4]{1} = \sqrt{\sqrt{1}}$,

$$\operatorname{Lg} a = \lg a + 2\nu\pi i \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

2) Ersetzt man wiederum in Gl. (5b) a' durch $-a'$, so ergibt sich die (gleichfalls *unvollkommene*) Gleichung:

$$((b))^{a-a'} = ((b))^{a} \cdot ((b))^{-a'} = \frac{((b))^{a}}{((b))^{a'}},$$

wenn man noch beachtet, daß:

$$((b))^{-a'} = e^{-a' \operatorname{Lg} b} = \frac{1}{e^{a' \operatorname{Lg} b}} = \frac{1}{((b))^{a'}}.$$

5. Wir untersuchen ferner, in welchem Umfange die Gleichungen: $(b^a)^{a'} = b^{a a'}$ bzw. $(\!(\!(\!(b)\!)^a)\!)^{a'} = (\!(b)\!)^{a a'}$ bestehen.

Man hat zunächst:

$$(b^a)^{a'} = (e^{a \lg b})^{a'}.$$

Ist a' eine *ganze* Zahl oder besitzt $e^{a \lg b}$ den Charakter einer *Hauptdarstellung*, so daß also: $-\pi < \Re\left(\frac{1}{i}\, a \lg b\right) \leqq \pi$, so findet man nach Nr. 2, Gl. (2):

$$(6a) \qquad (b^a)^{a'} = e^{a a' \lg b} = b^{a a'}.$$

Ist dagegen keine der genannten Bedingungen erfüllt und setzt man wiederum:

$$a \lg b = \overline{|a \lg b|} + 2k\pi i,$$

wo jetzt: $-\pi < \Re\left(\frac{1}{i}\, \overline{|a \lg b|}\right) \leqq \pi$, so folgt:

$$(b^a)^{a'} = e^{a' \overline{|a \lg b|}} = e^{a'(a \lg b - 2k\pi i)},$$

also schließlich:

$$(6b) \qquad (b^a)^{a} = b^{a a'} \cdot e^{-2k a' \pi i},$$

woraus hervorgeht, daß Gl. (6a) außer in den bereits genannten Fällen auch noch besteht, wenn ka' eine *ganze* Zahl, also a' ein Bruch, dessen Nenner k oder ein Teiler von k ist.

Analog findet man:

$$(6c) \qquad (b^{a'})^a = b^{a a'} \cdot e^{-2k' a \pi i},$$

wo k' die entsprechende Bedeutung hat, wie zuvor k. Insbesondere ist $k' = 0$ bzw. durch 0 ersetzbar, wenn $e^{a' \lg b}$ eine *Hauptdarstellung* bzw. $k'a$ eine *ganze* Zahl ist.

Hiernach ist nur dann:

$$(6d) \qquad (b^a)^{a'} = (b^{a'})^a = b^{a a},$$

wenn sowohl a als a' je eine der angegebenen Bedingungen erfüllt.

Die letzte Gleichung ist eine *vollkommene*. Jedem Werte der *linken* Seite entspricht nicht nur ein Wert der rechten, sondern auch umgekehrt: man hat eben nur bei der Bildung von $(\!(b)\!)^{a'}$ und $(\!(b)\!)^{-a'}$ *denselben* $\operatorname{Lg} b$ zu benutzen. Dagegen wäre es z. B. unzulässig, aus der obigen Gleichung durch mechanisches Fortschaffen des letzten Nenners die folgende herzuleiten:

$$(\!(b)\!)^{a'} \cdot (\!(b)\!)^{-a'} = 1,$$

welche nicht nur unvollkommen, sondern schlechthin *falsch* wäre, da keinerlei Bindung vorliegt, bei der Bildung von $(\!(b)\!)^{a'}$ und $(\!(b)\!)^{-a'}$ *denselben* $\operatorname{Lg} b$ zu benutzen. *Richtig,* aber *unvollkommen* wäre dagegen die durch Vertauschung der Seiten daraus hervorgehende Gleichung:

$$1 = (\!(b)\!)^{a'} \cdot (\!(b)\!)^{-a'}.$$

Für den Fall der *allgemeinen* Potenz hat man zunächst:

$$(\!(b)\!)^a = e^{a \operatorname{Lg}_\nu b} \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

und daraus folgt, daß $a \operatorname{Lg}_\nu b$ für jedes einzelne ν je *ein* Wert von $\operatorname{Lg}(\!(b)\!)^a$ sein muß, so daß also die Gleichung besteht:

$$(7\text{a}) \qquad a \operatorname{Lg}_\nu b = \operatorname{Lg}(\!(b)\!)^a \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Daß dieselbe eine *unvollkommene* ist, lehrt die Beziehung:

$$(7\text{b}) \qquad \begin{cases} \operatorname{Lg}(\!(b)\!)^a = \operatorname{Lg} e^{a \operatorname{Lg}_\nu b} = \operatorname{Lg} e^{a \operatorname{Lg}_\nu b + 2\mu\pi i} \\ \qquad = a\left(\operatorname{Lg}_\nu b + 2\frac{\mu}{a}\pi i\right) \quad \begin{pmatrix} \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Die rechte Seite dieser *vollkommenen* Gleichung stellt für alle möglichen von 0 verschiedenen μ nur dann einen Wert von $a \operatorname{Lg} b$ dar, wenn $\frac{\mu}{a}$ für *jedes* $\mu \neq 0$ *ganzzahlig*, also a der *reziproke Wert* einer *ganzen* Zahl ist: nur in diesem Falle wird die Gl. (7a) eine *vollkommene*.

Aus der Definitionsgleichung (3) ergibt sich nun mit Benutzung von Gl. (7b):

$$(\!(\!(\!(b)\!)^a)\!)^{a'} = e^{a' \operatorname{Lg}(\!(b)\!)^a} = e^{a a' \left(\operatorname{Lg}_\nu b + \frac{2\mu}{a}\pi i\right)},$$

also im allgemeinen:

$$(8\text{a}) \qquad (\!(\!(\!(b)\!)^a)\!)^{a'} = (\!(b)\!)^{a a'} \cdot e^{2\mu a' \pi i} \qquad (\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

in den besonderen Fällen[1]), daß $\frac{1}{a}$ (s. Gl. (7b)) oder a' eine *ganze* Zahl:

$$(8\text{b}) \qquad (\!(\!(\!(b)\!)^a)\!)^{a'} = (\!(b)\!)^{a a'}.$$

Andererseits findet man mit Benutzung von Gl. (7a)

$$(\!(b)\!)^{a a'} = e^{a a' \operatorname{Lg}_\nu b} = e^{a' \operatorname{Lg}(\!(b)\!)^a},$$

also:

$$(8\text{c}) \qquad (\!(b)\!)^{a a'} = (\!(\!(\!(b)\!)^a)\!)^{a'}.$$

Die Gleichung ist eine *unvollkommene*, wie ein Blick auf die Gl. (8a) zeigt, welche im allgemeinen nur für $\mu = 0$ mit ihr übereinstimmt; außerdem aber für *jedes* μ in dem besonderen Falle eines *ganzzahligen* $\frac{1}{a}$, oder a', in welchem dann die Gl. (8c) eine *vollkommene* wird.

6. Die Gleichung:

$$(9\text{a}) \qquad b^a \cdot c^a = (bc)^a$$

---

1) Es sind dies keineswegs die einzigen Fälle dieser Art: s. z. B. weiter unten Gl. (17b). Eine genauere Untersuchung der Möglichkeiten, unter denen Gl. (8a) sich auf (8b) reduziert, zeigt, daß dies der Fall ist, wenn:

$$(ma - 1)a' = n,$$

unter m, n beliebige *ganze Zahlen* (*inkl.* 0) verstanden.

besteht, abgesehen von dem evidenten Falle eines *ganzzahligen* a, wegen: $b^a \cdot c^a = e^{a(\lg b + \lg c)}$ nur dann, wenn: $\lg b + \lg c = \lg bc$, was nach § 70, Nr. 3, (S. 543) nur der Fall ist, wenn die Summe σ der Amplituden von b und c der Bedingung: $-\pi < \sigma \leq \pi$ genügt. Andernfalls findet man: $\lg b + \lg c = \lg bc \pm 2\pi i$, so daß dann an die Stelle der Gl. (9a) eine der beiden in der Form:

$$(9\text{b}) \qquad b^a \cdot c^a = (bc)^a \cdot e^{\pm 2a\pi i}$$

enthaltenen tritt[1]), die in dem bereits erwähnten Falle eines *ganzzahligen* a sich wieder auf Gl. (9a) reduziert.

Dagegen liefert hier die *allgemeine* Potenz ein einfacheres Ergebnis, nämlich die *vollkommene* Gleichung:

$$(10) \qquad (\!(b)\!)^a \cdot (\!(c)\!)^a = (\!(bc)\!)^a$$

wegen:

$$(\!(b)\!)^a \cdot (\!(c)\!)^a = e^{a(\operatorname{Lg} b + \operatorname{Lg} c)} = e^{a \operatorname{Lg} bc} \quad \text{(s. S. 543, Fußn. 1).}$$

Ganz analoge Aussagen gelten bezüglich der Beziehungen:

$$(11) \qquad \frac{b^a}{c^a} = \left(\frac{b}{c}\right)^a, \quad \frac{(\!(b)\!)^a}{(\!(c)\!)^a} = \left(\!\!\left(\frac{b}{c}\right)\!\!\right)^a.$$

7. Den nach Gl. (1) definierten *Hauptwert* der $\frac{1}{n}^{\text{ten}}$ Potenz von b (n eine natürliche Zahl), nämlich:

$$(12) \qquad b^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\lg b}$$

bezeichnet man $\left(\text{wegen: } \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n = e^{n\left(\frac{1}{n}\lg b\right)} = b\right)$[2]) auch als *Hauptwert*[3])

---

1) **Beispiel.** Es ist:

$$(-1) \cdot (-1) = 1$$

und $(-1)^{\frac{1}{2}} = i$, $1^{\frac{1}{2}} = 1$, somit:

$$(-1)^{\frac{1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{1}{2}} = -1 = 1^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\pi i}.$$

2) Dagegen ist:

$$(b^n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\lg b^n} \text{ nur dann} = b,$$

wenn: $\lg b^n = n \cdot \lg b$, d. h. wenn:

$$-\pi < \Re\left(\frac{n}{i}\lg b\right) \leq \pi.$$

3) Bisher wurde der Ausdruck in dieser Verbindung nur für den Fall $n = 2$ benutzt (s. I_3, § 70, Gl. (18), S. 539), und zwar zur Bezeichnung des Wurzelwertes mit *positiv reellem* Teil, bzw. wenn dieser fehlt, des *positiv imaginären* Wertes. Da:

$$b^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\lg b}$$
$$= e^{\frac{1}{2}\lg|b| + \frac{1}{2}\varphi i},$$

von $\sqrt[n]{b}$, während das letztere Symbol (sofern seine Bedeutung nicht durch einen besonderen Zusatz ausdrücklich spezialisiert wird) als gleichbedeutend mit dem *vieldeutigen* (im vorliegenden Falle *n-wertigen*) der *allgemeinen* Potenz $(\!(b)\!)^{\frac{1}{n}}$ gelten soll[1]), so daß also:

$$\sqrt[n]{b} \equiv (\!(b)\!)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\,\mathrm{Lg}_\nu b} = e^{\frac{1}{n}(\lg b + 2\nu\pi i)} \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

wobei es offenbar zur Erzeugung aller möglichen *verschiedenen* Werte von $\sqrt[n]{b}$ schließlich genügt, ν die Werte $0, 1, \ldots n-1$ beizulegen. Danach ergibt sich:

$$\text{(13)} \qquad \sqrt[n]{b} \equiv (\!(b)\!)^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{2\nu\pi i}{n}} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n-1),$$

d. h. die n Werte von $\sqrt[n]{b}$ sind darstellbar als Produkte des *Hauptwertes* in die *n Einheitswurzeln* n^{ten} Grades (s. § 62, Nr. 1, S. 462), somit schließlich auch in der Form: $\sqrt[n]{b} \cdot e^{\frac{2\nu\pi i}{n}}$, wo $\sqrt[n]{b}$ einen beliebigen dieser Wurzelwerte bedeutet.[2])

Ist b reell und *positiv*, so ist:

$$\text{(14a)} \qquad b^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\lg b} > 0,$$

also der *Hauptwert* von $\sqrt[n]{b}$ gleichbedeutend mit dem (einzigen) reellen *positiven* Wert.

Ist b reell und *negativ*, so wird:

$$\text{(14b)} \qquad b^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}(\lg|b| + \pi i)} = |b|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{\pi i}{n}}.$$

---

wo: $-\pi < \psi \leq \pi$, so hat man (zunächst abgesehen von dem Falle $\psi = \pi$) $\cos \frac{1}{2}\psi > 0$, also: $\Re\left(b^{\frac{1}{2}}\right) > 0$, und in dem besonderen Falle $\psi = \pi$:

$$\sin \tfrac{1}{2}\psi = 1, \quad \text{also:} \quad b^{\frac{1}{2}} = i\,|b|^{\frac{1}{2}},$$

so daß also $b^{\frac{1}{2}}$ durchaus mit dem *Hauptwert* von $\sqrt{b}$ in dem früheren Sinne übereinstimmt

1) Manche Autoren gebrauchen das Zeichen $\sqrt[n]{b}$ als gleichbedeutend mit $b^{\frac{1}{n}}$, also lediglich zur Bezeichnung des *Hauptwertes*, und schreiben dann als n-wertiges Symbol: $\sqrt[n]{(\!(b)\!)}$, $\sqrt[n]{{}^*b}$ (*Cauchy:* $\sqrt[n]{\!\!/\,b}$).

2) Gl. (13) läßt sich auch in die Form setzen:

$$\sqrt[n]{b} = |b|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{(\psi + 2\nu)\pi i}{n}},$$

wenn: $b = |b| \cdot e^{\psi i}$ (Vgl. S. 463, Fußn. 1.)

Ist dabei n *ungerade*, etwa: $n = 2m + 1$, so hat man:

(14c) $$\sqrt[2m+1]{b} = |\,b\,|^{\frac{1}{2m+1}} \cdot e^{\frac{(2\nu+1)\pi i}{2m+1}},$$

also insbesondere für $\nu = m$: $-|\,b\,|^{\frac{1}{2m+1}} = \sqrt[2m+1]{b}$. Der *negative* (also einzig *reelle*) Wert einer Wurzel *unpaaren* Grades aus einer *negativen* Zahl ist hiernach keineswegs als deren *Hauptwert* anzusehen.

8. Sind m, n, p *natürliche* Zahlen, und zwar m, n *relativ prim*, so hat man zunächst:

(15) $$b^{\pm\frac{pm}{pn}} = b^{\pm\frac{m}{n}}.$$

Sodann folgt auf Grund von Gl. (6a):

(16a) $$b^{\pm\frac{m}{n}} = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^{\pm m}, \quad b^{\pm\frac{pm}{pn}} = \left(b^{\frac{1}{pn}}\right)^{\pm pm},$$

dagegen:

(16b) $$b^{\pm\frac{m}{n}} = (b^{\pm m})^{\frac{1}{n}}, \quad b^{\pm\frac{pm}{pn}} = (b^{\pm pm})^{\frac{1}{pm}}$$

nur dann, wenn $\Re\left(\pm\frac{m}{i}\lg b\right)$ bzw. $\Re\left(\pm\frac{pm}{i}\lg b\right)$ in den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ bis einschließlich $\frac{\pi}{2}$ liegt.[1])

Analog ergibt sich aus Gl. (8b), daß:

(17a) $$(\!(b)\!)^{\pm\frac{m}{n}} = \left(\!\!\left((\!(b)\!)^{\frac{1}{n}}\right)\!\!\right)^{\pm m}, \quad (\!(b)\!)^{\pm\frac{pm}{pn}} = \left(\!\!\left((\!(b)\!)^{\frac{1}{pn}}\right)\!\!\right)^{\pm pm}$$

und zwar als *vollkommene* Gleichung. Das letztere gilt auch von der Gleichung:

(17b) $$(\!(b)\!)^{\pm\frac{m}{n}} = (\!((\!(b)\!)^{\pm m})\!)^{\frac{1}{n}} = (\!(b^{\pm m})\!)^{\frac{1}{n}},$$

---

1) Z. B.:

$$(-i)^{\frac{2}{3}} = \left(e^{-\frac{\pi i}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = e^{-\frac{\pi i}{3}}$$

$$((-i)^{\frac{1}{3}})^2 = \left(e^{-\frac{\pi i}{6}}\right)^2 = e^{-\frac{\pi i}{3}},$$

dagegen:

$$((-i)^2)^{\frac{1}{3}} = (e^{\pi i})^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{\pi i}{3}}$$

Ferner:

$$i^{\frac{2}{3}} = i^{\frac{4}{6}} = e^{\frac{\pi i}{3}},$$

auch:

$$(i^2)^{\frac{1}{3}} = (e^{\pi i})^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{\pi i}{3}}$$

dagegen:

$$(i^4)^{\frac{1}{6}} = (e^0)^{\frac{1}{6}} =$$

(wie man daraus erkennt, daß jede ihrer beiden Seiten die n Wurzeln der Gleichung $x^n = b^{\pm m}$ darstellt) während die folgende:

$$(17\text{c}) \qquad ((b))^{\pm \frac{pm}{pn}} = (((b))^{\pm pm})^{\frac{1}{pn}} = ((b^{\pm pm}))^{\frac{1}{pn}}$$

für $p > 1$ eine *unvollkommene* ist, wie unmittelbar daraus hervorgeht, daß die *linke* Seite nur n, die *rechte* pn verschiedene Zahlen vorstellt.

Durch Zusammenfassung von (17a, b, c) erkennt man, daß von den beiden Gleichungen:

$$(18) \qquad (\sqrt[n]{b})^{\pm m} = \sqrt[n]{b^{\pm m}}, \quad (\sqrt[pn]{b})^{\pm pm} = \sqrt[pn]{b^{\pm pm}},$$

die *erste* eine *vollkommene*, die *zweite* eine *unvollkommene* ist.

Schließlich ergibt sich noch mit Hilfe von Gl. (6) und (8b):

$$(19) \qquad (b^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{mn}}, \quad \left(\left((b)\right)^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = ((b))^{\frac{1}{mn}}$$ [1]

(die letztere Gleichung als eine *vollkommene*) und nach Gl. (9a, b):

$$(20\text{a}) \qquad b^{\frac{1}{n}} \cdot c^{\frac{1}{n}} = (bc)^{\frac{1}{n}} \quad \text{bzw.} \quad = (bc)^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\pm \frac{2\pi i}{n}},$$

je nachdem $\lg b + \lg c = \lg bc$ oder $= \lg bc \pm 2\pi i$ [2]), und analog:

$$(20\text{b}) \qquad \frac{b^{\frac{1}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{bzw.} \quad = \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}},$$

während nach Gl. (10), (11) die *vollkommenen* Gleichungen bestehen:

$$(20\text{c}) \qquad ((b))^{\frac{1}{n}} \cdot ((c))^{\frac{1}{n}} = ((bc))^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{((b))^{\frac{1}{n}}}{((c))^{\frac{1}{n}}} = \left(\left(\frac{b}{c}\right)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

9. Aus Gl. (17b) folgt für $b = 1$ die *vollkommene* Gleichung:

$$(21) \qquad ((1))^{\frac{m}{n}} = ((1))^{\frac{1}{n}}$$

d. h. die Gesamtheit der Werte von $((1))^{\frac{m}{n}}$ ist (unter der oben gemachten

---

1) Anders geschrieben:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[mn]{b}.$$

2) Man hat z B, wenn $\beta > 0$, $\gamma > 0$:

$$(-\beta)^{\frac{1}{2}} \cdot (-\gamma)^{\frac{1}{2}} \neq (\beta\gamma)^{\frac{1}{2}},$$

sondern (wegen: $\lg \beta + \lg \gamma = 2\pi i$):

$$(-\beta)^{\frac{1}{2}} \cdot (-\gamma)^{\frac{1}{2}} = (\beta\gamma)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\pi i} = -(\beta\gamma)^{\frac{1}{2}},$$

wie unmittelbar einleuchtet, wenn man jene beiden Hauptwerte von vornherein in der Form setzt: $i\beta^{\frac{1}{2}}$, $i\gamma^{\frac{1}{2}}$.

Voraussetzung, daß m und n *relativ prim*) mit den n Einheitswurzeln $(\!(1)\!)^{\frac{1}{n}}$ identisch, wie auch folgendermaßen bestätigt werden kann. Man hat:

$$(\!(1)\!)^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{2\nu m \pi i}{n}} \qquad (\nu = 0, 1, \dots n-1)$$

und diese n Zahlen sind sämtlich voneinander *verschieden*. Denn wäre: $e^{\frac{2\nu_1 m\pi i}{n}} = e^{\frac{2\nu_2 m\pi i}{n}}$, wo: $0 \leqq \nu_1 < \nu_2 \leqq n-1$, so müßte $\frac{(\nu_2 - \nu_1)m}{n}$ eine *ganze* Zahl sein, was unmöglich ist, da $0 < \nu_2 - \nu_1 \leqq n-1$ und m zu n *relativ prim*. Setzt man also:

$$(22) \qquad \frac{\nu m}{n} = \left[\frac{\nu m}{n}\right] + \frac{r_\nu}{n},$$

wo $\left[\frac{\nu m}{n}\right]$ die größte $\frac{\nu m}{n}$ nicht übersteigende ganze Zahl, also r_ν eine der Zahlen aus der Reihe $0, 1, \dots n-1$ bedeutet, so sind für $\nu = 0, \dots n-1$ die r_ν alle von einander *verschieden*, also in ihrer Gesamtheit mit den Zahlen $0, 1, \dots n-1$ identisch. Das gleiche gilt also auch von den beiden Zahlengruppen $e^{\frac{2\nu m\pi i}{n}}$ und $e^{\frac{2\nu\pi i}{n}}$ $(\nu = 0, 1, \dots n-1)$.

Man kann dieses Ergebnis, wegen: $e^{\frac{2\nu m\pi i}{n}} = \left(e^{\frac{2m\pi i}{n}}\right)^\nu$, auch dahin aussprechen, daß die Einheitswurzel $e^{\frac{2m\pi i}{n}}$ mit der *Grundwurzel* $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ die Eigenschaft gemein hat, durch Erhebung in die $0^{\text{te}}, 1^{\text{te}}, \dots (n-1)^{\text{te}}$ Potenz die sämtlichen n^{ten} Einheitswurzeln zu erzeugen (vgl. § 62, Nr. 1, S. 463). Man bezeichnet eine Einheitswurzel, welche diese Eigenschaft besitzt, als *primitive*. Es sind also alle n^{ten} Einheitswurzeln von der Form $e^{\frac{2m\pi i}{n}}$, falls m, n *relativ prim*[1]), *primitive*, und zwar sind umgekehrt *alle möglichen* primitiven n^{ten} Einheitswurzeln in dieser Form enthalten. Denn zunächst ist ja (nach § 62, Nr. 1) *jede* n^{te} Einheitswurzel in der Form $e^{\frac{2m\pi i}{n}}$ enthalten (wobei es insbesondere frei steht, m auf das Intervall $[0, n-1]$ zu reduzieren). Sind sodann m und n *nicht* relativ prim, etwa: $m = km'$, $n = kn'$, wo jetzt m' und n' *relativ prim*, so ist $e^{\frac{2m\pi i}{n}} \equiv e^{\frac{2m'\pi i}{n'}}$ eine *primitive* n'^{te} Einheitswurzel, erzeugt also durch Erhebung in alle möglichen ν^{ten}, d. h. ganzzahligen Potenzen überhaupt nur n' verschiedene Zahlen (da ja für $\nu > n'-1$ bzw. $\nu < 0$ immer nur solche Potenzwerte zum Vorschein kommen, die schon durch einen der Exponenten $\nu = 0, 1, \dots n'-1$ erzeugt werden).

---

1) Diese Aussage umfaßt (nach I, S. 36, Fußn. 1) auch den Fall $m = 1$, also die *Grund*-Einheitswurzel.

10. Tritt an die Stelle des *rationalen* Exponenten $\frac{m}{n}$ eine reelle *Irrationalzahl* α, die wir ohne merkliche Beschränkung der Allgemeinheit als *positiv* annehmen können, so besitzt die Potenz:

$$(23) \qquad (\!(1)\!)^\alpha = e^{2\nu\alpha\pi i} \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

unendlich viele, durchweg verschiedene Werte[1]), da für irgend zwei ganze Zahlen ν_1, ν_2 *niemals* $(\nu_2 - \nu_1)\alpha$ *ganzzahlig* ausfallen kann. Es verdient bemerkt zu werden, daß diese unendlich vielen Zahlen $(\!(1)\!)^\alpha$ eine *Punktmenge* definieren, die auf dem Kreise $|x| = 1$ *überall dicht* liegt, d. h. keinen (noch so kleinen) Teilbogen dieses Kreises von Punkten der Menge frei läßt.

Um dies nachzuweisen, sei daran erinnert, daß α als positive Irrationalzahl sich in einen unendlichen Kettenbruch mit positiven Näherungsbrüchen entwickeln läßt (vgl. I_3, § 103, Nr. 4, S. 778) und daß zwischen α und jedem Näherungsbruche $\frac{m}{n}$ (wo m und n relativ prim) die Beziehung besteht:

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2} \qquad \text{(a. a. O. S. 777, Ungl. (16))}$$

die sich, falls man unter $\frac{m}{n}$ einen Näherungsbruch mit *geradem* Index versteht, so daß: $\alpha - \frac{m}{n} > 0$ (a. a. O. Ungl. (3)), durch die folgende ersetzen läßt:

$$(24) \qquad \frac{m}{n} < \alpha < \frac{m}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Hieraus folgt für jedes $\nu > 0$:

$$\frac{\nu m}{n} < \nu\alpha < \frac{\nu m}{n} + \frac{\nu}{n^2}$$

und insbesondere für $\nu = 1, 2, \ldots n - 1$ *a fortiori*:

$$(25) \qquad \frac{\nu m}{n} < \nu\alpha < \frac{\nu m + 1}{n},$$

eine Ungleichung, die auch noch für $\nu = 0$ gültig wird, wenn man das erste *Ungleichheits*zeichen durch ein *Gleichheits*zeichen ersetzt.

Daraus geht hervor, daß jeder der Punkte $e^{2\nu\alpha\pi i}$ für $\nu = 1, 2, \ldots n - 1$ auf dem Kreise $|x| = 1$ *zwischen* den beiden Punkten $e^{\frac{2\nu m\pi i}{n}}$ und $e^{\frac{2(\nu m+1)\pi i}{n}}$ liegt bzw. im Falle $\nu = 0$ mit dem Punkte $e^{\frac{2\nu m\pi i}{n}}$ zusammenfällt. Da aber $e^{\frac{2m\pi i}{n}}$ eine *primitive* n^{te} Einheitswurzel und demgemäß die

1) Das Gleiche gilt, wie leicht ersichtlich, ausnahmslos im Falle eines nicht reellen Exponenten.

Zahlen $e^{\frac{2\nu m\pi i}{n}}$ $(\nu = 0, 1, \ldots n-1)$ die Gesamtheit der n^{ten} Einheitswurzeln vorstellen, also die entsprechenden Punkte die Kreisperipherie in n gleiche Teilbögen zerlegen, so enthält jeder dieser Teilbögen *einen* der Punkte $e^{2\nu\alpha\pi i}$. Und da andererseits die Näherungsbruch-Nenner n mit unbegrenzt wachsendem Index gleichfalls unbegrenzt wachsen, jene Teilbögen also unbegrenzt abnehmen, so folgt, wie behauptet, daß die Punkte $(\!(1)\!)^\alpha \equiv e^{2\nu\pi i\alpha}$ (schon für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, um so mehr für $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) auf dem Kreise $|x| = 1$ *überall dicht* liegen.[1])

§ 73. Die allgemeine Exponentialfunktion $(\!(b)\!)^x$ und die allgemeine Potenzfunktion $(\!(x)\!)^a$. — Die binomische Reihe. — Reihenentwicklung und analytische Fortsetzung von x^a. — Ergänzung zu dem Reihen-Umkehrungssatz von § 69.

1. Während bei den bisherigen auf die allgemeine Potenz $(\!(b)\!)^a$ bzw. deren Hauptwert b^a sich beziehenden Betrachtungen die Zahlen a und b (abgesehen von der Bedingung $b \neq 0$) zwar beliebige aber *feste* Zahlen bedeuteten, soll jetzt *eine* dieser beiden Zahlen durch eine komplexe *Veränderliche* x ersetzt werden. Auf diese Weise ergibt sich die *allgemeine Exponentialfunktion* $(\!(b)\!)^x$ und die *allgemeine Potenzfunktion* $(\!(x)\!)^a$ (gewöhnlich schlechthin als *allgemeine Potenz* bezeichnet) mit ihren Hauptwerten b^x bzw. x^a. Zur Definition von b^x und $(\!(b)\!)^x$ hat man nach Gl. (1) und (3) des vorigen Paragraphen:

$$b^x = e^{x \lg b} = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{1}{\nu!}(x \cdot \lg b)^\nu \tag{1}$$

$$(\!(b)\!)^x = e^{x \operatorname{Lg}_\mu b} = b^x \cdot e^{2\mu x\pi i} \qquad (\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).\text{[2]} \tag{2}$$

Dabei ist der Hauptwert eine ganze transzendente Funktion, nämlich eine gewöhnliche Exponentialfunktion mit dem Argument $(\lg b) \cdot x$. Dagegen ist die offenbar wiederum *unendlich vieldeutige* Funktion $(\!(b)\!)^x$ überhaupt *keine monogene* analytische Funktion, vielmehr lediglich eine Zusammenfassung unendlich vieler, durchaus getrennt verlaufender *eindeutiger* (gleich-

---

1) Da die Zahl α keiner anderen Bedingung zu genügen hat, als der, *irrational* zu sein, so steht es insbesondere frei, $\alpha = \frac{1}{2\pi}$ zu setzen. Man findet auf diese Weise $e^{\nu i}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ als besonders einfaches Beispiel einer *abzählbaren* Menge, die auf dem Einheitskreise *überall* dicht liegt. Die analoge Eigenschaft besitzen dann die Koordinaten von $e^{\nu i}$, nämlich $\cos\nu$, $\sin\nu$ für das reelle Intervall $[-1, +1]$.

2) Speziell ist also:

$$(\!(e)\!)^x = e^{x \operatorname{Lg}_\mu e} = e^{x(1+2\mu\pi i)}.$$

falls ganzer transzendenter) Funktionen, deren jede von dem Hauptwerte sich um einen Exponentialfaktor unterscheidet.

Diese Funktion bietet daher zu weiteren besonderen Betrachtungen keinen Anlaß.

2. Wesentlich anders liegen die Verhältnisse in bezug auf die *allgemeine Potenz:*

$$(3) \qquad ((x))^a = e^{a \operatorname{Lg}_\mu x} = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{1}{\nu!} (a \operatorname{Lg}_\mu x)^\nu,$$

welche als eine für jedes von 0 und ∞ verschiedene x *absolut* und nach Ausschluß einer beliebig kleinen Umgebung von $x = 0$ und $x = \infty$ auch *gleichmäßig* konvergierende Reihe monogener analytischer Funktionen gleichfalls den Charakter einer solchen Funktion besitzt. Geht man etwa zunächst von dem zugehörigen *Hauptwert* aus:

$$(4) \qquad x^a = e^{a \lg x} = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{a^\nu}{\nu!} (\lg x)^\nu,$$

so erscheint derselbe (auf Grund des *Cauchy*schen oder *Weierstraß*schen Doppelreihensatzes) in demselben Umfange als *regulär*, wie $\lg x$, d. h. im *Innern* des in § 70, Nr. 2 (S. 542) mit $\mathfrak{B}$ bezeichneten, von dem Schnitte $\overline{0, -\infty}$ begrenzten Bereiches. Wird die analytische Fortsetzung über diesen Schnitt ausgedehnt, so geht, je nachdem dies in der Richtung von oben nach unten oder umgekehrt geschieht, $\lg x$ in der Entwicklung (4) in $\lg x \pm 2\pi i$ und daher x^a in $e^{\pm 2a\pi i} \cdot x^a$ über, und es ist unmittelbar ersichtlich, wie bei entsprechender Wiederholung des analytischen Fortsetzungsprozesses längs eines den Nullpunkt umziehenden einfach geschlossenen Weges (z. B. eines Kreises) alle möglichen Zweige der durch Gl. (3) definierten (im allgemeinen unendlich vieldeutigen) Funktion als zusammenhängende Bestandteile einer monogenen analytischen Funktion zum Vorschein kommen (vgl. übrigens weiter unten Nr. 5).

3. Um die zur Definition des Hauptwertes x^a dienende Reihe von Gl. (4) in eine gewöhnliche Potenzreihe, etwa eine $\mathfrak{P}(x-1)$, umzuformen, hat man nur $\lg x$ durch die in § 70, Gl. (20) (S. 545) angegebene, für $|x - 1| < 1$ absolut konvergierende Reihe $\sum_1^\infty {}_\lambda (-1)^{\lambda-1} \cdot \frac{1}{\lambda} (x-1)^\lambda$ zu ersetzen und sodann die nach Potenzen dieser letzteren fortschreitende Reihe nach Potenzen von $x - 1$ zu ordnen. Zur Vereinfachung der Schreibweise erscheint es zweckmäßig vor Ausführung der betreffenden Operation x statt $x - 1$, also $1 + x$ statt x zu schreiben, somit von der Beziehung auszugehen:

$$(5) \qquad (1+x)^a = \sum_0^\infty \frac{a^\nu}{\nu!}\left(\sum_1^\infty (-1)^{\lambda-1}\cdot\frac{1}{\lambda}x^\lambda\right)^\nu \quad (|x|<1)$$

$$= 1 + \frac{ax}{1!}\sum_1^\infty (-1)^{\lambda-1}\frac{1}{\lambda}x^{\lambda-1} + \frac{a^2x^2}{2!}\left(\sum_1^\infty (-1)^{\lambda-1}\cdot\frac{1}{\lambda}x^{\lambda-1}\right)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{a^\nu x^\nu}{\nu!}\left(\sum_1^\infty (-1)^{\lambda-1}\frac{1}{\lambda}x^{\lambda-1}\right)^\nu + \cdots.$$

Nach § 40, Nr. 3, steht es frei[1]), die vorstehende Reihe nach Potenzen von x zu ordnen, so daß sie die folgende Form annimmt:

$$(6) \qquad (1+x)^a = 1 + g_1(a)x + g_2(a)x^2 + \cdots + g_\nu(a)x^\nu + \cdots,$$

wo zunächst:

$$g_1(a) = \frac{a}{1}, \quad g_2(a) = -\frac{a}{2} + \frac{a^2}{2!} = \frac{a(a-1)}{2!}$$

und allgemein $g_\nu(a)$ eine *ganze* Funktion von a vom Grade ν (da das letzte der in Gl. (5) angeschriebenen Glieder den Beitrag $\frac{1}{\nu!}a^\nu x^\nu$ liefert, andererseits die Potenz $a^{\nu+1}$ schon bei ihrem ersten Auftreten mit dem Faktor $x^{\nu+1}$ behaftet ist). Um das Bildungsgesetz von $g_\nu(a)$ zu bestimmen, gehen wir von der Bemerkung aus, daß für den Fall eines *positiven ganzzahligen* $a = n$ die Entwicklung (6) die Form annimmt:

$$(1+x)^n = 1 + g_1(n)x + g_2(n)x^2 + \cdots + g_n(n)x^n + g_{n+1}(n)x^{n+1} + \cdots,$$

wo:

$$g_1(n) = \frac{n}{1}, \quad g_2(n) = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}, \ldots g_n(n) = 1, \quad g_{n+1}(n) = 0, \ldots$$

und allgemein für $\nu < n$:

$$g_\nu(n) = \frac{1}{\nu!}n(n-1)\cdots(n-\nu+1)$$

also:

$$g_\nu(a) = 0 \text{ für } a = 0, 1, \ldots (\nu-1).$$

Da aber bereits feststeht, daß $g_\nu(a)$ eine *ganze Funktion* ν^{ten} Grades von a, so muß $g_\nu(a)$ die Form haben:

$$(7\text{a}) \qquad g_\nu(a) = C\cdot a(a-1)\ldots(a-\nu+1),$$

wo C eine (von a unabhängige) *Konstante*. Zu ihrer Bestimmung genügt die Tatsache, daß für jedes ganzzahlige positive $n : g_n(n) = 1$, also auch $g_\nu(\nu) = 1$ für jedes ganzzahlige positive ν, somit schließlich:

$$(g_\nu(a))_{a=\nu} = 1$$

---

1) Es sind hier sogar die *beiden* auf S. 307 unter 1) und 2) angeführten Bedingungen erfüllt, deren jede einzeln schon für den fraglichen Zweck ausreichen würde.

und mit Rücksicht auf Gl. (7a):

$$(7\text{b}) \qquad 1 = C \cdot \nu(\nu - 1) \ldots 1, \quad \text{d. h.} \quad C = \frac{1}{\nu!}.$$

Hiernach ergibt sich:

$$(7\text{c}) \qquad g_\nu(a) = \frac{a(a-1)\ldots(a-\nu+1)}{\nu!} \equiv (a)_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wenn man nach Analogie der ursprünglich für ganzzahlige positive $a = n$ eingeführten Schreibweise (s. I_1, § 14, Gl. (5), S. 88) den durch Gl. (7c) definierten ν^{ten} *Binomialkoeffizienten für den Exponenten* a mit $(a)_\nu$ bezeichnet (wie schon I_3, § 87, Gl. (45), S. 667).

Die fragliche Reihenentwicklung (6) lautet daher schließlich:

$$(8) \qquad (1+x)^a = 1 + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{a(a-1)\ldots(a-\nu+1)}{\nu!} x^\nu = \sum_0^\infty{}_\nu (a)_\nu x^\nu,$$

wenn man wiederum noch nach Analogie von $(n)_0 = 1$ auch $(a)_0 = 1$ setzt. Sie wird als die *binomische* bezeichnet und stellt, zunächst für $|x| < 1$ absolut konvergierend, den *Hauptwert* von $((1+x))^a$ dar. Wie in § 31, Nr. 2 (S. 249) gezeigt wurde, *konvergiert* sie auch für $|x| = 1$ noch *absolut*, wenn $\Re(a) > 0$; dagegen nur noch *bedingt*, und zwar mit Ausschluß der Stelle $x = -1$, wenn $-1 < \Re(a) \leqq 0$, und stellt also nach dem *Abel*schen Stetigkeitssatze (§ 32, Nr. 5, S. 257) in entsprechendem Umfange noch den Hauptwert $(1+x)^a$ dar.

Ersetzt man in Gl. (8) a durch $a-1$, so folgt:

$$(1+x)^{a-1} = \sum_0^\infty{}_\nu (a-1)_\nu x^\nu = \sum_1^\infty{}_\nu (a-1)_{\nu-1} x^{\nu-1},$$

und daraus ergibt sich, wenn man noch beachtet, daß:

$$a(a-1)_{\nu-1} = a \cdot \frac{(a-1)(a-2)\ldots(a-\nu+1)}{(\nu-1)!} = \nu(a)_\nu,$$

die Beziehung:

$$a(1+x)^{a-1} = \sum_1^\infty{}_\nu \nu(a)_\nu x^{\nu-1} = D\sum_0^\infty{}_\nu (a)_\nu x^\nu,$$

so daß also:

$$(9) \qquad D(1+x)^a = a(1+x)^{a-1},$$

d. h. der Hauptwert $(1+x)^a$ besitzt für $|x| < 1$ eine *Derivierte* bzw. einen *Differentialquotienten* mit dem nämlichen Bildungsgesetz, wie das im Falle eines reellen ganzzahligen Exponenten a geltende.

4. Da der Hauptwert $(1+x)^a$ auf Grund der gegebenen Definition sich durch reelle Elementarfunktionen darstellen läßt, so kann er umgekehrt dazu dienen, um die *binomische Reihe*, bzw. ihren *reellen* und *ima-*

ginären Teil, zu *summieren*. Man hat zunächst, wenn $a = \alpha + \beta i$, $x = \xi + \eta i$:

$$\sum_0^\infty{}^\nu (a)_\nu x^\nu = e^{(\alpha + \beta i)\lg(1+x)}$$
$$= e^{(\alpha + \beta i)(\lg|1+x| + i \operatorname{arctg}(\eta \mid 1+\xi)}.$$

Infolge der Beschränkung $|x| \leqq 1$ hat man, wenn der Wert $x = -1$ bis auf weiteres ausgeschlossen wird, $1 + \xi > 0$ und kann daher den *„erweiterten" Hauptwert* des *Arcustangens* (s. § 71, Nr. 5, Gl. (22)) durch den *gewöhnlichen* ersetzen. Hiernach findet man:

$$(10) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu (a)_\nu x^\nu = e^{\alpha \lg|1+x| - \beta \operatorname{arctg}\frac{\eta}{1+\xi}} \cdot e^{\left(\beta \lg|1+x| + \alpha \operatorname{arctg}\frac{\eta}{1+\xi}\right) i}.$$

Ist insbesondere *a reell*, also: $a = \alpha$, $\beta = 0$, so nimmt diese Formel die einfachere Gestalt an:

$$(10a) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu (\alpha)_\nu x^\nu = e^{\alpha \lg|1+x| + \alpha\left(\operatorname{arctg}\frac{\eta}{1+\xi}\right) i}$$
$$= |1+x|^\alpha \left(\cos\left(\alpha \operatorname{arctg}\frac{\eta}{1+\xi}\right) + i \sin\left(\alpha \operatorname{arctg}\frac{\eta}{1+\xi}\right)\right).$$

Setzt man $x = r \cdot e^{\vartheta i}$ (wo: $-\pi < \vartheta \leqq \pi$), so folgt aus (10a) durch Trennung des Reellen und Imaginären:

$$(11) \quad \begin{cases} 1 + \sum_1^\infty{}^\nu (\alpha)_\nu r^\nu \cos \nu\vartheta = (1 + r^2 + 2r\cos\vartheta)^{\frac{\alpha}{2}} \cos\left(\alpha \operatorname{arctg}\frac{r \sin\vartheta}{1 + r\cos\vartheta}\right) \\ \sum_1^\infty{}^\nu (\alpha)_\nu r^\nu \sin \nu\vartheta = (1 + r^2 + 2r\cos\vartheta)^{\frac{\alpha}{2}} \sin\left(\alpha \operatorname{arctg}\frac{r \sin\vartheta}{1 + r\cos\vartheta}\right). \end{cases}$$

Ist $\alpha > 0$ bzw. $-1 < \alpha < 0$, so daß also die beiden Reihen für $r = 1$ noch *konvergieren* (NB. infolge des Ausschlusses von $x = -1$, also $\vartheta = \pi$, auch im Falle: $-1 < \alpha < 0$), so gehen für $r = 1$ $\left(\text{wegen: } \frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta} = \operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}\right)$ die beiden obigen Beziehungen in die folgenden über:

$$(11a) \quad \begin{cases} 1 + \sum_1^\infty{}^\nu (\alpha)_\nu \cos\nu\vartheta = \left(2\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^\alpha \cos\frac{\alpha\vartheta}{2} \\ \sum_1^\infty{}^\nu (\alpha)_\nu \sin\nu\vartheta = \left(2\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^\alpha \sin\frac{\alpha\vartheta}{2} \end{cases} \qquad (-\pi < \vartheta < \pi).$$

Wenn $\alpha > 0$, so ist $\sum_1^\infty{}^\nu (\alpha)_\nu x^\nu$, wie oben bemerkt, auch für den bisher ausgeschlossenen Wert $x = -1$, also $\vartheta = \pi$, noch (absolut) *konvergent*

und es bleiben daher die Gleichungen (11a) infolge der *Stetigkeit* beider Seiten noch gültig. Dabei liefert die erste die Binomialkoeffizientenbeziehung:

$$(11\text{b})\qquad 1+\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}(-1)^{\nu}(\alpha)_{\nu}=0,$$

während die zweite sich auf die Identität $0 = 0$ reduziert.

Dagegen wird im Falle: $-1<\alpha<0$ die *erste* Reihe für $\vartheta=\pi$ *divergent*, während die *zweite* zwar (nach Null) *konvergiert*, aber die rechte Seite der betreffenden Gleichung (wie auch der ersten) *unendlich* wird.

5. Bedeutet jetzt x_0 irgendeine im Innern des oben mit $\mathfrak{B}$ bezeichneten Bereiches (d. h. nicht auf dem Schnitte $\overline{0,-\infty}$ gelegene) Stelle, so hat man (vgl. § 70, Gl. (23), S. 546) jedenfalls dann:

$$\lg\frac{x}{x_0}=\lg x-\lg x_0,$$

wenn x einer passend gewählten Umgebung der Stelle x_0 angehört, und in diesem Falle nach Gl. (9a) des vorigen Paragraphen (S. 563):

$$(12)\qquad x^{a}=x_0{}^{a}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{a}=x_0{}^{a}\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{a}.$$

Ist sodann $|x-x_0|<|x_0|$ bzw. unter den oben in bezug auf a angegebenen Bedingungen auch: $|x-x_0|=|x_0|$, so läßt sich der letzte Faktor der vorstehenden Gleichung durch die binomische Reihe ersetzen, und zwar gilt alsdann die Beziehung:

$$(13)\qquad x^{a}=x_0{}^{a}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}(a)_{\nu}\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\nu},$$

solange x einerseits dem *Konvergenzkreise* der Reihe, also dem Kreise um den Punkt x_0 mit dem Radius $|x_0|$ angehört und zugleich x^a *stetig* bleibt, d. h. schließlich für das die Stelle x_0 umschließende Konvergenzgebiet, soweit dasselbe den Schnitt $\overline{0,-\infty}$ *nicht überschreitet* (vgl. die analoge Betrachtung § 70, Nr. 5 im Anschlusse an Gl. (24a), S. 546). Ist das letztere der Fall, was allemal dann eintritt, wenn $\mathfrak{R}(x_0)<0$, also x_0 der *linken* Halbebene angehört, so stellt die *Reihe*, wie aus Nr. 2 dieses Paragraphen hervorgeht, *jenseits* des Schnittes $\overline{0,-\infty}$ den Wert $e^{2a\pi i}\cdot x^a$ bzw. $e^{-2a\pi i}\cdot x^a$ dar, je nachdem x_0 dem *oberen* oder *unteren* Quadranten der *linken* Halbebene angehört. In dem besonderen Falle eines *auf dem Schnitte* $\overline{0,-\infty}$ liegenden, also reell-*negativen* x_0 wird in dem *oberen* Halbkreise einschließlich des begrenzenden Durchmessers $\overline{0,2x_0}$ der Hauptwert x^a, in dem *unteren* der Wert $e^{2a\pi i}\cdot x^a$ durch die Reihe dargestellt (vgl. Fußn. 1, S. 547).

Es bedarf keiner weiteren Ausführung, wie bei wiederholter analytischer Fortsetzung eines Funktionselements von der Form (13) längs eines geschlossenen, den Nullpunkt umziehenden Weges in positiver oder negativer Umlaufsrichtung alle möglichen Werte $e^{2\nu a\pi i}\cdot x^a$ bzw. $e^{-2\nu a\pi i}\cdot x^a$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) zum Vorschein kommen; und daß diese letzteren durchweg von einander verschieden sind, außer wenn a *rational* (vgl. Nr. 9 und 10 des vorigen Paragraphen).

Ist insbesondere $a = \frac{1}{n}$ und setzt man: $e^{\frac{2\nu\pi i}{n}} = \mathfrak{e}_\nu$ (also: $\mathfrak{e}_\nu = \mathfrak{e}_1{}^\nu$), so folgt, daß bei $(n-1)$mal wiederholter analytischer Fortsetzung in positiver Richtung längs eines Kreises um den Nullpunkt der Hauptwert $x^{\frac{1}{n}} \equiv |x|^{\frac{1}{n}}\cdot e^{\frac{\psi i}{n}}$ (wo: $-\pi < \psi \leqq \pi$) sukzessive in $\mathfrak{e}_1 x^{\frac{1}{n}}$, $\mathfrak{e}_2 x^{\frac{1}{n}}$, $\ldots$ $\mathfrak{e}_{n-1} x^{\frac{1}{n}}$ übergeht, während schließlich bei dem n^{ten} Umlauf, wegen: $\mathfrak{e}_n = \mathfrak{e}_0 = 1$, wieder $x^{\frac{1}{n}}$ zum Vorschein kommt. Der *Nullpunkt*, der durch seine Lage *im Innern* des betreffenden Fortsetzungsweges diese *„Verzweigung"* veranlaßt, wird in diesem Falle als ein *„algebraischer" Verzweigungspunkt*, und zwar als ein solcher *von der* $(n-1)^{\text{ten}}$ *Ordnung* bezeichnet.

6. In § 69 wurde gezeigt, daß eine Beziehung von der Form:

$$y = y_0 + \sum_1^\infty A_\nu (x - x_0)^\nu$$

dann und nur dann eine eindeutige, und zwar reguläre Umkehrung zuläßt, wenn A_1, anders geschrieben: $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$, *von Null verschieden* ist. Unberührt blieb a. a. O. die Frage, was sich etwa über die Umkehrung der obigen Beziehung aussagen läßt, falls jene Bedingung *nicht* erfüllt ist, wenn also $A_1 = 0$ und, um gleich den allgemeinsten Fall ins Auge zu fassen, A_n für irgend ein $n \geqq 2$ der *erste* von Null verschiedene Koeffizient der obigen Entwicklung ist. Die Ergebnisse dieses Paragraphen setzen uns in den Stand, diese Frage zu beantworten. Dabei steht es auf Grund der a. a. O. in Nr. 1 angegebenen Substitutionen frei, die Ausgangsgleichung in der Weise zu vereinfachen, daß dem Werte $x = 0$ der Wert $y = 0$ entspricht und außerdem der erste nicht verschwindende Koeffizient der betreffenden Potenzreihe den Wert 1 hat, daß also (vgl. S. 526, Gl. (1a)):

$$y = x^n\left(1 + \sum_1^\infty a_\nu x^\nu\right), \tag{14}$$

wo jetzt $n \geqq 2$. Setzt man sodann:

$$t = x\left(1 + \sum_1^\infty a_\nu x^\nu\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{15}$$

so daß also $t^n = y$, so ist t *eine bestimmte* der n Lösungen[1]) der Gleichung:

$$(16) \qquad z^n = y,$$

deren $n-1$ übrige Lösungen in der Form darstellbar sind:

$$(17) \qquad z = \mathfrak{e}_\mu t, \text{ wo: } \mathfrak{e}_\mu = e^{\frac{2\mu\pi i}{n}} \quad (\mu = 1, 2, \ldots n-1)$$

Da $\sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu = 0$ für $x = 0$, so bleibt $\left|\sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu\right| < 1$ für eine gewisse Umgebung $|x| < \varrho'$, für die alsdann die binomische Reihenentwicklung besteht:

$$\left(1 + \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu\right)^{\frac{1}{n}} = 1 + \sum_1^\infty {}^\lambda \left(\frac{1}{n}\right)_\lambda \left(\sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu\right)^\lambda.$$

Diese letztere kann aber nach § 40, Nr. 3 (siehe insbesondere S. 307, Fall 1)) für eine gewisse Umgebung $|x| < \varrho \leqq \varrho'$ nach Potenzen von x geordnet werden, so daß Gl. (15) sich in die Form setzen läßt:

$$(18) \qquad t = x\left(1 + \sum_1^\infty {}^\nu b_\nu x^\nu\right).$$

Daraus folgt aber nach dem Hauptsatze von § 69, Nr. 3, daß für x eine Entwicklung von der Form besteht:

$$(19\text{a}) \qquad x = t + \sum_1^\infty {}^\nu c_\nu t^\nu \qquad (|t| < \varrho)$$

als Umkehrung derjenigen Gleichung, welche aus (14) entsteht, wenn man daselbst $y = t^n$ einsetzt. Da aber auch $(\mathfrak{e}_\mu t)^n = y$ $(\mu = 1, 2, \ldots n-1)$, so folgt durch Einsetzen von $(\mathfrak{e}_\mu t)^n$ in Gl. (14), daß für x auch jede derjenigen Gleichungen besteht, welche aus (19a) hervorgehen, wenn man t

---

1) Man darf *nicht* etwa ohne weiteres schließen, daß t der *Hauptwert* von $\sqrt[n]{y}$ ist, mit anderen Worten, daß die Gleichung (14) stets die folgende nach sich zieht:

$$y^{\frac{1}{n}} = x\left(1 + \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu\right)^{\frac{1}{n}}$$

(vgl. § 72, Gl. (9a), S 568). Auch sei daran erinnert, daß *keineswegs allgemein:*

$$(x^n)^{\frac{1}{n}} = x,$$

vielmehr *nur dann,* wenn:

$$\lg x^n = n \lg x$$

(vgl. S. 569, Fußn 2), d. h. wenn: $-\pi < \Re\left(\frac{n}{i}\lg x\right) \leqq \pi$.

durch $e_\mu t$ ersetzt, also:

$$(19b) \qquad x = e_\mu t + \sum_1^\infty{}' c_\nu e_\mu{}^\nu t^\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots n-1).$$

Da die Zahlen $e_\mu t$ mit Hinzunahme des Falles $\mu = 0$ alle n Lösungen der Gleichungen $z^n = y$ umfassen, so muß unter ihnen insbesondere auch der Hauptwert $y^{\frac{1}{n}}$ vorkommen, während dann alle übrigen Lösungen wieder in der Form $e_\mu y^{\frac{1}{n}}$ $(\mu = 1, 2, \ldots n-1)$ enthalten sind. Somit ergibt sich schließlich das Gleichungssystem:

$$(20) \qquad x = e_\mu y^{\frac{1}{n}} + \sum_1^\infty{}' c_\nu e_\mu{}^\nu y^{\frac{\nu}{n}} \qquad (|y| < \varrho^n;\ \mu = 1, 2, \ldots n-1)$$

als Umkehrung der Beziehung (14). Hiernach ist x in der Umgebung von $y = 0$ eine *n-wertige* Funktion von y, deren n Zweige durch Reihen nach *gebrochenen* Potenzen von y darstellbar sind. Beschreibt y in positiver Richtung einen Kreis mit einem Radius $r < \varrho^n$ um den Punkt $y = 0$, so geht $y^{\frac{1}{n}}$ in $e_1 y^{\frac{1}{n}}$, bei einem zweiten Umlauf in $e_2 y^{\frac{1}{n}}$ über usf., bis nach dem n^{ten} Umlauf wieder $y^{\frac{1}{n}}$ zum Vorschein kommt. Ein entsprechender Zusammenhang findet zwischen den durch die Gl. (20) dargestellten n Zweigen von x als Funktion von y statt. Für diese ist also der Punkt $y = 0$ ein Verzweigungspunkt $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

§ 74. Der Arcussinus. — Seine Zurückführung auf einen Logarithmus. — Der Hauptwert arcsin x und die Erzeugung der unendlich vieldeutigen Funktion Arcsin x durch analytische Fortsetzung.

1. Bei der Umkehrung der Sinusfunktion, also der Beziehung:

$$(1) \qquad x = \sin y \equiv \sum_0^\infty{}' (-1)^\nu \frac{1}{(2\nu+1)!} y^{2\nu+1}$$

verfahren wir analog, wie bei derjenigen von $x = \operatorname{tg} y$ (vgl. § 71, Nr. 1, S. 551).

Aus der Form der Reihe (1) folgt zunächst auf Grund des Hauptsatzes von § 69, daß dieselbe eine und nur eine für $x = 0$ gleichfalls *verschwindende* Umkehrung $y = \mathfrak{P}(x)$ besitzt. Zu ihrer Herleitung bedienen wir uns der in § 69, Nr. 7 (S. 538) angegebenen Methode. Danach gehen wir von der aus (1) hervorgehenden Beziehung aus:

$$(2) \qquad \frac{dx}{dy} = \cos y$$

und haben zunächst die rechte Seite dieser Gleichung durch x auszudrücken. Man findet ohne weiteres $\cos y = \sqrt{1-x^2}$, es fragt sich nur, welcher Wert dieser Quadratwurzel in der Umgebung von $y=0$ der *eindeutigen* Funktion $\cos y$ gleich zu setzen ist. Da $(\cos y)_{y=0} = 1$, so folgt, daß für eine gewisse Nachbarschaft von $y=0$ die Beziehung $\Re(\cos y) > 0$ bestehen muß und daß daher für die entsprechende Umgebung von $x=0$ in Gl. (1) bzw. (2) der *Hauptwert* von $\sqrt{1-x^2}$ zu wählen ist, so daß also:

$$\frac{dx}{dy} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

und somit unter der Voraussetzung $|x| < 1$:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \quad = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \cdots + \dfrac{1\cdot 3\cdots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdots 2\nu}x^{2\nu} + \cdots \end{cases}$$

Mit Berücksichtigung der Bedingung, daß $y=0$ für $x=0$ sein sollte, findet man also für $|x|<1$ die Reihenentwicklung:

$$(4)\quad y = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdots 2\nu}\cdot\frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1} + \cdots,$$

welche übrigens auch noch für $|x|=1$ *absolut konvergiert*, wie mit Hilfe des *Raabe*schen Kriteriums (s. I_2, § 54, Nr. 6, S. 385) erkannt wird.

Damit ist zunächst *ein* Funktionselement der Umkehrungsfunktion von $x = \sin y$ gefunden. Diese selbst muß, da infolge der Beziehungen: $\sin y = \sin(y + 2n\pi)$ und: $\sin y = \sin((2n+1)\pi - y)$ (wo $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) zu jedem x unendlich viele y gehören, wiederum eine *unendlich vieldeutige* Funktion sein, die als *Arcussinus* von x, also:

$$(5)\qquad y = \operatorname{Arcsin} x,$$

bezeichnet werden soll.

Als ihren *Hauptwert*, der nach Analogie der bereits beim Logarithmus und Arcustangens benützten Schreibweise durch das Zeichen $\arcsin x$ dargestellt werden soll, wählen wir den zunächst für den beschränkten Bereich $|x| \leqq 1$ durch die Reihe (4) definierten Funktionswert, so daß also:

$$(6)\quad \arcsin x = x + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1\cdot 3\cdots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdots 2\nu}\cdot\frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{(2\nu)!}{(\nu!\,2^{\nu})^2}\cdot\frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1}$$

für $|x| \leqq 1$ [1]) und im übrigen durch die analytische Fortsetzung dieser

---

1) Da nach (6) der Wert von $y = \arcsin x$ für *reelle positive* $x \leqq 1$ mit x *monoton* zunimmt und andererseits aus:

$$x = \sin y$$

Reihe über einen noch näher zu bestimmenden Regularitätsbereich dargestellt wird. In dem nämlichen Umfange wird dann die Gesamtheit der Werte von $\operatorname{Arcsin} x$ durch die beiden Funktionenfolgen dargestellt:

$$(7)\quad \begin{cases} \operatorname{Arcsin} x = \arcsin x + 2n\pi \\ \operatorname{Arcsin} x = -\arcsin x + (2n+1)\pi \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

2. Um eine einheitliche Formel zu finden, vermöge deren, ähnlich wie beim Arcustangens (s. § 71, Nr. 2, S. 552) die analytische Fortsetzung des *Hauptwertes* (6) auf diejenige eines *Logarithmus* zurückgeführt werden kann, setzen wir Gl. (1) in die Form:

$$(8)\qquad x = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i} = \frac{e^{2yi} - 1}{2i \cdot e^{yi}},$$

welche für e^{yi} die quadratische Gleichung liefert:

$$e^{2yi} - 2xi \cdot e^{yi} = 1$$

mit den beiden Lösungen:

$$e^{yi} = xi \pm (1 - x^2)^{\frac{1}{2}},$$

so daß alle überhaupt möglichen Lösungen von Gl. (1) in der Form enthalten sind:

$$(9)\quad y \equiv \operatorname{Arcsin} x = \frac{1}{i} \operatorname{Lg}_n \left(xi \pm (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Unter diesen unendlich vielen (konform mit den Gleichungen (7) in zwei Serien zerfallenden) in der Umgebung von $x = 0$ sichtlich *regulären* Lösungen von Gl. (1) ist *eine* und *nur* eine vorhanden, die für $x = 0$ gleichfalls zu *Null* wird, nämlich: $y = \frac{1}{i} \lg \left(xi + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right)$. Diese muß also nach dem Hauptsatze von § 69 (in der „verschärften" Form von Nr. 3, S. 529) für $|x| \leqq 1$ mit dem durch Gl. (6) definierten *Hauptwert*

---

folgt, daß die Wertintervalle $0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ und $0 \leqq x \leqq 1$ sich gegenseitig entsprechen, so erkennt man, daß der durch Gl. (6) definierte Hauptwert $\arcsin x$ für reelle positive $x \leqq 1$ mit demjenigen der elementaren Trigonometrie zusammenfällt und daß insbesondere:

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(2\nu)!}{(\nu!\, 2^\nu)^2} \cdot \frac{1}{2\nu + 1}.$$

Da überdies die Reihensumme (6) für $x = 1$ ihr *Maximum*, für $x = -1$ ihr *Minimum* $-\frac{\pi}{2}$ erreicht, so folgt weiter, daß für $|x| \leqq 1$, abgesehen von $x = \pm 1$:

$$-\frac{\pi}{2} < \Re(\arcsin x) < \frac{\pi}{2}.$$

identisch sein, so daß für den letzteren jetzt die erweiterte Definition sich ergibt:

(10) $$\arcsin x = \frac{1}{i}\lg\left(xi + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Dieselbe läßt erkennen, daß $\arcsin x$ sich *regulär* verhält, solange das Argument $xi + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ des Logarithmus den beiden Bedingungen genügt, **erstens** selbst *regulär* und **zweitens** *nicht reell-negativ* oder *Null* bzw. *Unendlich* zu sein.

3. Bezüglich der *ersten* Bedingung bemerke man zunächst, daß $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ *im Innern* desjenigen Bereiches $\mathfrak{B}$, welcher von den beiden Schnitten $\overline{-1, -\infty}$, $\overline{1, +\infty}$ begrenzt wird, *eindeutig* und *regulär* ist.

Schränkt man nämlich vorläufig $x = \xi + \eta i$ auf das Gebiet $|x| < 1$ ein, so hat man: $1 \pm \xi > 0$ und daher:

$$\lg(1 \pm x) = \lg|1 \pm x| + i \operatorname{arctg}\frac{\pm\eta}{1 \pm \xi},$$

wenn man beachtet, daß hier wiederum (nach § 71, erste der Gleichungen (22), S. 559) der im allgemeinen Falle erforderliche *erweiterte* Hauptwert des Arcustangens mit dem *gewöhnlichen* zusammenfällt, also dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}(\text{exkl.}), \frac{\pi}{2}\right]$ angehört und daher für $\lg(1+x) + \lg(1-x)$ der Koeffizient von i zwischen $-\pi$ und π liegt, eventuell π erreicht. Infolgedessen hat man nach § 70, Gl. (13), S. 543:

$$\lg(1-x^2) \equiv \lg(1+x)(1-x) = \lg(1+x) + \lg(1-x),$$

zunächst für $|x| < 1$, sodann aber infolge des *regulären Verhaltens* und der damit verbundenen *Stetigkeit* von $\lg(1-x^2)$ und $\lg(1 \pm x)$ im Innern des oben mit $\mathfrak{B}$ bezeichneten Bereiches.

Da andererseits:

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\lg(1-x^2)}, \quad (1 \pm x)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\lg(1 \pm x)},$$

so folgt, daß *im Innern* von $\mathfrak{B}$ auch $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $(1 \pm x)^{\frac{1}{2}}$ sich *regulär* verhalten und die Beziehung besteht:

(11) $$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

Für eine beliebige auf dem *Schnitte* $\overline{-1, -\infty}$ gelegene Stelle, etwa: $x = -(1+\varrho)$ (wo: $\varrho > 0$) findet man:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}_{x=-(1+\varrho)} = (-\varrho)^{\frac{1}{2}} = \varrho^{\frac{1}{2}} i,$$

also einen Wert, der sich noch den auf der *oberen* Halbebene vorhandenen

stetig anschließt, während bei Annäherung von x an die Stelle $-(1+\varrho)$ von der *unteren* Halbebene aus sich ergibt:

$$\lim_{x \to -(1+\varrho)} (1+x)^{\frac{1}{2}} = -\varrho^{\frac{1}{2}} i$$

Bei *analytischer*, also *stetiger* Fortsetzung von $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ *über* den Schnitt $\overline{-1, -\infty}$ (gleichgültig ob von der *oberen* oder *unteren* Seite her) geht hiernach $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ in $-(1+x)^{\frac{1}{2}}$ und somit $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ in $-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ über, wenn man noch in Betracht zieht, daß für den Faktor $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ der Punkt -1 *kein Verzweigungspunkt* und der Schnitt $\overline{-1, -\infty}$ (abgesehen von der Stelle ∞) aus lauter Stellen regulären Verhaltens besteht.

Analoge Verhältnisse ergeben sich für $(1-x^2)$ in bezug auf den Schnitt $\overline{1, +\infty}$ mit dem einzigen Unterschiede, daß die Werte, welche nunmehr der Faktor $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ auf diesem Schnitte, also für $x = 1+\varrho$, annimmt (nämlich wieder $(-\varrho)^{\frac{1}{2}} = \varrho^{\frac{1}{2}} i$) den auf der angrenzenden *unteren* Halbebene vorhandenen sich *stetig* anschließen.

Aus dem Gesagten folgt, daß $xi + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, das Argument des Logarithmus in Formel (10), *eindeutig* und *regulär* ist *im Innern* des Bereiches $\mathfrak{B}$, *unstetig* längs der beiden Schnitte $\overline{-1, -\infty}$, $\overline{1, +\infty}$, und bei analytischer Fortsetzung *über* jeden dieser Schnitte in $xi - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ übergeht.

Um im Hinblick auf die *zweite* der oben genannten Bedingungen festzustellen, in wieweit $xi + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ *reell-negativ* oder *Null* werden kann, gehen wir aus von der Identität:

$$(12) \qquad \left(xi + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)\left(xi - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right) = -1,$$

welche fürs erste zeigt, daß keiner der beiden linksstehenden Faktoren für irgendein endliches x zu *Null* werden kann; daß, wenn *einer* dieser Faktoren *reell* ist, das gleiche auch für den *anderen*, somit auch für die *Summe* der beiden, d. h. für $2xi$ gilt. Soll also überhaupt die Möglichkeit bestehen, daß einer jener beiden Ausdrücke *reell* ausfällt, so könnte das nur der Fall sein, wenn x *rein imaginär*, etwa $x = \eta i$ ist. Alsdann ergibt sich aber (gleichgültig ob $\eta \gtrless 0$):

$$(13) \qquad \begin{cases} \text{a)} \quad \left(xi + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)_{x=\eta i} = -\eta + (1+\eta^2)^{\frac{1}{2}} > 0 \\ \text{b)} \quad \left(xi - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)_{x=\eta i} = -\eta - (1+\eta^2)^{\frac{1}{2}} < 0. \end{cases}$$

Aus alledem geht hervor, daß $xi + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ *niemals negativ* oder *Null* wird, während $xi - (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ längs der imaginären Achse *ausnahmslos negativ* ausfällt.

4. Während hiernach für $\arcsin x \equiv \frac{1}{i} \lg \left(xi + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right)$ die *zweite* der fraglichen Bedingungen ohne Belang ist und mit Berücksichtigung der *ersten* $\arcsin x$ *im Innern* von $\mathfrak{B}$ sich als *regulär* erweist[1]), so besitzt der Ausdruck $\frac{1}{i} \lg \left(xi - (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right)$, welcher ja nach Gl. (9) gleichfalls eine Umkehrung von $y = \sin x$, also einen Wert[2]) von $\operatorname{Arcsin} x$ darstellt, diesen Charakter nur *im Innern* der beiden *Teilbereiche*, in welche der Bereich $\mathfrak{B}$ durch die *imaginäre* Achse zerlegt wird, etwa $\mathfrak{B}'$ (*rechts*) und $\mathfrak{B}''$ (*links*). Längs der trennenden Achse, auf welcher nach dem oben Gesagten das Argument des Logarithmus *reell-negativ* ist, muß dieser einen Stetigkeitssprung erleiden. Um dessen Größe festzustellen bilden wir im Anschluß an Gl. (12) und mit Berücksichtigung von § 70, Gl. (13) ff. (S. 543) den Ausdruck:

$$(14)\quad \lambda(x) \equiv \lg\left(xi + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right) + \lg\left(xi - (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right) = \lg(-1) + 2\sigma\pi i$$
$$= (2\sigma + 1)\pi i,$$

wo σ je nach Beschaffenheit der Amplituden von $\left(xi \pm (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right)$ eine der Zahlen 0, -1 vorstellt. Nun ist $\lambda(x)$ *im Innern* der Bereiche $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$ *stetig* mit Einschluß der beiden Grenzstellen $+1$ und -1, folglich im Hinblick auf Gl. (14) in jedem einzelnen dieser Bereiche *konstant*. Da aber insbesondere:

$$\lambda(+1) \equiv 2 \lg i = \pi i, \qquad \lambda(-1) \equiv 2 \lg(-i) = -\pi i$$

---

1) In diesem Umfange gilt dann insbesondere auch die Beziehung:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x,$$

deren Richtigkeit zunächst für $|x| \leq 1$ unmittelbar aus der Reihendarstellung (6) hervorgeht. Infolge der längs der Schnitte (abgesehen von den Stellen ± 1 und ∞) noch bestehenden Stetigkeit bleibt sie auch auf diesen gültig.

2) Nämlich denjenigen, welcher aus der allgemeinen Lösung:

$$\frac{1}{i} \operatorname{Lg}_n \left(xi - (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right)$$

geradeso für $n = 0$ hervorgeht, wie der *Hauptwert* aus:

$$\frac{1}{i} \operatorname{Lg}_n \left(xi + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right),$$

und der infolgedessen von manchen Autoren als *zweiter Hauptwert* bezeichnet wird.

so geht Gl. (14) in die beiden folgenden über:

$$(15)\quad \lambda(x) \equiv \lg\left(xi + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right) + \lg\left(xi - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)\begin{cases} = \pi i & \text{für } \Re(x) > 0, \\ = -\pi i & \text{„ } \Re(x) < 0. \end{cases}$$

Beachtet man nun, daß aus (13) folgt:

$$(15\text{a})\quad \lambda(\eta i) \equiv \lg\left(-\eta + (1+\eta^2)^{\frac{1}{2}}\right) + \lg\left(\eta + (1+\eta^2)^{\frac{1}{2}}\right) + \pi i,$$

so erkennt man, daß die *erste* der Gleichungen (15) auch noch längs der *imaginären* Achse, also für $\Re(x) = 0$ gilt.

Da nun für $\lg\left(xi + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)$ die imaginäre Achse keinerlei Stetigkeitsunterbrechung mit sich bringt, so folgt aus den Gleichungen (15), daß $\lg\left(xi - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)$, wenn x die imaginäre Achse in der Richtung von rechts nach links überschreitet, sich sprungweise um $-2\pi i$ ändert (auf der Achse selbst nach Gl. (15a) noch *stetig* bleibend).

Führt man in die Gleichungen (15) an Stelle des ersten Logarithmus auf Grund von Gl. (10) den $\arcsin x$ ein, so folgt, daß *im Bereiche* $\mathfrak{B}$ (einschließlich der Schnitte $\overline{-1, -\infty}$, $\overline{1, +\infty}$) die Beziehungen gelten:

$$(16)\quad \frac{1}{i}\lg\left(xi - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)\begin{cases} = \pi - \arcsin x & \text{für } \Re(x) \geqq 0 \\ = -\pi - \arcsin x & \text{„ } \Re(x) < 0. \end{cases}$$

Es liefert also der Ausdruck $\frac{1}{i}\lg\left(xi - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)$ nicht *einen* der im Innern des Bereiches $\mathfrak{B}$ regulären *Zweige* der unendlich vieldeutigen Funktion $\operatorname{Arcsin} x$ von der Form (7), sondern in den Teilbereichen $\Re(x) \geqq 0$ und $\Re(x) < 0$ *zwei verschiedene* Zweige, deren *erster:* $\pi - \arcsin x$ bei analytischer Fortsetzung in das Gebiet $\Re(x) < 0$ durch

$$\frac{1}{i}\operatorname{Lg}_1\left(xi - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right),$$

deren *zweiter* $-\pi - \arcsin x$ bei analytischer Fortsetzung in das Gebiet $\Re(x) \geqq 0$ durch $\frac{1}{i}\operatorname{Lg}_{-1}\left(xi - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)$ dargestellt wird.

5. Es bleibt noch zu zeigen, daß die unendlich vielen Zweige von $\operatorname{Arcsin} x$ als Bestandteile einer monogenen analytischen Funktion durch analytische Fortsetzung von $\arcsin x$ gewonnen werden können.

Wir betrachten zunächst einen einfach geschlossenen Weg, der nur *einen* der beiden Punkte ± 1, etwa den Punkt -1 *im Innern* enthält und den Schnitt $\overline{-1, -\infty}$ *ein*mal überschreitet. Von einem beliebigen

(nicht gerade auf jenem Schnitte liegenden) Punkte x_0 aus werde

$$\arcsin x \equiv \frac{1}{i} \lg\left(xi + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right)$$

längs des obigen Weges in positiver oder negativer Umlaufsrichtung analytisch fortgesetzt, bis die Fortsetzung wieder bei x_0 ihr Ende findet. Wenn x den Schnitt überschreitet (und zwar gleichgültig, in welcher Richtung), so geht $\lg\left(xi + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right)$ in $\lg\left(xi - (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right)$ also (wegen $\Re(x) < 0$) $\arcsin x$ nach Gl. (16b) in $-\pi - \arcsin x$ über, und da $\arcsin x$ auf dem ganzen übrigen Wege keine weitere Stetigkeitsunterbrechung erleidet, so bleibt dieser Wert $-\pi - \arcsin x$ als Endwert bestehen. Bei einem *zweiten* Umlauf (gleichgültig, ob in derselben oder in entgegengesetzter Richtung) würde in derselben Weise $-\pi - \arcsin x$ in den Wert $-\pi - (-\pi - \arcsin x)$ d. h. in $\arcsin x$, also wieder in den Anfangswert übergehen. Danach würde schließlich jede beliebige Anzahl von Umläufen der gedachten Art immer wieder nur einen der beiden Werte $-\pi - \arcsin x$ und $\arcsin x$ erzeugen.

Ganz analoge Ergebnisse liefert ein einfach geschlossener Weg, der nur den Punkt $+1$ umschließt, mit dem einzigen Unterschiede, daß hier bei einem einfachen Umlauf (wegen $\Re(x) > 0$, also Geltung von Gl. (16a)) $\pi - \arcsin x$ zum Vorschein kommt.

Von den beiden Punkten $x = \pm 1$ hat also keiner die Wirkung eines *logarithmischen* Verzweigungspunktes: in Wahrheit alteriert die Umlaufung jedes einzelnen der Punkte ± 1 gar nicht den *Logarithmus* als solchen, sondern lediglich die in seinem Argument vorkommende *Quadratwurzel*, was dann nur eine *Zweiwertigkeit* des betreffenden Ausdruckes zur Folge hat. Jeder der Punkte ± 1 einzeln genommen wirkt auf $\arcsin x$ nur nach Art eines *„algebraischen" Verzweigungspunktes* 1ter Ordnung.

Nichtsdestoweniger läßt sich zeigen, daß eine passende *Kombination* dieser beiden Verzweigungspunkte vollständig die Wirkung eines *logarithmischen* Verzweigungspunktes hervorbringt und daß dieses Hilfsmittel genügt, um alle die unendlich vielen Zweige von $\operatorname{Arcsin} x$ wiederum als Bestandteile einer einzigen monogenen analytischen Funktion durch analytische Fortsetzung aus dem Hauptwert $\arcsin x$ zu erzeugen.

Es seien $\mathfrak{C}_{-1}$, $\mathfrak{C}_1$ zwei von irgendeinem (nicht gerade auf einem der beiden Schnitte liegenden) Punkte x_0 ausgehende, einfach geschlossene Wege, deren erster nur den Punkt -1, deren zweiter nur den Punkt $+1$ umschließt. Die analytische Fortsetzung von $\arcsin x$ längs des geschlossenen Weges $\mathfrak{C}_{-1}$ (in beliebiger Richtung) liefert zunächst den Wert $-\pi - \arcsin x$, sodann die Fortsetzung längs $\mathfrak{C}_1$:

$$-\pi - (\pi - \arcsin x) = -2\pi + \arcsin x$$

Wird dieser Prozeß wiederholt, so erscheint nach dem Umlauf längs $\mathfrak{C}_{-1}$:

$$-2\pi + (-\pi - \arcsin x) = -3\pi - \arcsin x$$

und nach dem Umlauf längs $\mathfrak{C}_1$:

$$-3\pi - (\pi - \arcsin x) = -4\pi + \arcsin x.$$

Nach n-maliger Wiederholung dieses Prozesses kommt also $-2n\pi + \arcsin x$ zum Vorschein, und wenn man noch einen Umlauf längs $\mathfrak{C}_{-1}$ hinzufügt: $-(2n+1)\pi - \arcsin x$. Beginnt man dagegen den Fortsetzungsprozeß mit einem Umlauf längs $\mathfrak{C}_1$ (so daß $\pi - \arcsin x$ als erstes Endresultat erscheint), so würde nach n-maligem Umlauf längs beider Wege der Wert $2n\pi + \arcsin x$ und bei Hinzufügung eines nochmaligen Umlaufs längs $\mathfrak{C}_1$: $(2n+1)\pi - \arcsin x$ zum Vorschein kommen. Damit ist gezeigt, daß *alle* in Gl. (9) angeführten Werte von Arcsin x durch analytische Fortsetzung aus dem Hauptwert arcsin x erzeugt werden können, die Monogeneität von Arcsin x also erwiesen.

6. Da der Übergang von irgendeinem der durch Gl. (9) charakterisierten Funktionszweige in einen anderen allemal und ausschließlich beim Überschreiten der Schnitte $\overline{-1, -\infty}$, $\overline{1, +\infty}$ erfolgt, so ist unmittelbar ersichtlich, daß die zuvor beschriebenen Ergebnisse auch zustande kommen, wenn man die beiden mit $\mathfrak{C}_{-1}$, $\mathfrak{C}_1$ bezeichneten Wege durch einen einzigen *beide* Punkte ± 1 umschließenden $\mathfrak{C}$ ersetzt. Man hat dabei nur darauf zu achten, *welcher* der beiden Schnitte *zuerst* überschritten wird, was von der Wahl des Ausgangspunktes in Verbindung mit der Umlaufsrichtung[1]) abhängt.

Die auf den ersten Blick auffallende Tatsache, daß die Verbindung der beiden Punkte ± 1, deren jeder einzeln nur nach Art eines *algebraischen* Verzweigungspunktes 1[ter] Ordnung wirkte, eine analoge Wirksamkeit besitzt, wie ein *logarithmischer* Verzweigungspunkt, findet ihre Erklärung in der Tatsache, daß hier die Stelle ∞ den Charakter eines *logarithmischen* Verzweigungspunktes besitzt. Da andere im Endlichen gelegene Verzweigungspunkte außer ± 1 nicht vorhanden sind, so kann man für den zuvor mit $\mathfrak{C}$ bezeichneten, die beiden Punkte ± 1 umschließenden Weg einen Kreis um den Nullpunkt mit unbegrenzt zu vergrößerndem Radius wählen: dann deckt sich ein Umlaufen dieses Kreises mit dem Vorgange, den man als ein Umkreisen des Punktes ∞ zu bezeichnen pflegt und dessen Wirkung nach derjenigen beurteilt wird, welche durch Projektion des Punktes $x = \infty$ in den Punkt $x' = 0$ vermittelst der Substitution $x = \frac{1}{x'}$ zum Vorschein kommt. Man findet auf diese Weise:

1) Die Umlaufsrichtung *an sich* ist auch hier nicht von maßgebender Bedeutung.

$$\lg\left(xi + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right) = \lg \frac{i + (x'^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{x'}$$

$$= \lg i + \lg\left(1 + (1 - x'^2)^{\frac{1}{2}}\right) - \lg x'.$$

Da der letzte Ausdruck den *logarithmischen Verzweigungspunkt* $x' = 0$ besitzt, so erscheint die Stelle $x = \infty$ als *logarithmischer Verzweigungspunkt* von Arcsin x (dabei wird offenbar Arcsin $x = \infty$ für $x = \infty$). Es ist ganz lehrreich, die entsprechenden Verhältnisse beim Arcustangens zum Vergleich heranzuziehen. Dort besitzt jeder der beiden im Endlichen gelegenen *Verzweigungspunkte* $\pm i$ *logarithmischen* Charakter, während sie zusammengenommen *sich gegenseitig aufheben* (s. § 71, Nr. 4, S. 557). Dementsprechend ist die Stelle $x = \infty$ hier *kein Verzweigungspunkt*, sondern, wie a. a. O. Gl. (17a) (S. 556) zeigt, ein *Unstetigkeitspunkt* besonderer Art, wie er bei *eindeutigen* analytischen Funktionen niemals vorkommt.

Anhang.

Literaturnachweise, Anmerkungen und Ergänzungen.

Wie am Schlusse von Bd. I meiner Vorlesungen („Zahlenlehre") will ich bei dem verhältnismäßig großen Umfange, den diese erste Abteilung von Bd. II erhalten hat, schon an dieser Stelle die mir zweckmäßig erscheinenden Literaturnachweise und sonstigen Zusätze angeben und beginne zunächst wieder mit der Zusammenstellung derjenigen meiner Arbeiten, welche aus Anlaß dieser Vorlesungen entstanden sind und zumeist auf deren Anlage und Durchführung wesentlichen Einfluß gewonnen haben. Es sind dies außer den bereits in Bd. I angeführten, nämlich:

[15] Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π. Münch. Sitz.-Ber. 1898, S. 261/8.

[17] Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise. Ebendas. 1900, S. 37/100.

[19] Über die Divergenz gewisser Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. Ebendas. 1901, S. 505/24.

die folgenden, deren laufende Numerierung sich an diejenige von Bd. I anschließt:

In den Mathematischen Annalen:

[30] Über gewisse Reihen, welche in getrennten Konvergenzgebieten verschiedene willkürlich vorgeschriebene Funktionen darstellen. 22 (1883), S. 109/116.

[31] Über das Verhalten gewisser Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise. 25 (1885), S. 419/26.

[32] Über analytische Ausdrücke mit hebbaren Unstetigkeiten. 26 (1886), S. 167/92.

[33] Über die notwendigen und hinreichenden Bedingungen des *Taylor*schen Lehrsatzes für Funktionen einer reellen Variablen. 44 (1894), S. 57/82.

[34] Über Vereinfachungen in der elementaren Theorie der analytischen Funktionen. 47 (1896), S. 121/54.

In den Sitzungsberichten der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Physikalische Klasse:

[35] Über die Entwicklung eindeutiger analytischer Funktionen in Potenzreihen. 1895, S. 75/92.

[35a] Über Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise und *Fourier*sche Reihen. 1895, S. 337/64.

[36] Über den *Cauchy*schen Integralsatz. 1895, S. 39/72. Mit Nachtrag:

[36a] Zum *Cauchy*schen Integralsatz. Ebendas. S. 295/304.

[37] Zur Theorie der synektischen Funktionen. 1896, S. 167/82.

[38] Über zwei *Abel*sche Sätze, die Stetigkeit von Reihensummen betreffend. 1897, S. 343/58.

[39] Über eine charakteristische Eigenschaft sogenannter Treppenpolygone und deren Anwendung auf einen Fundamentalsatz der Funktionentheorie. 1915, S. 27/66.

[40] Über singuläre Punkte gleichmäßiger Konvergenz. 1919, S. 419/30.

[41] Elementare Funktionentheorie und komplexe Integration. 1920, S. 145/82. — Nachtrag: 1921, S. 255/8.

[42] Über die äußere Berandung eines im Endlichen gelegenen Gebietes und den *Jordan*schen Kurvensatz. 1922, S. 187/212.

Ferner:

[43] Zur Geschichte des *Taylor*schen Lehrsatzes. Bibl. Math. (3) 1 (1901), S. 433/79.

[44] Über den Divergenzcharakter gewisser Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. Acta Math. 28 (1903), S. 1/30.

[45] Über die Definition von Funktionen *einer* Veränderlichen durch Grenzwerte von der Form $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Jahresb. d. D. M. V. 12 (1903), S. 588/92.

Zahlreiche auf das erste Kapitel bezügliche Literaturangaben finden sich in meinem Encyklopädieartikel (*Deutsche Ausgabe*, zitiert als *D. Enc.*):

II A 1 (1899), S. 1/53. Grundlagen der allgemeinen Funktionenlehre; bzw. in der (von *J. Molk* redigierten und teilweise durch Zusätze vermehrten) *französischen Ausgabe* (zitiert als *Enc. fr.*):

II 1 (1909), S. 1/112. Principes fondamentaux de la théorie des fonctions.

Für die Literatur der Kapitel IV, VI, VII kommt der von mir in Gemeinschaft mit Herrn *G. Faber* verfaßte Encyklopädieartikel in Betracht:

Deutsche Ausgabe II C 1 (1909), S. 1/46. Algebraische Analysis.
Französische Ausgabe II 7 (1911), S. 1/93. Analyse algébrique.

Des weiteren sei auf die beiden funktionentheoretischen deutschen Encyklopädieartikel II B 1 (*F. W. Osgood*) und II C 4 (*L. Bieberbach*) verwiesen.

Da es mir nicht angebracht scheint, die zahlreichen in den vorstehend genannten Spezialarbeiten und Encyklopädieartikeln enthaltenen Literaturangaben hier zu wiederholen, so begnüge ich mich abgesehen von mir zweckmäßig erscheinenden Ausnahmen mit dem generellen Hinweis auf deren Existenz.

Von grundlegender Bedeutung für die vorliegende Darstellung sind selbstverständlich die *Weierstraß*schen *Vorlesungen* über analytische Funktionen gewesen, obschon ich dieselben leider niemals gehört habe. In dieser Hinsicht war ich auf die nicht sehr weit reichende Publikation von *S. Pincherle: Saggio di una introduzione alla Teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del Prof. C. Weierstraß* (*Battaglini*, Giorn. di Mat. 18 [1880]) und auf dasjenige angewiesen, was aus diesen Vorlesungen in die bekannten Lehrbücher von *Biermann*, *Stolz* bzw. *Stolz-Gmeiner*, *Thomae*, *Vivanti-Gutzmer* übergegangen sein dürfte

Zu § 2 (S. 8/18).

Eine axiomatische Begründung der Lehre von der Streckenmessung gibt *O. Hölder*, Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß (Leipz. Ber. 1901, S. 1/60, s. insbes. S. 37 ff.).

Zu § 3, Nr. 4 (S. 22), § 8 (S. 60/6).

Terminologie und Literatur betr. Punktmengen s. D. Enc. I A 5 (*A Schoenflies*) S. 195 ff., II C 9a (*A. Rosenthal*), S. 859 ff.

Zu § 3, Nr. 5 (S. 24/5).

Bezüglich der Literatur über die verschiedenen Irrationalzahltheorien vgl I_3, S. 925. Eine eingehende Darstellung der *Dedekind*schen Theorie findet man z. B. in folgenden Lehrbüchern: *Mangoldt*, Einführung in die höhere Mathematik 1 (1. Aufl. 1911, 2. Aufl. 1919); *Kowalewski*, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung (1. Aufl. 1909, 3 Aufl. 1923); *Perron*, Irrationalzahlen (1921).

Zu § 4 ff. (S. 26 ff.).

Die Theorie der *reellen* Funktionen ist hier nur insoweit behandelt, als sie die wesentliche Grundlage für diejenige der *analytischen* Funktionen bildet. Sie hat im Laufe dieses Jahrhunderts eine auf spezifisch

mengentheoretischen Ergebnissen beruhende außerordentliche Erweiterung erfahren; vgl. hierüber die umfangreichen Lehrbücher von *C. Carathéodory* (Vorlesungen über reelle Funktionen, 1918) und *H. Hahn* (Theorie der reellen Funktionen 1921), sowie den deutschen Encyklopädieartikel II C 9 von *A. Rosenthal*.

Zu § 6, Nr. 2 (S. 49).

Zahlreiche Beispiele für Funktionen mit *hebbaren* Unstetigkeiten s. [32].

Zu § 7, Nr. 3 (S. 53/5).

Zu den Literaturangaben, welche sich bezüglich der *gleichmäßigen* Stetigkeit in der deutschen Encyklopädie S. 18, Fußn. 92/3, in der Encyclopédie française S. 36/7, Fußn. 113/4 finden, wäre als historisch interessant hinzuzufügen, daß der Beweis für die *gleichmäßige* Stetigkeit einer in einem abgeschlossenen Intervall stetigen Funktion einer reellen Veränderlichen schon in einer von *Dirichlet* im Sommer 1854 gehaltenen Vorlesung enthalten ist: s. *G. Lejeune-Dirichlets* Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen, herausgegeben von *G. Arendt* (1904), S. 4/5.

Zu § 10 (S. 80 ff.).

Der Hauptsatz von S. 90 ist eine vervollkommnete Fassung eines älteren Satzes von Herrn *E. Phragmen* (Acta Math. 7 [1885], S. 44/7) mit neuem Beweise, der übrigens gegenüber dem von mir in [42] gegebenen noch einzelne Verbesserungen enthält.

Zu § 11, Nr. 5 (S. 101/4).

Der mit einzelnen Veränderungen aus [42] entnommene Beweis des *Jordan*schen Kurvensatzes besitzt zahlreiche Vorgänger und hat inzwischen auch bereits vier Nachfolger gefunden: s. *A. Schoenflies*, Über das eindeutige und stetige Abbild eines Kreises (Jordankurve), in den Jahresb. d. D. M. V. 33 (1924), S. 147/57; *F. Hartogs*, Math. Zeitschr. 22 (1925), S. 62/74; *E. Schmidt*, Berl. Sitz.-Ber. 1923, S. 318; *J. v. Kerékjártó*, Vorlesungen über Topologie (1923), S. 59 (angeblich schon: Ungar. Akad.-Ber. 38 (1919), S. 194). Ein vollständiges Verzeichnis der Vorgänger nebst ausführlichen Literaturangaben über verwandte Untersuchungen s. D. Enc. II C 9a (*A. Rosenthal*), S. 916 ff.

Zu § 13 (§ 120 ff.),

Zu Nr. 3, 4 (S. 123/9). Über die Definition von Funktionen durch Grenzwerte von der Form $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ vgl. [45], insbesondere über $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n}$ vgl. [30].

Zu Nr. 5. Die Darstellbarkeit jeder stetigen Funktion einer reellen Veränderlichen durch eine (gleichmäßig und absolut) konvergente Reihe von Polynomen wurde zuerst von *Weierstraß* erwiesen (Berl. Sitz.-Ber. 1885, S. 633/9, 789/805 = Werke 3, S. 1/37), nach gänzlich anderer Methode und ungefähr gleichzeitig von *C. Runge* (Acta Math. 7 [1885], S. 387/92). Über die zahlreichen Modifikationen dieser Beweise s. D. Enc. II C 9c (*A. Rosenthal*), S. 1147 ff.

Zu § 15 (S. 139 ff.).

Zu Nr. 6 (S. 147/9). Auf die Möglichkeit, die reellen Veränderlichen ξ, η durch einen nur von $x = \xi + \eta i$ abhängigen arithmetischen Ausdruck darzustellen, hat *L. Seidel* (Journ. f. Math. 73 [1871], S. 300) aufmerksam gemacht. An Stelle unserer Gleichung (16), ausgedehnt auf den Fall $r \to \infty$, gibt er die folgende, im wesentlichen damit gleichbedeutende:

$$\xi - \eta i = 2\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n-1}\vartheta}{x^n + n\vartheta^n}\, d\vartheta.$$

Zu Nr. 7 (S. 150/1). Wie weit bei *Weierstraß* die Konzeption seines Begriffes der analytischen Funktion zurückreicht, dafür bieten seine vor Bd. 1 der Mathematischen Werke (1894) erschienenen Abhandlungen keine ausreichenden Anhaltspunkte. Dagegen findet sich bereits in einer aus dem Jahre 1842 stammenden, erst in den Math. Werken auszugsweise veröffentlichten Abhandlung: „Definition analytischer Funktionen einer Veränderlichen durch algebraische Differentialgleichungen" das Prinzip der analytischen Fortsetzung einschließlich der hervorgehobenen Eventualität der Nichtfortsetzbarkeit über eine bestimmte Grenze, sowie der Begriff der analytischen Funktion als eines Komplexes durch analytische Fortsetzung verbundener Potenzreihen (Bd. 1, S. 82/3). Seine Vorlesung über „Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen" hat er, wie aus dem in Bd. 3 seiner Werke (S. 355/60) enthaltenen Verzeichnis hervorgeht, zum ersten Male als 4stündig für den Winter 1861/2 nur angekündigt, erst im Winter 1863/4 und zwar 6stündig wirklich gehalten. Sie kehrt dann in wechselnden Intervallen (meist von zwei Jahren) beständig wieder. Die Wiederholung vom Sommer 1870 lieferte das Material für den Abschnitt über den Begriff der monogenen analytischen Funktion in *Stolz-Gmeiners* Einleitung in die Funktionentheorie (1905, S. 302/32), die oben (S. 595) erwähnte Publikation von *S. Pincherle* beruht auf der Vorlesung vom Sommer 1878.

Aus diesen Feststellungen dürfte hervorgehen, daß *Weierstraß* in bezug auf die Entstehung seiner Theorie der analytischen Funktionen

vor *Ch. Meray* einen erheblichen Vorsprung besitzt, da dessen *Nouveau précis d'analyse infinitésimale*, in welchem er zum ersten Male seine Ideen entwickelt, erst 1872 erschienen ist. Und, obschon ja auch seine Methode die Potenzreihen und deren analytische Fortsetzung zum Ausgangspunkt nimmt, so gelangt er meines Wissens niemals zu einer präzisen Definition des Begriffes einer monogenen analytischen Funktion, auch nicht in seinem erheblich später publizierten vierbändigen Werke: *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques* (1894—98).

Die Anfänge der *Cauchy*schen Funktionentheorie finden sich (abgesehen von dem urspünglich für ganz andere Zwecke bestimmten „*Cauchy*schen Integralsatz" von 1814 bzw. 1825 (vgl. [36], S. 39, Fußn. 1) in zwei 1831/2 nur lithographisch publizierten *Turiner* Abhandlungen (verkürzter Wiederabdruck in den Exerc. d'anal. 2 [1841], p. 41/108. Daselbst insbesondere S. 50/2 der erste Beweis des „*Cauchy-Taylor*schen Satzes" mit Hilfe des „*Cauchy*schen Randintegralsatzes" [der „*Cauchy*schen Integralformel"]). *Riemanns* berühmte Dissertation: „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe" (= Werke, S. 3/43) erschien 1851.

Einige weitere auf die Gegenüberstellung der beiden funktionentheoretischen Methoden sich beziehende Bemerkungen s. [41], S. 152/6.

Zu § 28, Nr. 5, 6 (S. 231/5).

1. Näheres über den in [33] von mir eingeführten Typus der *punktweise* gleichmäßigen Konvergenz findet man in [40]. Insbesondere werden daselbst Beispiele[1]) von Funktionen angegeben, welche wirklich *nur* „*punktweise*", *nicht* „*umgebungsweise*" (d. h. *in der Umgebung* oder *Nähe* des betreffenden Punktes: vgl. Nr. 4, S. 230) gleichmäßig konvergieren, während im Gegensatz dazu in dem hier vorliegenden Zusammenhange (S. 231/2) gerade gezeigt wird, daß die zur Definition der *punktweise* gleichmäßigen Konvergenz dienlichen Voraussetzungen schon zwangsläufig die *schlechthin* (also *umgebungsweise*) gleichmäßige Konvergenz nach sich ziehen, falls sie für alle Punkte eines abgeschlossenen Bereiches erfüllt sind.

2. In Fußn. 1, S. 234/5 habe ich eine Funktionenfolge $(F_\nu(x))$ mit der Grenzfunktion $F(x)$ als *einfach gleichmäßig* konvergent in der Nähe

1) Bei dem Beispiele von Nr. 3 (a. a. O. S. 434) könnte man, um im Rahmen der vorläufig *hier* zur Verfügung stehenden Hilfsmittel zu bleiben, die dort mit $\varphi(x)$ bezeichnete Funktion durch die in Fußn. 1, S. 58 dieses Bandes, beschriebene, auf S. 125, Fußn. 2 auch durch einen arithmetischen Ausdruck dargestellte ersetzen.

von x_0 bezeichnet, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ *ein* n_ε gehört, derart daß:

$$|F(x_0 + h) - F_{n_\varepsilon}(x_0 + h)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für} \quad 0 \leqq h < \varrho$$

Inzwischen habe ich bemerkt, daß man nach dem Vorgange von *U. Dini* unter *einfach gleichmäßiger* Konvergenz zumeist die wesentlich stärkere Forderung versteht:

$$|F(x_0 + h) - F_{m_\nu}(x_0 + h)| < \frac{\varepsilon}{3} \begin{cases} \text{für unendlich viele } m_\nu \geqq n_\varepsilon, \\ 0 \leqq h < \varrho. \end{cases}$$

Um die hieraus erwachsende Kollision zu vermeiden, ziehe ich vor, die oben erwähnte Bezeichnung fallen zu lassen und einem Vorschlag des Herrn *A. Rosenthal* folgend (D. Enc. II C 9c, S. 1165) durch den Ausdruck *einfachst*[1]) *gleichmäßige* Konvergenz zu ersetzen. Dabei erweist es sich als zweckmäßig, auch hier die durch die Beiwörter „*umgebungs*"- und „*punktweise*" charakterisierten Unterscheidungen einzuführen Ich ersetze infolgedessen in der ersten der obigen Ungleichungn ϱ durch ϱ_ε, also:

$$(1) \qquad |F(x_0 + h) - F_{n_\varepsilon}(x_0 + h)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für} \quad 0 \leqq |h| < \varrho_\varepsilon,$$

und bezeichne eine dieser Ungleichung genügende konvergente Folge $(F_\nu(x))$ als eine für $x = x_0$ *umgebungs-* bzw. *punktweise einfachst gleichmäßig konvergente,* je nachdem ϱ_ε für $\varepsilon \to 0$ eine Zahl $\varrho > 0$ oder die *Null* zur *unteren Grenze* hat.[2])

Man erkennt dann unmittelbar, daß die Ungleichungen (9)—(12), S. 234, wenn man n durch n_ε, ϱ durch ϱ_ε ersetzt, auch für den Fall der nur *punktweise* einfachst gleichmäßigen Konvergenz (geradeso wie in dem a. a. O. in Fußn. 1 erwähnten Falle, jetzt als demjenigen der *umgebungsweise einfachst gleichmäßigen* Konvergenz zu bezeichnenden) erhalten bleiben und daß somit die *punktweise einfachst gleichmäßige* Konvergenz für $x = x_0$ (in Verbindung mit der Stetigkeit der einzelnen $F_\nu(x)$) als eine

1) Man lasse sich durch diesen Superlativ nicht zu der irrigen Annahme verleiten, daß eine *einfachst* gleichmäßig konvergente Folge „erst recht" auch *einfach* gleichmäßig konvergieren müsse. Genau das Umgekehrte ist der Fall: die wesentlich *geringeren* Forderungen, welche die *einfachst* gleichmäßige Konvergenz charakterisieren, sind für die *einfach* gleichmäßige *a fortiori* erfüllt; eine *einfach* gleichmäßig konvergente Folge ist also in diesem Sinne stets auch eine *einfachst* gleichmäßig konvergente. Ebenso ist eine *schlechthin gleichmäßig* konvergente Folge auch *einfach* gleichmäßig und schließlich (sogar punktweise) *einfachst* gleichmäßig konvergent.

2) Selbstverständlich kann nur dann mit Sicherheit behauptet werden, daß die Konvergenz wirklich eine *nur punktweise* einfachst gleichmäßige ist, wenn ϱ_ε in Ungl. (1) die *obere Grenze* der Umgebungsradien vorstellt, für welche Ungl. (1) erfüllt ist Vgl. Nr. 4, Beispiel 2)

hinreichende Bedingung für die *Stetigkeit* der Grenzfunktion $F(x)$ an der Stelle x_0 erscheint.

Die besondere Wichtigkeit dieses Ergebnisses besteht nun aber darin, daß dieselbe Bedingung sich auch als eine *notwendige* erweist. Wird nämlich jetzt die *Stetigkeit* von $F(x)$ für $x = x_0$ *vorausgesetzt*, so hat man zunächst:

(2) $$|F(x_0 + h) - F(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{etwa für} \quad 0 \leqq |h| < \varrho_\varepsilon'.$$

Sodann gibt es infolge der *Konvergenz* von $F_\nu(x_0)$ gegen die Grenzfunktion $F(x_0)$ eine Zahl n_ε, derart daß:

(3) $$|F(x_0) - F_{n_\varepsilon}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

und man findet daher durch Kombination der beiden letzten Ungleichungen:

(4) $$|F(x_0 + h) - F_{n_\varepsilon}(x_0)| < \frac{2\varepsilon}{3} \quad \text{für} \quad 0 \leqq |h| < \varrho_\varepsilon'.$$

Andererseits folgt aus der *Stetigkeit* von $F_{n_\varepsilon}(x)$ an der Stelle x_0, daß:

(5) $$|F_{n_\varepsilon}(x_0 + h) - F_{n_\varepsilon}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{etwa für} \quad 0 \leqq |h| < \varrho_\varepsilon''.$$

Bezeichnet man mit ϱ_ε die nicht größere der beiden Zahlen ϱ_ε', ϱ_ε'', so ergibt sich durch Kombination von Ungl. (4) und (5) die Beziehung:

(6) $$|F(x_0 + h) - F_{n_\varepsilon}(x_0 + h)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 \leqq |h| < \varrho_\varepsilon,$$

also (vgl. Ungl. (1)) die (mindestens) *punktweise* einfachst gleichmäßige Konvergenz der Folge $(F_\nu(x))$ für $x = x_0$ und somit der Satz:

> *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Stetigkeit der Grenzfunktion einer für $x = x_0$ stetigen Folge $(F_\nu(x))$ an der Stelle x_0 besteht in der punktweise einfachst gleichmäßigen Konvergenz der Folge für $x = x_0$.*

3. Bei dem vorstehenden Beweise wurde die ja in der Voraussetzung liegende *Konvergenz* der Folge $(F_\nu(x))$ an der Stelle x_0 lediglich in Form von Ungl. (3) für eine einzige bestimmte Zahl n_ε benutzt. Andererseits muß sich aber eine Zahl n_ε auch so auswählen lassen, daß an die Stelle von Ungl. (3) die folgende tritt:

(3') $$|F(x_0) - F_\nu(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für jedes} \quad \nu \geqq n_\varepsilon,$$

und daher durch Kombination mit der Voraussetzung (2) statt der Ungleichungen (4) die folgenden sich ergeben:

(4') $$|F(x_0 + h) - F_\nu(x_0)| < \frac{2\varepsilon}{3} \quad \text{für} \quad \nu \geqq n_\varepsilon,\ 0 \leqq |h| < \varrho_\varepsilon'.$$

Da ferner jedes einzelne $F_\nu(x)$ für $x = x_0$ *stetig* ist, so besteht nach Analogie von Ungleichung (5) eine solche von der Form:

$$(5') \qquad |F_\nu(x_0 + h) - F_\nu(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{etwa für} \quad 0 \leqq |h| < \varrho'_{\varepsilon,\nu},$$

wo $\varrho'_{\varepsilon,\nu} > 0$ für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes einzelne ν, im übrigen aber wie schon durch die Bezeichnung angedeutet wird, außer von ε auch wesentlich von ν abhängt. Da es überdies freisteht, von vornherein $\varrho'_{\varepsilon,\nu} \leqq \varrho_\varepsilon'$ anzunehmen, so besteht Ungl. (4') geradeso wie Ungl. (5') für $|h| < \varrho'_{\varepsilon,\nu}$ und man findet daher durch Kombination von Ungl. (4') und (5'):

$$(6') \qquad |F(x_0 + h) - F_\nu(x_0 + h)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq n_\varepsilon,\ 0 \leqq |h| < \varrho'_{\varepsilon,\nu}.$$

Die Tragweite dieser Ungleichungen hängt wesentlich von der Beschaffenheit der positiven Zahlen $\varrho'_{\varepsilon,\nu}$ ab, in erster Linie von deren Verhalten bei festem ε und $\nu \to \infty$. Ist für jedes einzelne ε: $\underline{\lim}_{\nu \to \infty} \varrho'_{\varepsilon,\nu} = \varrho_\varepsilon > 0$, so läßt sich in Ungl. (6') die Gültigkeitsbedingung $|h| < \varrho_{\varepsilon,\nu}$ durch die folgende: $|h| < \varrho_\varepsilon$ ersetzen, d. h. in diesem Falle findet geradezu *gleichmäßige* Konvergenz statt und zwar *umgebungs-* oder *punktweise*, je nachdem $\underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \varrho_\varepsilon > 0$ oder $= 0$.

Ist dagegen $\underline{\lim}_{\nu \to \infty} \varrho'_{\varepsilon,\nu} = 0$ für irgend ein $\varepsilon = \varepsilon'$ und sodann *eo ipso* für jedes $\varepsilon < \varepsilon'$, so besteht immerhin noch die Möglichkeit, daß die Zahlen $\nu \geqq n_\varepsilon$ eine Teilfolge (m_ν) enthalten, für welche $\underline{\lim}_{\nu \to \infty} \varrho'_{\varepsilon,m_\nu} = \varrho_\varepsilon > 0$. Alsdann findet also noch *einfach* gleichmäßige Konvergenz in dem oben angegebenen Sinne statt, wenn noch $\underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \varrho_\varepsilon = \varrho > 0$, oder, wie wir nach der hier prinzipiell eingeführten Unterscheidung sagen können, *umgebungs-* oder *punktweise einfach* gleichmäßige Konvergenz, je nachdem $\underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \varrho_\varepsilon > 0$ oder $= 0$.

Tritt die eben besprochene Eventualität *nicht* ein und setzt man in Ungl. (6') speziell $\nu = n_\varepsilon$, so folgt:

$$(6'') \qquad |F(x_0 + h) - F_{n_\varepsilon}(x_0 + h)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |h| < \varrho'_{\varepsilon,n_\varepsilon},$$

also die definierenden Ungleichungen für (umgebungs- oder punktweise) *einfachst* gleichmäßige Konvergenz, die insbesondere den Charakter „*punktweise*" besitzt, wenn $\underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \varrho'_{\varepsilon,n_\varepsilon} = 0$.[1]) Die *punktweise einfachst* gleichmäßige Konvergenz erscheint somit als das *Mindestmaß* der in der unbegrenzten Folge von Ungleichungen (6') enthaltenen Konvergenzeigenschaften.

---

1) Trotz $\underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \varrho'_{\varepsilon,\nu} = 0$ für jedes einzelne ν, könnte immerhin $\underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \varrho'_{\varepsilon,n_\varepsilon} > 0$ ausfallen.

Umgekehrt zieht aber (wohlgemerkt, immer unter der Voraussetzung, daß die einzelnen $F_\nu(x)$ an der Stelle x_0 *stetig* sind[1])) die *eine* Ungleichung (6″) die ganze *Folge* der Ungleichungen (6′) nach sich. Denn Ungl. (6″) hat sich ja in Nr. 2 schon als *hinreichende* Bedingung für die *Stetigkeit* der Grenzfunktion an der Stelle x_0 ergeben, während andererseits aus dieser, wie bewiesen, die ganze *Folge* der Ungleichungen (6′) resultiert. Man kann also auch diese letztere geradezu als ***notwendige und hinreichende*** Bedingung für die *Stetigkeit* der Grenzfunktion an der Stelle x_0 ansehen und daher, wenn man etwa den durch die Ungleichungen (6′) umschriebenen Konvergenzcharakter nach dem Vorschlage des Herrn *A. Rosenthal* (a. a. O. S. 1164) als *pseudo-gleichmäßige* Konvergenz bezeichnet, dem Satze von Nr. 2 auch die folgende Fassung geben:

> *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Stetigkeit der Grenzfunktion einer für $x = x_0$ stetigen Folge $(F_\nu(x))$ an der Stelle x_0 besteht in der pseudo-gleichmäßigen Konvergenz der Folge für $x = x_0$.*

In einer Fassung, die (bei Beschränkung auf reelle x) inhaltlich sich mit der vorstehenden deckt, wurde der Satz zuerst von *U. Dini* bewiesen (Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali [1878], § 96, p. 109 = *Dini-Lüroth*, Grundlagen . . . § 96, S. 145/6). Gewöhnlich wird dieser erste Beweis *C. Arzelà* zugeschrieben, der aber selbst unter ausdrücklichem Hinweis auf die soeben zitierte Stelle *Dini* als den Urheber des Satzes angibt (Rend. Ist. Lomb. 1883, p. 17 [in dem mir vorliegenden mit eigener Paginierung versehenen Sonderabzug]). Über die Beweise des Satzes in der am Schlusse von Nr. 2 angegebenen Form s. *A. Rosenthal*, a. a. O. S. 1165, Fußn. 998. Der betreffende Enc.-Artikel enthält übrigens in den Nummern 49, 49a und 50 (S. 1137/43 und 1163/6) eine äußerst sorgfältige kritische Zusammenstellung der sehr umfangreichen, die Fragen der gleichmäßigen Konvergenz und ihrer Spielarten betreffenden Literatur.

4. Beispiele. 1). Wir setzen:

$$F_\nu(x) \begin{cases} = 2\nu x & \text{für } 0 \leqq |x| \leqq \frac{1}{2\nu} \\ = 2(1 - \nu|x|)\frac{x}{|x|} & \quad ,, \quad \frac{1}{2\nu} \leqq |x| \leqq \frac{1}{\nu} \\ = 0 & \quad ,, \quad |x| \geqq \frac{1}{\nu}. \end{cases}$$

---

1) Sollte die Stetigkeit der $F_\nu(x)$ erst bei einem Index $m > 0$ beginnen, so muß nur von vornherein $n_\varepsilon \geqq m$ vorausgesetzt werden, dann bleiben alle Schlüsse, wie zuvor. Dagegen werden sie hinfällig, wenn die Folge der $F_\nu(x)$ unendlich viele für $x = x_0$ *unstetige* Funktionen enthält.

Jede dieser drei Definitionsformen liefert für das ihr zugewiesene Gebiet eine *stetige* Funktion von x. Für $|x| = \frac{1}{2\nu}$, also $x = \frac{1}{2\nu} e^{\vartheta i}$ liefern die beiden ersten denselben Funktionswert: $F\left(\frac{1}{2\nu} e^{\vartheta i}\right) = e^{\vartheta i}$, ebenso die beiden letzten für $|x| = \frac{1}{\nu}$, also $x = \frac{1}{\nu} e^{\vartheta i}$ den gemeinsamen Wert: $F\left(\frac{1}{\nu} e^{\vartheta i}\right) = 0$. Jede der Funktionen $F_\nu(x)$ ist also ausnahmslos *stetig*, insbesondere auch an der Stelle $x = 0$, woselbst jedes $F_\nu(0) = 0$.

Wegen: $F_\nu(x) = 0$ für $|x| \geqq \frac{1}{\nu}$ findet man für die Grenzfunktion $F(x)$ den Wert: $F(x) \equiv \lim\limits_{\nu \to \infty} F_\nu(x) = 0$ für $|x| > 0$. Außerdem wird: $F(0) = 0$ (wegen $F_\nu(0) = 0$ für jedes ν). Hiernach ist $F(x)$ gleichfalls *stetig* an der Stelle $x = 0$.

Nichtsdestoweniger ist die Folge $(F_\nu(x))$ an der Stelle $x = 0$ *ungleichmäßig* konvergent, wie ja unmittelbar daraus erkannt wird, daß $F_\nu\left(\frac{1}{2\nu}\right) = 1$ für jedes noch so große ν. Sie muß dann aber nach dem Satze von Nr. 2 für $x = 0$ mindestens *punktweise einfachst gleichmäßig* konvergieren.

Um festzustellen, daß dies wirklich *nur* der Fall ist, hat man mit Beibehaltung der in Nr. 2, Ungl. (1) benützten Bezeichnungen für $x_0 = 0$, $n_\varepsilon = 1$:

$$|F(h) - F_1(h)| \equiv |F_1(h)| = 2|h| \quad \text{für} \quad 0 \leqq |h| \leqq \frac{1}{2}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für} \quad |h| < \varrho_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{6}$$

(wo von vornherein $\varepsilon < 3$ zu nehmen ist). Da $|F_1(h)| > \frac{\varepsilon}{3}$ für $|h| > \frac{\varepsilon}{6}$, so ist $\varrho_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{6}$ die obere Grenze für den Geltungsradius der obigen Ungleichung, und da sodann $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varrho_\varepsilon = 0$, so erweist sich die Folge $(F_\nu(x))$ als möglicherweise *punktweise* einfachst oder einfach gleichmäßig konvergent.

Des weiteren findet man im Anschluß an Nr. 3 Ungl. (6') für jedes beliebige ν:

$$|F_\nu(h)| = 2\nu|h| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für} \quad |h| < \varrho'_{\varepsilon,\nu} = \frac{\varepsilon}{6\nu}.$$

Dabei wird: $\lim\limits_{\nu \to \infty} \varrho'_{\varepsilon,\nu} = 0$ für jedes ε (und ebenso: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varrho'_{\varepsilon,\nu} = 0$ für jedes ν), woraus zu entnehmen ist, daß die Folge *punktweise einfachst* (nicht etwa *einfach*) *gleichmäßig* konvergiert.

2). Die Folge mit dem allgemeinen Gliede:

$$F_\nu(x) = \frac{\nu x}{1 + |\nu x|^2}$$

besitzt, wie bereits auf S. 235 gezeigt wurde, ebenfalls die ausnahmslos *stetige* Grenzfunktion $F(x) \equiv 0$ trotz ungleichmäßiger Konvergenz an der Stelle $x = 0$. Man hat hier zunächst, wenn wir (als etwas bequemer für das folgende) $\frac{\varepsilon}{2}$ statt des bisherigen $\frac{\varepsilon}{3}$ schreiben:

$$|F_1(h)| = \frac{|h|}{1+|h|^2} < |h| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad |h| < \varrho_\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Obschon hieraus $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varrho_\varepsilon' = 0$ folgen und die Anwendung derselben Schlußweise auf $F_\nu(h)$ bei $\nu \geqq 2$ den noch kleineren Geltungsradius $\varrho'_{\varepsilon,\nu} = \frac{\varepsilon}{2\nu}$ ergeben würde, so darf man daraus doch noch nicht schließen, daß die Folge *nur punktweise* einfachst gleichmäßig konvergiert, da ja $\varrho_\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ garnicht die *obere Grenze* für die Gültigkeit der Ungleichung $|F_1(h)| < \frac{\varepsilon}{2}$, sondern nur diejenige von $|h| < \frac{\varepsilon}{2}$ bedeutet. Um wirklich die erstere zu bestimmen, findet man durch Auflösung der quadratischen Gleichung:

$$\frac{\xi}{1+\xi^2} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{also:} \quad \xi^2 - \frac{2}{\varepsilon}\xi = -1$$

die beiden Wurzeln:

$$\xi = \frac{1}{\varepsilon}\left(1 \pm \sqrt{1-\varepsilon^2}\right) = \frac{\varepsilon}{1 \mp \sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

und erkennt, daß, $\varepsilon < 1$ vorausgesetzt, in dem Intervall zwischen den beiden Wurzeln $\frac{\xi}{1+\xi^2} > \frac{\varepsilon}{2}$, außerhalb desselben $\frac{\xi}{1+\xi^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ ausfällt. Man findet also insbesondere:

$$|F_1(h)| = \frac{|h|}{1+|h|^2} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad |h| < \varrho_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$

wo jetzt ϱ_ε die *obere Grenze* für den Geltungsradius der betreffenden Ungleichung bedeutet und $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varrho_\varepsilon = 0$.

Analog ergibt sich für jedes ν:

$$|F_\nu(h)| = \frac{|\nu h|}{1+|\nu h|^2} < \frac{\varepsilon}{1} \quad \text{für} \quad |h| < \varrho'_{\varepsilon,\nu} = \frac{\varepsilon}{\nu\left(1+\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)},$$

wo wiederum: $\lim\limits_{\nu \to \infty} \varrho'_{\varepsilon,\nu} = 0$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varrho'_{\varepsilon,\nu} = 0$. Die Folge $(F_\nu(x))$ ist also wirklich nur *punktweise einfachst gleichmäßig* konvergent.

Zu § 31, Nr. 3 (S. 249/52).

Das erste Beispiel einer auf dem Konvergenzkreise *ausnahmslos nur bedingt* konvergierenden Potenzreihe findet man in [31], S. 419, einen vollkommneren Typus, dem das im Text gegebene Beispiel als spezieller

Fall angehört in [17], S. 71/6, ebendaselbst auch S. 69 ein auf prinzipiell ganz anderer Grundlage beruhendes Beispiel. Man erkennt leicht, daß alle diese Reihen, insbesondere diejenige von § 31, Nr. 3 längs jedes die Stelle $x = 1$ nicht enthaltenden Bogens des Einheitskreises *gleichmäßig* konvergieren; ob das gleiche auch für einen die Stelle 1 enthaltenden Bogen stattfindet, ist zur Zeit unentschieden geblieben. Ein von Herrn *Hardy* herrührendes Beispiel einer gleichfalls längs des Einheitskreises ausnahmslos nur *bedingt* konvergierenden Potenzreihe, nämlich die binomische Reihe für $(1-x)^{-i}$, konvergiert daselbst auch *ausnahmslos gleichmäßig* (reproduziert in: *E. Landau,* Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie [1916], S. 61). Ein weiteres Beispiel der nämlichen Art gibt Herr *L. Fejér* in den Münch. Sitz.-Ber. 1917, S. 49/53 und ebendaselbst S. 38/9 ein anders geartetes Beispiel, bei welchem *ceteris paribus* an der Stelle 1 *ungleichmäßige* Konvergenz eintritt; ferner auch Beispiele von Potenzreihen, die trotz Stetigkeit der Grenzfunktion an einzelnen Stellen des Konvergenzkreises *divergieren* oder in *keinem* eine gewisse Stelle enthaltenden Bogen *gleichmäßig* konvergieren (S. 33 ff.). Generell sei noch bemerkt, daß das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise in enger Beziehung zur Theorie der *Fourier*schen Reihen steht (vgl. z. B. [17], S. 79/100 und [35a], S. 337/64).

Zu § 32 (S. 252/60).

Eine noch etwas allgemeinere Fassung des *Abel*schen Grenzwertsatzes (für welche übrigens die in Nr. 4 gegebenen Beweismittel vollständig ausreichen) s. *Stolz-Gmeiner,* Einl. in die Funktionentheorie 2, S. 287. Weitere Ausführungen nebst Literaturangaben zum *Abel*schen Grenzwertsatz findet man in meinen Arbeiten [38] (S. 344/51), [17] (S. 38/54), [19] (S. 511/5), [44] (S. 1/30). Über die Umkehrung des fraglichen Satzes, den sog. *Tauber*schen Satz (Monatsh. f. Math. u. Phys. 8 [1897], S. 273/7) und dessen Verallgemeinerungen vgl. insbesondere das in der vorigen Note zitierte Buch von *E. Landau,* S. 40/56.

Zu § 35 (S. 269 ff.).

Zu den in [34], [35] enthaltenen Literaturangaben über frühere Benutzung von Mittelwerten zur Herleitung der *Taylor*schen (genauer: *Mac Laurin*schen) Reihenentwicklung wäre hinzuzufügen, daß *Cauchys* Abhandlung aus den Exerc. d'anal. 2 (1841) schon abgedruckt ist in den Par. C. R. 10 (1840), p. 640/57 (= Oeuvres 5, p. 150/72) und im wesentlichen auch in das bekannte Lehrbuch von *Cauchy-Moigno* 1, p. 150/72 übergegangen ist. Vgl. auch den Schluß der folgenden Anmerkung.

Zu § 36, Nr. 2, 3 (S. 276/8), § 37, Nr. 2 (S. 250).

Der Satz von S. 277 rührt von *A. Gutzmer* her (Math. Ann. 32 [1888], S. 596/9), auch die daran geknüpfte Herleitung des *Cauchy*schen Koeffizientensatzes in der Form: $a_\nu r^\nu < P(r)$ (mit Ausschluß der Gleichheit). Recht umständliche Beweise *dieser* Fassung als Ergänzung zu der gewöhnlichen (mit dem Zeichen $\leqq$) findet man bei *Méray*, Leçons 3, p. 188 und *Stolz-Gmeiner*, Einl. in die Funktionentheorie, S. 203/6.

Literatur über die Beweise des Satzes in jener unvollkommneren Form s. D. Enc. II C 1, S. 12, Fußn. 34; Enc. fr. II 7, p. 18, 48 en note. Hinzuzufügen eine Bemerkung von *A. Gutzmer* (*Vivanti-Gutzmer*, Theorie der eind. anal. Funktionen [1906], S. 75, Fußn.), wonach *Weierstraß* (dessen frühere Beweise auf der ausschließlichen Anwendung von *Ungleichungen* beruhten: s. *Pincherle*, a. a. O. S. 334/6, auch Werke 1, S. 67/8) seit 1880 hierbei mit *Mittelwerten* operiert habe.

Zu § 39, Nr. 4, 5 (S. 297/301), § 45, Nr. 4 (S. 343/4), § 49, Nr. 2 (S. 373/4).

Bis zum Erscheinen des sog. *Weierstraß*schen Doppelreihensatzes (Berl. Monatsber. 1880, S. 723/6 = Werke 2, S. 205/9) bildete der *Cauchy*sche das einzige Hilfsmittel, um die Umordnung einer aus unendlich vielen Potenzreihen gebildeten Reihe in eine einzige Potenzreihe zu legitimieren. Eine in *Weierstraß'* Werken 1, S. 67 ff. abgedruckte, zuvor nicht veröffentlichte Abhandlung aus dem Jahre 1841 enthält zwar auf S. 70/4 jenen vervollkommneten Doppelreihensatz (sogar für Funktionen beliebig vieler Veränderlichen) mit der einzigen Mehrbelastung, daß außer der *gleichmäßigen* Konvergenz der aus unendlich vielen Potenzreihen bestehenden Reihe deren *unbedingte* Konvergenz vorausgesetzt wird. Demgegenüber ist hervorzuheben, daß in der Abhandlung über die analytischen Fakultäten (Journ. f. Math. 51 [1856]) nur von der *Cauchy*schen Schlußweise Gebrauch gemacht wird (a. a. O. S. 41 = Werke 1, S. 199/200). Auch scheint *Weierstraß* in seinen Vorlesungen zum mindesten bis 1878 (vgl. *Pincherle*, S. 337/8) sich ausschließlich jenes *Cauchy*schen Satzes bedient zu haben. Der in der Abhandlung von 1841 enthaltene bereits vollkommenere Satz gewann erst seine geradezu fundamentale Bedeutung nachdem ihn *Weierstraß* noch von der Beschränkung der *unbedingten* Konvergenz befreit hatte. (Vgl. die Bemerkung zu § 49).

Der vorliegende Beweis des *Vitali*schen „Satzes" bzw. des als Hauptbestandteil anzusehenden „Doppelreihensatzes" stammt in der Hauptsache von Herrn *E. Lindelöf*: Bull. Soc. Math. de France (1913), p. 171. Nicht wesentlich davon verschieden ist der Beweis von *R. Jentzsch*: Dissert. Berlin, 1914. Über den ursprünglichen *Vitali*schen Beweis vgl. [41],

S. 146, Fußn. Anderer Beweis des Satzes nebst Verallgemeinerungen und ausführlichen Literaturangaben bei *C. Carathéodory* und *E. Landau*: Berl. Ber. 1911, S. 587/613 (s. insbes. Satz VI, S. 573). Eine andere Verallgemeinerung s. *W. Blaschke*, Leipz. Ber. 1915. S. 194/200; Vereinfachung des Beweises durch *E. Landau*: Ebendas. 1918, S. 156/9. Sonstige Literatur: D. Enc. II C 4 (*L. Bieberbach*), S. 494/5. Weitere Verallgemeinerungen gibt *A. Ostrowski*, Jahresb. d. D. M.-V. 32 (1923), S. 185/94, 286/95.

Zu § 41, Nr. 3, 4 (S. 311/5).

Ausführliche Literaturangaben über rekurrierende Reihen s D Enc. II C 1, S. 16/9; Enc. fr. II 7, p 28/33.

Zu § 47, Nr. 4 (S. 359).

Bezüglich der Definition des *regulären* Verhaltens einer analytischen Funktion finden sich in den verschiedenen Ausgaben der grundlegenden *Weierstraß*schen Abhandlung „*Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*" zwei verschiedene Versionen, deren *zweite*, wie mir scheint, zu gewissen Bedenken Anlaß gibt. Ich habe bereits im Jahre 1896 hierauf hingewiesen (s. [34], S. 122, Fußn.), in der Hoffnung, aus dem zu jener Zeit ja noch ungemein großen Kreise derjenigen, welche die *Weierstraß*schen Vorlesungen gehört haben, irgendwelche Aufklärungen zu erhalten. Da diese Hoffnung sich nicht erfüllt hat, andererseits der fragliche Gegenstand mir ein allgemeines Interesse zu verdienen scheint, so erlaube ich mir, an dieser Stelle nochmals darauf zurückzukommen.

In der *ersten* Ausgabe jener Abhandlung, enthalten in den Abh. der Berl. Akademie von 1876, drückt sich *Weierstraß* auf S. 11, Abs. 2, folgendermaßen aus:

> Ich will von einer eindeutigen Funktion $f(x)$ sagen, sie verhalte sich in der Umgebung einer bestimmten Stelle a *regulär*, wenn sie für alle Werte von x innerhalb des Bezirks, in welchem der absolute Betrag von $(x - a)$ kleiner als ein gewisser Grenzwert ist, in Form einer Reihe
>
> $$A_0 + A_1(x - a) + A_2(x - a)^2 + \cdots,$$
>
> deren Koeffizienten bestimmte von x unabhängige Werte haben, dargestellt werden kann.

In der *zweiten* Ausgabe derselben Abhandlung, erschienen 1886 in dem Buche: *Abhandlungen aus der Funktionenlehre*, wird diese Definition auf S. 1 (= Werke 2, S. 77) durch die folgende ersetzt:

> Ich will von einer eindeutigen analytischen Funktion $f(x)$ der komplexen Veränderlichen x sagen, sie verhalte sich *regulär*

in der Umgebung einer bestimmten Stelle ($x = a$), wenn sie innerhalb eines gewissen Bezirks, dessen Mittelpunkt a ist, überall einen endlichen und mit x stetig sich ändernden Wert hat. Nach einem bekannten Satze existiert dann eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x|a)$, welche innerhalb des genannten Bezirks die Funktion darstellt.

Über die vermeintlichen Vorzüge dieser neuen Definition habe ich kein Urteil, empfinde es aber als einen prinzipiellen Mangel, daß deren endgültiges Verständnis von der Berufung auf einen nicht näher bezeichneten „bekannten" Satz abhängig gemacht wird, zumal es mir bisher nicht gelungen ist, etwa auf Grund der folgenden Überlegung darüber volle Klarheit zu gewinnen, inwieweit die Hilfsmittel der von *Weierstraß* geschaffenen Funktionentheorie ausreichen, um die obige Definition zu einer einwandfreien zu machen.

Abweichend von der ersten Fassung wird jetzt die eindeutige Funktion $f(x)$ ausdrücklich als *analytische* bezeichnet (was dort nicht erforderlich war, da ja der analytische Charakter von $f(x)$ auf Grund der vorausgesetzten Darstellbarkeit durch eine $\mathfrak{P}(x|a)$ von vornherein feststand). Infolgedessen muß ein Funktionselement $\mathfrak{P}(x|x')$ vorhanden sein, welches den Funktionswert $f(a)$ *erzeugt*, d. h. a muß entweder *im Innern* oder mindestens auf der *Grenze* des Konvergenzbereiches von $\mathfrak{P}(x|x')$ liegen. Ist das *erstere* der Fall[1]), so läßt sich $\mathfrak{P}(x|x')$ ohne weiteres in eine $\mathfrak{P}(x|x', a)$ umformen, deren vorläufiger kreisförmiger Konvergenzbereich denjenigen von $\mathfrak{P}(x|x')$ von Innen berührt und (sofern nicht ein weiterhin noch zu besprechendes Hindernis eintritt) nach einem wirklich „be-

1) Ich halte es nicht für unwahrscheinlich, daß *Weierstraß* in dem vorliegenden Zusammenhange nur diesen Fall im Auge gehabt hat. In einem seiner Briefe an *Sonja Kowalewsky* (s. *G. Mittag-Leffler,* Weierstraß et Sonja Kowalewsky Acta Math 39 [1924], S. 194) schreibt er, „daß bei einem analytischen Gebilde zu unterscheiden sei zwischen den Stellen, die dem Gebilde *angehören*, und denen, die als Grenzstellen sich ihm zugesellen." Versteht man sodann unter den einer analytischen Funktion $f(x)$ *angehorenden* Stellen nur diejenigen, die *im Innern* des Konvergenzbereiches irgendeines zur Definition von $f(x)$ dienlichen Funktionselements liegen, und bezieht die obige Definition nur auf derartige der Funktion $f(x)$ *angehörende* Stellen, so wird man in der Tat auf den an der vorliegenden Stelle des Textes bezeichneten Fall als den einzig möglichen geführt. Dabei bliebe aber die an sich wichtige Frage unerledigt, ob *im Innern* eines Bereiches, der im übrigen aus lauter der Funktion $f(x)$ *angehörenden* Stellen besteht, nicht auch *Grenzstellen* a von der Beschaffenheit existieren können, daß $\lim_{x \to a} f(x)$ einen bestimmten endlichen Wert hat und daher *Stetigkeit* von $f(x)$ besteht, sobald man $f(a)$ durch den Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x)$ definiert (welcher ja, falls irgendein Funktionselement $\mathfrak{P}(x|x')$ für die auf dem Konvergenzkreise liegende Stelle a *konvergieren* sollte, nach dem *Abel*schen Grenzwertsatze mit $\mathfrak{P}(a|x')$ übereinstimmen würde).

kannten" Satze (s. den letzten Satz von § 55, S. 419) auf den ganzen (sc. kreisförmigen) „Bezirk mit dem Mittelpunkte a" (kürzer: den Kreis $\mathfrak{K}_a$) ausgedehnt werden kann.

Man muß aber auch mit der *Möglichkeit* rechnen, daß a nicht nur auf der *Grenze* des Konvergenzbereiches jenes *einen* Funktionselementes $\mathfrak{P}(x|x')$ liegt, sondern daß zu *jedem* in hinlänglicher Nähe von a gelegenen Punkte x' ein Funktionselement gehört, dessen Konvergenzkreis durch den Punkt a geht (niemals ihn *umschließt*), mit anderen Worten, daß a ein *Grenzpunkt* des *Regularitätsbereiches* („Regularität" hier und weiterhin im Sinne der *ersten* Definition verstanden) von $f(x)$ sein könnte. Daß dieser angenommene Fall in Wirklichkeit niemals eintreten kann, läßt sich allerdings mit Hilfe eines „bekannten" Satzes leicht beweisen, nämlich des *Laurent*schen (vgl. § 52, S. 386, Satz I und § 57, S. 429, Erster Fall). Da aber dieser Satz innerhalb der *Weierstraß*schen *Theorie*, soweit meine Kenntnisse reichen, *nicht existiert*[1]), so bleibt zum mindesten die Frage offen, welcher den *Weierstraß*schen Vorlesungen angehörige Satz das entsprechende leisten solle.

Aber selbst hiervon abgesehen, wäre durch die vorstehende Schlußweise noch nicht endgültig bewiesen, daß für $f(x)$ eine Entwicklung von der Form $\mathfrak{P}(x|a)$ existieren müsse, vielmehr nur festgestellt, daß a *kein isolierter Grenzpunkt* des Regularitätsbereiches von $f(x)$ sein kann — ein Ergebnis, das sich überdies in analoger Weise auf jeden Punkt x im Innern von $\mathfrak{K}_a$ ausdehnen ließe. Immerhin müßte dann noch die Möglichkeit ins Auge gefaßt werden, daß die Stelle a einer innerhalb $\mathfrak{K}_a$ verlaufenden, aus lauter *Grenzpunkten* des Regularitätsbereiches bestehenden *Linie* angehören könnte, z. B. einer Strecke $\overline{pq}$ von der Beschaffenheit, daß die Konvergenzkreise aller an sie heranreichenden Funktionselemente entweder durch einen der Punkte p, q gehen oder die Strecke $\overline{pq}$ tangieren. Um auch hier die Unzulässigkeit einer derartigen Annahme festzustellen, erweisen sich die in der vorliegenden Abteilung entwickelten Hilfsmittel als unzureichend. Dagegen läßt sich dieses Ziel unschwer erreichen, wenn man die komplexe Integration zu Hilfe nimmt. Nach bekannter Methode (auf die ich, da hier die Prämissen fehlen, an dieser Stelle nicht näher eingehe) beweist man, daß die gemachte Annahme die Gültigkeit des „*Cauchy*schen Integralsatzes" innerhalb $\mathfrak{K}_a$ nicht beeinträchtigt. Bedeutet dann

1) Dem widerspricht nicht, daß *Weierstraß* in einer in Bd. 1 der Math. Werke zum ersten Male abgedruckten Arbeit aus dem Jahre 1841 (d. h. noch zwei Jahre *vor* der entsprechenden *Laurent*schen Publikation) den Satz mit Hilfe der Reduktion eines komplexen Kreisintegrals auf ein reelles zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ bewiesen hat. Dieser Beweis liegt ganz *außerhalb* der *Weierstraß*schen Theorie der analytischen Funktionen.

x_0 eine daselbst beliebig, aber fest angenommene, x jede davon verschiedene Stelle innerhalb $\mathfrak{K}_a$, so stellt das Integral $\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz$ eine in $\mathfrak{K}_a$ *eindeutige* Funktion mit der *stetigen Derivierten* $f(x)$ dar, ist also durchweg nach der *Taylor*schen Reihe entwickelbar, und das gleiche gilt dann für die Derivierte $f(x)$, insbesondere an der Stelle $x = a$.

Die vorstehende Schlußweise behält ihre Gültigkeit, wenn man an die Stelle $\overline{pq}$ einen *„rektifizierbaren"* *Jordan*schen Kurvenbogen treten läßt. Inwieweit sie noch anwendbar bleibt bzw. erweiterungsfähig ist, wenn man den letzteren durch ein *linienhaftes Kontinuum* ersetzt, dem mindestens eine jener beiden charakteristischen Eigenschaften fehlt, entzieht sich zurzeit meiner Kenntnis.

Wie dem auch sei, jedenfalls wird man zugeben müssen, daß jene *zweite* Definitionsform des *regulären Verhaltens* einer analytischen Funktion der wünschenswerten Einfachheit und Klarheit zu ermangeln scheint, und daß man daher wohl besser tut, auf die von *Weierstraß* aus nicht recht ersichtlichen Gründen aufgegebene *erste* Definition zurückzugreifen (wie auch hier auf S. 359 geschehen ist). —

Die meines Wissens ganz allgemein angenommene *Weierstraß*sche Definition der *singulären Stellen* als *Grenzstellen* des *Regularitätsbereiches* ist von Herrn *L. Bieberbach* (D. Enc. II C 4, S. 401/3) angefochten und durch eine andere nur sieben Druckzeilen umfassende ersetzt worden. Mir würde es wenig zweckmäßig erscheinen, einen so fundamentalen, schon bei den ersten Schritten in das Gebiet der analytischen Funktionen unentbehrlichen Begriff durch eine solche Definitionsbelastung von vornherein zu diskreditieren. Und ich möchte annehmen, das Herrn *Bieberbach* vorschwebende Ziel könnte besser erreicht werden, wenn man, unter Beibehaltung der jetzigen klaren Terminologie, innerhalb der Klasse der singulären Stellen nach Bedarf Differenzierungen einführte, sie z. B. in erreichbare und nicht erreichbare oder echte und unechte oder wirkliche und scheinbare oder, falls man mehr Kategorien brauchen sollte, in solche 1ter, 2ter, ... n^{ter} Gattung unterschiede.

Zu § 49 (S. 371/8).

Durch den auf dem *Weierstraß*schen Doppelreihensatze beruhenden Satz von Nr. 1 und die im Gegensatz zu einer irrigen Annahme *Riemanns* (Dissertation § 20 = Werke, S. 39, letzter Absatz) in Nr. 3 daran geknüpfte scharfe Trennung zwischen den Begriffen *„arithmetischer Ausdruck"* und *„analytische Funktion"* hat *Weierstraß* dem letzteren erst seine

endgültige Abrundung gegeben (Berl. Monatsber. 1880, S. 728/9 = Werke 2, S. 210).

Über die Provenienz von Beispielen, wie das in Nr. 3 behandelte, vgl. [30].

Zu § 52, Nr. 1 (S. 386/9).

Andere elementare (d. h. nicht auf der komplexen Integration beruhende) Beweise des *Laurent*schen Satzes sind von Herrn *G. Mittag-Leffler* (Acta Math. 4 [1884], S. 80/8) und *L. Scheeffer* (Ebendas. S. 375/80) gegeben worden. Dieselben setzen aber eine Reihe von Vorkenntnissen, insbesondere aus der Theorie der mehrdeutigen Funktionen voraus, die es von vornherein unmöglich machen, den für die Theorie der eindeutigen Funktionen fundamentalen Satz an der ihm zukommenden Stelle erscheinen zu lassen, und obschon sie der Auffassung des Lesers weit größere Schwierigkeiten zumuten, als der hier mitgeteilte (aus [34], [35] entnommene), so ist ihre Tragweite erheblich geringer. Denn diese erstreckt sich ausschließlich auf *analytische* Funktionen im *Weierstraß*schen Sinne, nicht, wie der vorliegende, auch auf solche Funktionen, von denen zunächst nur feststeht, daß sie die Eigenschaft der *gleichmäßigen Differenzierbarkeit* besitzen (deren „analytischer" Charakter dann gerade erst aus dem fraglichen Satze hervorgeht). Das gleiche gilt übrigens auch von demjenigen Beweise des *Laurent*schen Satzes, der sich in den *A. Hurwitz*schen „Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen" (herausgegeben von *R. Courant*, 1922) auf S. 92/5 findet, obschon er auf der *komplexen Integration* und zwar unter Beschränkung auf *Potenzreihen* beruht. In diesem Zusammenhange erscheint es einigermaßen irreführend, daß daselbst (S. 89) der Satz über die Unabhängigkeit *derartiger* Integrale vom Integrationswege schlechthin als „der *Cauchy*sche Satz" bezeichnet wird, während es sich doch in Wirklichkeit nur um einen ganz speziellen, man darf sagen, trivialen Fall davon handelt, der erst dann die obige Bezeichnung verdient, wenn man *zuvor* die *Regularität* jeder (allenfalls mit der Beschränkung „gleichmäßig" oder „stetig") *differenzierbaren* Funktion erwiesen hat (vgl. [37], S. 178/9; [41], S. 173/6).

Zu § 53 (S. 393/401).

Durch den Nachweis der Äquivalenz von *gleichmäßiger* und *stetiger Differenzierbarkeit*[1]) wird derjenige für die Gleichwertigkeit des *Weierstraß*schen und des *Cauchy*schen Ausgangspunktes erst zum Abschluß

1) Vgl. [36a], S. 296/303. Daselbst wird auch gezeigt (S. 302/3), daß man, ohne wie hier in Nr. 2 den Weg über die *Taylor*sche Entwicklung zu nehmen, aus der Voraussetzung der *gleichmäßigen* Differenzierbarkeit die *Stetigkeit* der Derivierten unmittelbar erschließen kann.

gebracht. Dazu ist noch zu bemerken, daß in den verschiedenen Arbeiten *Cauchys* über diesen Gegenstand seine Ansichten betreffs der *Notwendigkeit*, die *Stetigkeit* der (ersten) *Derivierten* unter die Voraussetzungen aufzunehmen, mehrfach gewechselt haben. Ausführliche historische Notizen hierüber findet man in [43], S. 471/7. Die von *Cauchy* in seinen späteren Arbeiten behauptete, aber niemals bewiesene Entbehrlichkeit jener Voraussetzung wurde erst durch *E. Goursats* zweiten Beweis des *Cauchy*schen Integralsatzes (Amer. Math. Soc. Transact. 1 [1900], p. 14) sicher gestellt. Bei dem hier befolgten Gange gestaltet sich nach Einführung der komplexen Integration der entsprechende Beweis überaus einfach (vgl. [41], S. 136/8).

Zu § 56 (S. 419/28).

Der von *Weierstraß* herrührende Satz über den eindeutigen Verlauf einer im Innern eines einfach zusammenhängenden Bereiches durchweg regulären Funktion wird häufig kurz als der *Monodromiesatz* bezeichnet. Der in seinen Vorlesungen vorgetragene Beweis (s. *Stolz-Gmeiner*, Einl. in die Funktionentheorie 2, S. 320/3) beruht auf der sukzessiven Reduktion eines *beliebigen* Weges für die analytische Fortsetzung auf einen *speziellen*. Gewisse dabei nicht berücksichtigte Möglichkeiten wurden von *W. F. Osgood* hervorgehoben und erledigt (Bull. Am. Math. Soc. (2), 10 [1904], p. 294/9). Verhältnismäßig kurze, aber *indirekte* Beweise geben *G. Faber* (in der 5. Aufl. von *H. Burkhardts* Einführ. in die Theorie der analyt. Funktionen [1921], S. 264/6) und ähnlich *L. Bieberbach* (Lehrbuch der Funktionentheorie [1921], S. 217/8). Der hier mitgeteilte erheblich umständlichere, aber *direkte* Beweis dürfte den eigentlichen Kern des Satzes, nämlich die aus der Voraussetzung sich ergebende Möglichkeit, den in Frage kommenden Bereich systematisch mit einem Netz ineinandergreifender, eine daselbst *eindeutige* analytische Funktion erzeugender Potenzreihen zu überziehen, am deutlichsten zur Anschauung bringen. Einige weitere Ausführungen zu der in Fußn. 3, S. 419/20 enthaltenen Bemerkungen über unzulängliche Fassung des vorliegenden Satzes findet man in [39], S. 59/61 und daran anschließend (S. 63/6) ein vollständig durchgeführtes Beispiel von der am Schlusse der Fußnote erwähnten Art.

Zu § 57, Nr. 4, 2 (S. 433).

Da jede *Häufungsstelle* von *singulären Stellen* einer eindeutigen analytischen Funktion (bzw. eines eindeutigen Zweiges einer mehrdeutigen) auf Grund der hier gegebenen Definition singulärer Stellen (S. 359) wiederum eine *singuläre Stelle* ist, so bilden die letzteren eine *abgeschlossene Menge* (s. § 8, Nr. 2, S. 63). Wenn nun dieser charakteristische Satz

durch die am Schlusse der Anmerkung zu § 47 (s. S. 610) erwähnte *Bieberbach*sche Definition der singulären Stellen hinfällig wird, so möchte ich darin lediglich ein neues Argument für die Unzweckmäßigkeit jener Definition erblicken.

Zu § 63 (S. 471/85).

Zu Nr. 1 (S. 471/4). Über die ersten (auf Kettenbruchentwicklungen beruhenden) Beweise der *Irrationalität* von e (*Euler*) und π (*Lambert*) vgl. [15]. Der übliche auf der Reihendarstellung der Zahl e beruhende Beweis für deren *Irrationalität* (s. I_1, § 33, Nr. 4, S. 205) wird *Fourier* zugeschrieben (nach *Stainville,* Mélanges d'analyse algébrique, 1815). Der hier mitgeteilte Beweis für die *Irrationalität* von π stammt von *Hermite* (s. den lithographierten *Cours de M. Hermite,* 4ième éd. [1891], p. 74/5).

Zu Nr. 2, 3 (S. 474/9). Die Vereinfachungen des recht verwickelten *Hermite*schen Beweises für die *Transzendenz* von e (Paris C R. 77 [1873], p. 22/4, 77, 291) von *D. Hilbert* und *A. Hurwitz,* zuerst publiziert in den Gött. Nachr. 1893, finden sich, samt einer Modifikation der beiden Beweise durch *Gordan,* wieder abgedruckt in Bd. 43 der Math. Ann. (1893). Von *Hurwitz* stammt insbesondere die (auch für die endgültige Form des Transzendenzbeweises von π grundlegende) Zerlegungsformel (s. Gl. (18)) für e^x (abgesehen von einem unerheblichen formalen Unterschied, der in der Umformung des Restgliedes R_n mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Diff.-Rechnung besteht).

Zu Nr. 4, 5 (S. 479 ff.). Der *Lindemann*sche Beweis für die *Transzendenz* von π (Math. Ann. 20 [1882], S. 212/23) wurde zuerst von *Weierstraß* (Berl. Sitz.-Ber. 1885, S. 1067/85), sodann durch die zuvor erwähnten Aufsätze von *Hilbert* und *Gordan* vereinfacht. Eine möglichst elementare, für weitere Kreise berechnete Gesamtdarstellung des Beweises (im wesentlichen auf *Hilbert* und *Hurwitz* beruhend) dürfte zuerst *H. Weber* in seiner Encykl. der El.-Math. gegeben haben (Bd. 1, 1903). Anderweitige Beweise: *F. Mertens* (Wiener Ber. 105, 2 [1896], S. 839/55); *Th. Vahlen* (Math. Ann. 53 [1900], S. 457/60). Eine kritische Zusammenstellung und Analyse der verschiedenen Beweise gibt *Hessenberg* in der Schrift: Transzendenz von e und π (Leipzig 1912).

Zu § 64, Nr. 3 (S. 489/92).

Die Bestimmung des Exponentialfaktors $e^{g(x)}$ dürfte aus einer *Weierstraß*schen Vorlesung herrühren.

Zu § 66—68 (S. 500 ff.).

Zahlreiche Entwicklungen und Literaturnachweise aus dem Gebiete der *Bernoulli*schen und *Euler*schen Zahlen s. *L. Saalschütz,* Vorlesungen

über die Bernoullischen Zahlen, ihren Zusammenhang mit den Sekantenkoeffizienten und ihre wichtigeren Anwendungen (Berlin 1893).

Zu § 69 (S. 525 ff.).

Zu Nr. 3 (S. 529/33). Der Beweis des „Hauptsatzes" von Nr. 3 stammt vermutlich aus einer *Weierstraß*schen Vorlesung. Die Methode, derartige Konvergenzbeweise durch Majorantenbildung zu erledigen, wird von *O. Stolz* (Vorl. über allg. Arithmetik 1 [1. Aufl. 1885], S. 297) auf eine (1835 lithographierte, 1840 in Bd. 1 der Exerc. d'anal. abgedruckte) Abhandlung von *Cauchy* über Integration von Differentialgleichungen zurückgeführt (a. a. O. S. 355 ff.).

Zu Nr. 6 (S. 536/8). Die daselbst gegebene Koeffizientenbestimmung für die *Lagrange*sche Reihe rührt von *Jacobi* her: Journ. f. Math. 6 (1830), S. 6 (= Werke 6, S. 38). Andere, gleichfalls elementare (nämlich auf Anwendung von Mittelwerten beruhende) Herleitung bei *Cauchy* (s. die in der Note zu § 35 angeführte Abhandlung), besser bei *E. Rouché* (Journ. Éc. Polyt. T. 22 [1861], p. 199/201; auch: *Serret*, Cours d'algèbre supérieure, 5[ième] éd. [1885], p. 466/81).

Zu § 71, Nr. 6 (S. 561).

Die betreffende Bemerkung von *Abel* befindet sich in seiner Abhandlung über die binomische Reihe: Journ. f. Math. 1 (1826), S. 316, Fußn. (= Oeuvres 1, p. 224/5 en note); der auf der irrigen Annahme, daß jede in der Umgebung einer Stelle *überhaupt* konvergierende Funktionenreihe daselbst *eo ipso* nach heutiger Ausdrucksweise *gleichmäßig* konvergieren müsse, beruhende *Cauchy*sche Satz: Anal. algébr. p. 131 (= Oeuvres (2), 3, p. 120).

Zu § 74, Nr. 1, 2 (S. 583/6).

O. Stolz (Allg. Arithmetik 2 [1886], S. 213; *Stolz-Gmeiner*, Einl. in die Funktionentheorie 2, S. 370) bezeichnet den Wert:

$$\operatorname{Arcsin} x = \frac{1}{i} \lg\left(xi - (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right)$$

als *zweiten* Hauptwert des Arcussinus. Mir erscheint die hier durchgeführte Beschränkung auf den *einen* Hauptwert:

$$\arcsin x = \frac{1}{i} \lg\left(xi + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right)$$

zweckmäßiger, da jener angeblich *zweite* bei Zerlegung der unendlich vieldeutigen Funktionen $\operatorname{Arcsin} x$ in *eindeutige*, nach dem Muster von $\arcsin x$ gebildete und sich stetig aneinander schließende *Zweige* zwei *verschiedenen* Zweigen angehört (s. S. 589).

Sachregister.

Die Ziffern beziehen sich auf die Seitenzahlen.
F (nach Bedarf mit einem Nummerindex) bedeutet *Fußnote.*